S. 731

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

S. 731.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

4

TOME QUATRIEME.

BRITISH MUSEUM NAT. HISTORY

Mém. Soc. R. Sci. Liège, IV (~~1~~) ~~[illegible]~~

p. 71-278 were pub^d before July 1847.
353-378 " " after Aug. & before Dec. 1847

BRIT. MUS. (NAT. HIST.), LONDON, S.W. SHERBORN'S "INDEX ANIMALIUM."

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES, CHEZ C. MUQUARD. LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS, CHEZ RORET, LIB. ÉDIT. RUE HAUTEFEUILLE, 10 bis.

1848-1849.

acc p. 73

S. 731.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

4

TOME QUATRIEME.

LIEGE,

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARD.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIB. ÉDIT.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

1848-1849.

acc 4.73

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

1. *De la construction des normales dans les courbes du second degré.*

Par J. MARTYNOWSKI,

RÉPÉTITEUR DE MATHÉMATIQUES A L'ÉCOLE DES ARTS-ET-MANUFACTURES ET DES MINES DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

1. *Définitions.* On appelle *normale* la perpendiculaire menée au point de contact sur la tangente à une courbe. Le point de contact de la tangente est *le pied de la normale.* La distance de chaque point de la normale à son pied est appelée *distance normale :* c'est en même temps la plus courte distance d'un point à une courbe. *Elever la normale à une courbe* c'est mener la perpendiculaire au point de contact sur la tangente à cette courbe. *Abaisser la normale* c'est trouver la distance normale d'un point donné à une courbe donnée.

2. Assigner le nombre et la position des normales, qu'on peut abaisser d'un point du plan sur une courbe du second degré, située dans le même plan, est l'objet de la présente note.

Voici en résumé les résultats auxquels je suis parvenu.

1. De tous les points intérieurs de la developpée de l'ellipse à l'exception des points situés sur les axes de la première, on peut toujours abaisser quatre normales sur l'ellipse. Dans les ellipses, dont l'excentricité est plus grande que le plus petit des deux axes, tous les points des arcs elliptiques, interceptés pa la développée, jouissent aussi de la propriété énoncée.

II. De tous les points de la développée, à l'exception de ses sommets, on ne peut abaisser sur l'ellipse que trois normales, ou, pour mieux dire, quatre dont deux se confondent.

III. De tous les points en dehors de la développée, à l'exception des points situés sur les prolongements de ses axes, quelle que soit d'ailleurs leur position à l'égard de l'ellipse, on ne peut abaisser sur cette dernière que deux normales.

IV. De tous les points de l'ellipse, en dehors de la développée, à l'exception des sommets de la première, on ne peut mener que deux normales. L'une de ces normales est la perpendiculaire à la tangente qui passe par le point désigné de l'ellipse ; la position de l'autre peut être indiquée par une équation du troisième degré, n'ayant qu'une seule racine réelle, soit qu'on cherche l'abscisse ou l'ordonnée du pied de la normale, soit qu'on cherche la direction de la normale elle-même.

V. De tous les points pris sur les axes de la développée, à l'exception de ses sommets, on peut abaisser sur l'ellipse quatre normales. Deux de ces normales aboutissent au sommet de l'axe de l'ellipse, sur lequel le point est situé ; deux autres sont symétriques par rapport à cet axe.

VI. Des sommets de la développée et de tous les points extérieurs des axes de celle-ci, on ne peut abaisser que deux normales sur l'ellipse. Ces normales aboutissent aux sommets correspondants de cette dernière.

VII. Enfin, du centre de l'ellipse on ne peut abaisser que quatre normales : ce sont les quatre demi-axes de cette courbe.

Toutes ces propriétés conviennent indistinctement à la parabole, sauf 1° le nombre des normales qui est partout moins un pour la parabole ; sauf 2° le nombre des axes et des sommets, tant pour la parabole que pour sa développée : car ces deux courbes n'ont qu'un axe et qu'un sommet ; sauf 3° la propriété, dont jouit la développée de la parabole, de couper toujours cette dernière et, par conséquent, de comprendre et non d'intercepter les points de cette dernière ; sauf 4° la dernière propriété, énoncée ci-dessus, qui n'a pas évidemment lieu pour la parabole, puisque cette courbe est dépourvue de centre,

Quant à la construction des normales à l'ellipse j'ai réussi à faire dépendre les données qui y sont nécessaires de la résolution d'une équation du troisième degré, dépourvue de son second terme, de laquelle relève ensuite une autre du second. C'est en cela que con-

siste, ce me semble, toute la difficulté : car partout, comme on le verra dans la suite, on est aux prises avec des équations complètes du quatrième degré, qu'on ne peut résoudre ni par extraction de racine carrée ni par tout autre procédé connu à moins qu'on n'ait recours à la réduite de cette équation.

3. Le problème d'élever la normale à une courbe est très simple. On donne une courbe par son équation

$$\Phi(x,y)=0 \quad \ldots \quad (1)$$

et l'on désigne un point (x, y) de cette courbe. La direction de la tangente au point (x,y) de la courbe est donnée par $\frac{dy}{dx}$ de l'équation. On a ainsi

$$\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Phi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots \quad (2)$$

En renversant et en prenant en signe contraire la valeur de $\frac{dy}{dx}$ on a la direction de la normale. Cela posé, si l'on désigne par p et q, k et l les coordonnées courantes de la tangente et de la normale, on aura

$$(q-y)\frac{d\Phi}{dy}=-\frac{d\Phi}{dx}(p-x) \qquad (3)$$

$$(l-y)\frac{d\Phi}{dx}=+\frac{d\Phi}{dy}(k-x) \qquad (4)$$

pour les équations de ces deux droites. Le point (x,y) étant donnée on construit aisément la tangente et la normale en posant $q=0$, $l=0$ et en cherchant les valeurs correspondantes de p et de k : c'est ce qui donne les distances de l'origine aux points où ces deux droites coupent l'axe des x.

4. Le problème d'abaisser d'un point (k,l) la normale sur une courbe est plus difficile que le précédent.

En effet, si, dans l'équation (4), on suppose que k et l soient données : x et y étant indéterminées on a une courbe dont l'intersection avec la proposée détermine les pieds d'une ou de plusieurs normales cherchées.

De la construction des normales dans l'ellipse.

5. Supposons que la courbe proposée soit une ellipse, dont $2a$ et $2b$ sont le grand et le petit axe et $2c$ l'excentricité : l'équation de cette courbe et la relation qui lie a, b et c seront :

$$\Phi = 0 = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 \quad \ldots \quad (5)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \ldots \quad (6)$$

En différentiant l'équation (5) on trouve

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2b^2x, \frac{d\Phi}{dy} 2a^2y \quad \ldots \quad (7)$$

Par conséquent l'équation de la normale en un point (x,y) de la courbe sera

$$\left.\begin{aligned} (l-y)b^2x &= a^2y(k-x) \\ c^2xy &= a^2ky - b^2lx \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8).$$

ou bien

Comme cette dernière équation en x,y représente une hyperbole, on voit que, pour abaisser d'un point (k,l) une ou plusieurs normales sur l'ellipse, il faut tracer l'hyperbole (8) et les pieds de toutes les normales possibles seront sur l'intersection des deux courbes.

Remarque. En multipliant l'équation (8) par $2ab:c^2$ et en ajoutant à l'équation (5) on trouverait l'équation de la parabole qui, en coupant l'ellipse, détermine les pieds des normales cherchées. On pourrait aussi, en combinant convenablement les équations (8) et (5) arriver soit à une ellipse, soit à une hyperbole dont l'emploi serait le même que celui de la parabole précédente, dans la recherche des pieds des normales. Mais ces diverses courbes ne donnent pas la construction des normales aussi simplement que la courbe (8). Il est aussi bon de remarquer, quelle que soit la combinaison à laquelle on voudrait soumettre les équations (5) et (8), qu'on ne peut arriver à l'équation d'un cercle qui, par son intersection avec l'ellipse proposée, déterminerait les pieds des normales cherchées.

6. Lorsque le point (x,y) de l'ellipse est donné, en répresentant par k_0, l_0 les distances de l'origine aux points où la normale coupe les axes des x et de y, l'équation (8) fournit

$$k_0 = \frac{c^2x}{a^2}, \quad l_0 = -\frac{c^2y}{b^2}.$$

soient maintenant $\delta + d$ la distance du pied de la normale au point où elle coupe l'axe des y et δ et d les segments de cette distance, compris entre l'axe des x et le pied de la normale et les axes eux-mêmes ; on aura

$$(\delta + d)^2 = x^2 + (y - l_0)^2 = \frac{a^4y^2 + b^2x^2}{b^4},$$

$$\delta = (x - k_0)^2 + y^2 = \frac{a^4y^2 + b^2x^2}{a^4},$$

$$d^2=k_o{}^2+l_o{}^2=\frac{c^4(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^4}.$$

Par conséquent

$$(\delta+d)^2:\delta^2:d^2=\frac{1}{b^4}:\frac{1}{a^4}:\frac{c^4}{a^4b^4},$$

$$(\delta+d)^2:\delta^2:d^2=a^4:b^4:c^4;$$

ou bien

$$(\delta+d):\delta:d=a^2:b^2:c^2$$

Nous ferons le rapprochement de cette propriété avec la suivante.

7. On peut tracer l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ en assujétissant la droite a à s'appuyer constamment sur les axes de manière que le segment compris soit toujours égal à $a-b$. Cela étant, la sécante génératrice, dans ce dernier cas, ne coïncide pas avec la normale de l'ellipse : car, pour la coïncidence, il faudrait que le segment constant $a-b$ de celle-là fût égal au segment variable d, n° 6, de celle-ci. Donc, etc.

8. On donne le nom d'*enveloppe* à la courbe qui résulte des intersections consécutives d'une autre assujétie à varier d'une manière continue d'après une certaine loi. Telle est, par exemple, la courbe qui résulte des intersections des normales consécutives de l'ellipse : le nom de cette enveloppe prend aussi *développée de l'ellipse*.

$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ et $c^2xy=a^2ky-b^2lx$ étant les équations de l'ellipse et de la normale au point (x,y) : on aura la normale au point $(x+dx,y+dy)$ en différentiant l'équation de la normale. On a ainsi

$$(c^2x-a^2k)\frac{dy}{dx}=-(c^2y+b^2l)$$

$\frac{dy}{dx}$ étant la dérivée de l'ordonnée de l'ellipse. En remettant, pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur il vient

$$b^2(c^2x-a^2k)x=a^2y(c^2y+b^2l).$$

Dans cette dernière équation on peut substituer pour $c^2y+b\ l$ sa valeur $a^2ky:x$ tirée de l'équation $c^2xy=a^2ky-b^2lx$ et l'on aura

$$b^2(c^2x-a^2k)x^2=a^4ky^2.$$

Enfin, dans cette dernière, on peut substituer pour a^2y^2 sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse et il viendra

$$c^2x^3=a^4k. \qquad \ldots (9).$$

de la même manière on trouve

$$c\,y' = -b^2 l, \qquad \ldots (10)$$

En substituant, dans l'équation de l'ellipse, les valeurs de x et de y, qu'on vient de trouver, on aura

$$\sqrt[3]{a^2k^2} + \sqrt[3]{b^2l^2} = -\sqrt[3]{c^2}\,c \quad \ldots (11).$$

Telle est l'équation de l'enveloppe cherchée.

9. *Propriétés de la développée de l'ellipse.*

1° La développée a le même centre que l'ellipse : car l'équation (11) est satisfaite à la fois par (k,l) et $(-k,-l)$.

3° La développée est symétrique par rapport aux axes de l'ellipse. En effet l'équation (11) pour chaque valeur de k offre deux valeurs égales et de signe contraire à l; et réciproquement.

2° La développée de l'ellipse a toujours ses axes inégaux. En effet si, dans l'équation (11), on pose successivement $l=0$, $k=0$ et on représente les valeurs correspondantes des variables par k' et l', on aura

$$ak' = \pm c^2, \quad bl' = \pm c^2.$$

Si l'on avait $k'=l'$ on aurait $a=b$ et par suite $c=0$. Dans le cercle toutes les normales se coupent au centre et la développée du cercle est ce centre même.

4° Deux des quatre sommets de la développée sont toujours en dedans du grand axe de l'ellipse; les deux autres sont en dedans, aux extrémités ou en dehors des extrémités du plus petit des axes de l'ellipse. C'est ce qui résulte des expressions, précédemment trouvées de k' et de l'. La première donne $a:c=c:k'$. Or $a>c$: donc $c>k'$ et, à plus forte raison, $a>k'$. D'où il résulte que deux des quatre sommets de la développée sont toujours en dedans des foyers de l'ellipse. En décomposant l'expression en l' on trouve $b:c=c:l'$. Si $b>c$: on a $c>l'$ et par conséquent $b>l'$. Si $b=c$: on a $c=l'$ et par conséquent $b=c=l'$. Enfin si $b<c$: on a $c<l'$ et par conséquent $b<l'$. D'où il résulte que, dans les ellipses ayant $b=c$, la développée a deux de ses quatre sommets aux extrémités du plus petit des deux axes de l'ellipse; et, selon $b \gtrless c$ ou bien $a^2 \gtrless 2b^2$, ces sommets sont en dehors ou en dedans de l'ellipse.

5° Les axes de la développée étant inégaux on ne peut pas considérer cette courbe comme l'enveloppe des intersections consécutives d'une droite fixe dont les extrémités seraient assujéties à s'appuyer sur les axes. C'est précisément l'enveloppe formée par le segment $a-b$ de la sécante génératrice de l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, n° 7. On peut trouver l'équation de cette dernière enveloppe en procédant

comme au n° 7. Soient $(u,0)$, $(0,-v)$ deux points pris sur l'axe des x et des y et supposons qu'on ait $u^2+v^2=(a-b)^2=r^2$. Par les points $(u,0)$, $(0,-v)$ menons la droite : on aura pour l'équation de cette droite $uy=vx-uv$. Au point consécutif u et v deviendront $u+du$, $v+dv$: c'est ce qui revient à différentier les équations $u^2+v^2=r^2$ et $uv=vx-uy$ par rapport à u et v. On aura ainsi

$$udu+vdu=0 \text{ d'où} \frac{du}{dv}=-\frac{v}{u}$$

et

$$(v+y)\frac{du}{dv}=x-u \text{ ou bien } (v+y)v=-u(x-u).$$

Dans cette dernière équation on peut mettre pour $x-u$ sa valeur $\frac{uy}{v}$ tirée de l'équation $uy=vx-uv$ et l'on aura $(v+y)v^2=u^2y$.

Dans cette dernière on peut remplacer u^2 par sa valeur r^2-v^2 tirée de l'équation $u^2+v^2=r^2$ et l'on aura $v^3=-r^2y$. En procédant de la même manière on trouvera $u^3=r^2x$; de sorte qu'en tirant les valeurs de v et de u trouvées tantôt et en les substituant dans l'équation $u^2+v^2=r^2$, on aura

$$\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{r^2}=\sqrt[3]{(a-b)^2} \quad \ldots (12).$$

pour équation de l'enveloppe qui nous occupe. On peut à cette dernière enveloppe donner le nom de la développée équilatère, par analogie à la développée proprement dite de l'ellipse.

6° On peut se rendre compte de la forme, qu'affecte la développée de l'ellipse, en démontrant que le losange de ses sommets la comprend toute entière

Par les points $\left(\frac{c^2}{a},0\right)$ et $\left(0,\frac{c^2}{b}\right)$ fesons passer la droite dont l'équation sera par conséquent $bl'=-ak+c^2$. On tire de là $b^2l'^2=(c^2-ak)^2$ et l'équation (11) fournit $b^2l^2=(\sqrt[3]{c^4}-\sqrt[3]{a^2k^2})$. Cela posé nous allons démontrer que, pour la même abscisse k, $b^2l'^2$ est toujours plus grand que b^2l^2, savoir

$$(c^2-ak^2)>(\sqrt[3]{c^4}-\sqrt[3]{a^2k^2})^3.$$

Comme la plus grande valeur de k est donnée par l'équation $ak=c^2$ on peut, pour toutes les valeurs de k, comprises entre 0 et $\frac{c^2}{a}$, poser $ak=mc^2$, m étant une fraction comprise entre 0 et 1. L'inégalité précédente devient par là

$$(1-m)^2 > (1-\sqrt[3]{m^2})^3$$

En rendant le second membre plus grand, par la substitution de $m^3 < m^2$ à la place de m^3, l'inégalité subsiste encore : parce qu'on a $(1-m)^2 > (1-m)^3$ ou bien $1 > 1-m$. Donc, à plus forte raison $(1-m)^2 > (1-\sqrt[3]{m^2})^3$ et par conséquent $(c^2-ak)^2 > (\sqrt[3]{c^4} - \sqrt[3]{a^2k^2})^3$ ou bien $bl^2 > bl$.

La développée de l'ellipse étant entièrement comprise dans le losange de ses sommets il s'ensuit, à cause de sa symétrie, qu'elle est composée de quatre branches identiques tournant leur convexité, vers le centre et vers les axes. Les sommets de la développée de l'ellipse sont des points de rebroussement de première espèce. Les axes de la développée sont tangents aux branches qui se réunissent, deux à deux, aux sommets ou aux points de rebroussement.

7° Puisque la développée de l'ellipse résulte des intersections des normales consécutives à l'ellipse il s'ensuit que la normale à l'ellipse est tangente à la développée et réciproquement. Abaisser d'un point (k,l) une normale à l'ellipse c'est mener la tangente à la développée et réciproquement.

8° On peut faire disparaître les radicaux de l'équation (11). En effet si on élève les deux membres de cette équation au cube on a

$$a^2k^2 + b^2l^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2k^2l^2}(\sqrt[3]{a^2k} + \sqrt[3]{b^2l^2}) = c^4.$$

Or, la partie comprise entre les ( ) peut être, d'après l'équation (11), remplacée par $\sqrt[3]{c^4}$ de sorte qu'il ne restera qu'un seul radical cubique qu'on peut isoler et l'on aura

$$a^2k^2 = b^2l^2 - c^4 = -3\sqrt[3]{a^2b^2c^4k^2l^2} \quad \ldots (13).$$

En élevant les deux membres de cette dernière équation au cube on aurait l'équation de de la développée de l'ellipse dépourvue des radicaux. Cela posé on voit que la développée de l'ellipse est une courbe du sixième degré dans l'équation de laquelle n'entrent que des puissances paires des variables.

Il en est de même de la développée équilatère, ci-dessus 5°.

8° Si en un point de l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ on trace la tangente et la normale, et si de tous les points de cette dernière, comme centres, avec des distances normales respectives, comme rayons, on décrit divers cercles : tous ces cercles auront la tangente commune avec l'ellipse. Mais parmi ces cercles les uns seront en dedans les autres en dehors de l'ellipse ; de sorte que, parmi tous ces cercles, il y a nécessairement un dont la courbure approche le plus de celle de l'ellipse. Le centre d'un tel cercle sera évidemment sur l'intersection

des deux normales consécutives. Par conséquent les coordonnées de ce centre sont données par k et l, formules (9) et (10). Le centre ainsi déterminé est appelé *centre de courbure* et la distance normale de ce centre, *rayon de courbure*. Ainsi, la développée de l'ellipse est le lieu géométrique de tous les centres de courbure. En tirant des formules (9) et (10) les valeurs de k et l, on peut aisément en déduire celles de $x-k$ et de $y-l$, c'est-à-dire les valeurs des projections du rayon de courbure sur l'axe des x et des y. Par conséquent si on désigne par ρ le rayon de courbure et si on se rappelle que $\frac{a^2y}{b^2y}$ st la direction du rayon de courbure, on aura

$$\rho^2=(x-k)^2\left\{1+\frac{a^4y^2}{b^4x^2}\right\}.$$

En substituant, dans cette expression, pour k sa valeur donnée par la formule (9) et pour y sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse, on trouve

$$\rho^2=\frac{(a^4-c^2x^2)^3}{a^8b^2} \quad \ldots (14).$$

Corollaire. Puisque tous les cercles tangents à l'ellipse ont la tangente commune avec cette dernière courbe : il s'ensuit que tous ces cercles ont deux points consécutifs communs avec l'ellipse. Mais il faut observer que le cercle osculateur (cercle de courbure) est le seul qui ait trois points consécutifs communs avec l'ellipse. La raison en est qu'il faut trois points non en ligne droite pour déterminer un cercle.

Remarque. Le rapprochement que le lecteur pourra faire entre la méthode, avec laquelle je viens d'exposer les propriétés de la développée de l'ellipse et la méthode communément enseignée, dans les traités du calcul différentiel, ne fera que mieux ressortir l'utilité d'envisager une seule et même chose sous plusieurs points de vue différents.

10. Nous avons vu que les pieds d'une ou plusieurs normales, qu'on peut abaisser d'un point (k,l) sur l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, se trouvent sur l'intersection de cette courbe avec l'hyperbole $c^2xy=a^2ky-b^2lx$. Voici les propriétés de cette hyperbole en ayant égard à sa position par rapport à l'ellipse.

1°. Puisque $x=0$, $y=0$, ainsi que $x=k$, $y=l$ satisfont à la fois à l'équation $c^2xy=a^2ky=b^2lx$: il s'ensuit que le centre de l'ellipse et le point (k,l) sont deux points de cette hyperbole.

2° En résolvant l'équation (8) par rapport à y et x, on a

$$y=-\frac{b^2lx}{c^2x-a^2k},\quad x=\frac{a^2ky}{c^2y+b^2l}.$$

Puisque y et x deviennent ∞ pour $c^2x=a^2k$ et $c^2y=-b^2l$ il faut conclure que ces deux dernières donnent les assymptotes de l'hyperbole. Ces assymptotes étant parallèles aux axes de l'ellipse, il s'ensuit que l'hyperbole (8) est équilatère.

3°. En multipliant les valeurs de y et de x, tirées de l'équation (8), on trouve

$$(c^2x-a^2k)(c^2y+b^2l)=-a^2b^2kl$$

équation qui est la même que (8). Donc en posant

$$c^2x-a^2k=c^2x',\text{ ou bien }x=x'+\frac{a^2k}{c^2};$$

$$c^2y+b^2l=c^2y',\text{ ou bien }y=y'-\frac{b^2l}{c^2};$$

on ramènera l'équation (8) à la forme

$$c^2x'y'=-\frac{a^2k}{c^2}\cdot\frac{b^2l}{c^2}\quad\ldots\ (15).$$

4°. En fesant le tour de la périphérie de l'ellipse; si l'on convient de désigner par premier, second, troisième et quatrième, les angles des axes de la courbe: on déduira aisément de la propriété précédente que si le point (k,l) est dans le premier ; le centre de l'hyperbole est dans le quatrième angle des axes.

5° En convenant de même pour les angles des assymptotes, on conclura, par le signe—du second membre de l'équation (15), que les branches ne se trouvent que dans le second et le quatrième angle des assymptotes.

6° La branche de l'hyperbole, qui passe par le centre de l'ellipse, ne peut couper celle-ci qu'au premier et au troisième angle des axes. La seconde branche de l'hyperbole étant entièrement située dans le quatrième angle des axes, on voit qu'elle peut couper ou non l'ellipse ou lui être tangente. Cette disposition particulière de l'hyperbole (8) à l'égard de l'ellipse, fait voir que d'un point (k,l), on peut abaisser deux normales ou quatre, selon que l'hyperbole coupe l'ellipse en deux points ou en quatre. On peut n'avoir que trois normales, si l'une branches de l'hyperbole est tangente à l'ellipse.

Remarque. Après avoir tracé les assymptotes de l'hyperbole et se rappelant que le centre de l'ellipse et le point (k,l) se trouvent sur

cette hyperbole, on tracera autant de points qu'on voudra en se servant de la propriété que toute sécante de l'hyperbole, comprise entre les assymptotes, forme trois segments dont les deux extérieurs sont égaux.

10. Cherchons maintenant les équations au moyen desquelles on peut déterminer les coordonnées des pieds des normales. Pour cet effet combinons les équations $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ et $c^2xy=a^2ky-b^2lx$.

En éliminant y entre ces équations, on trouve

$$\left.\begin{array}{c} a^2b^2l^2x^2+(x^2-a^2)(c^2x-a^2k)^2=0\,; \\ \text{ou bien} \\ c^4x^4-2a^2c^2kx^3+a^2(a^2k^2+b^2l^2-c^4)x^2+2a^2c^2kx-a^6k^2=0 \end{array}\right\} (16).$$

En éliminant ensuite x entre les mêmes équations, on trouve

$$\left.\begin{array}{c} a^2b^2k^2y^2+(y^2-b^2)(c^2y+b^2l)^2=0\,; \\ \text{ou bien} \\ c^4y^4+2b^2c^2ly^3+b^2(a^2k^2+b^2l^2-c^4)y^2-2b^4c^2ly-b^6l^2=0 \end{array}\right\} (17).$$

Ces équations en x et y sont chacune du quatrième degré et présentent toujours le dernier terme négatif : donc, elles auront au moins deux racines réelles, de signes contraires. Quant aux deux autres, si elles sont réelles, il faut qu'elles soient de même signe ; si elles sont imaginaires, il faut que leur produit soit positif : car sans l'une ou l'autre de ces circonstances, le dernier terme des équations ci-dessus ne pourrait être négatif. Les deux dernières racines sont les seules qui de réelles inégales peuvent devenir égales et même imaginaires. Si les quatre racines sont réelles, en y comprenant même le cas des deux racines égales, l'une d'elles est négative et les trois autres positives.

Remarque. I. Si $l=0$, le point $(k,0)$ est situé sur l'axe des x. Dans ce cas, l'équation (16) donne

$$x=\pm a, \quad c^2x=a^2k.$$

On trouve les valeurs correspondantes y, soit en posant $l=0$ dans l'équation (17), soit en substituant les valeurs de x, trouvées tantôt, dans l'équation de l'ellipse : il vient ainsi

$$y=0,\ c^4y^2=b^2(c^4-a^2k^2).$$

Il y a par conséquent quatre points où les normales ménées du point $(k,0)$ peuvent aboutir. Deux de ces points appartiennent aux sommets de l'axe $2a$ de l'ellipse ; les deux autres sont réels. Pour que cette dernière circonstance puisse avoir lieu, il faut qu'on ait $c^2>a^2k^2$. Or, c'est évidemment la condition pour que le point $(k,0)$

demeure en dedans de l'axe correspondant de la développée, n° 9. Si l'on avait $ak = \pm c^2$, le point $(k,0)$ serait situé sur l'un des sommets de la développée : dans ce cas, il n'y a que deux normales possibles et elles aboutissent aux extrémités de l'axe correspondant de l'ellipse. Enfin si $c^4 < a^2k^2$, les valeurs de y seraient imaginaires : c'est le cas des points $(k,0)$, situés en dehors de la développée, quelpart sur l'axe des x de l'ellipse.

II. La même chose a lieu pour les points situés sur le second axe de la développée.

III. Les points des axes de la développée sont les seuls desquels on peut abaisser sur l'ellipse quatre normales, dont deux aboutissent aux extrémités de l'axe correspondant de l'ellipse et dont les deux autres sont symétriques par rapport à cet axe. Pour qu'il y eût d'autres normales symétriques il faudrait que les équations, ci-dessus (16) et (17), eussent des racines égales de signes contraires. Pour trouver de telles racines, il faut, comme on sait, égaler à zéro, les puissances paires et impaires de x et de y dans les équations (16) et (17). On retombe ainsi dans le cas déjà discuté des points situés sur les axes de la développée.

IV. Les équations, ci-dessus (16) et (17) ne peuvent être résolues par extraction de racine carrée : procédé qui consiste en ce qu'on ajoute aux deux membres, soit le carré d'un nombre, soit le carré d'un binome en x ou en y, de manière à rendre les deux membres carrés parfaits. Je renvoie, pour ce sujet, le lecteur au traité d'Algèbre de M. Noël, prof. ord. à Liége.

V. Les équations, ci-dessus (16) et (17), n'ont pas de racines réciproques.

VI. On peut assigner les limites des racines en x et y des équations (16) et (18) : car, la marche de l'hyperbole solutrice des normales et des assymptotes, indique assez nettement le lieu de ces racines. En désignant par x_4, x_3, x_2 et x_1 les racines en x de l'équation (16), et commençant par la plus petite négative, on voit que $-a$ et l'abscisse négative, où l'assymptote $c^2y = -b^2l$ coupe l'ellipse, sont les limites de x_4 ; que les limites de x_3 sont 0 et c^2k ; qu'enfin les limites extrêmes des deux autres racines, sont $c^2x = a^2k$ et l'abscisse positive où l'assymptote $c^2y = -b^2l$ coupe l'ellipse. Pour avoir la limite intermédiaire de ces deux dernières racines, il faut par le centre de l'hyperbole solutrice, mener une droite inclinée de 135° sur l'axe des x et cette droite, qui est l'axe réel de l'hyperbole en question, par son intersection avec l'ellipse, déterminera l'abscisse positive qu'on

peut prendre pour la limite intermédiaire des deux racines qui nous occuppent. Si la substitution de la limite tantôt trouvée, avec les limites extrêmes indiquées précédemment, ne donne pas des résultats de signes contraires ; on en concluera que l'équation (16) n'a que deux racines réelles.

VII. Enfin les équations (16) et (17) peuvent avoir des racines égales, comme nous le verrons, n° 12.

11. En réprésentant par n la direction de la normale, on a, n° 5

$$n=\frac{a^2y}{b^2x}=\frac{y-l}{x-k}. \qquad \ldots (18).$$

Au moyen de ces équations, on détermine x et y, valeurs qui étant substituées dans l'équation de l'ellipse, fourniront

$$\left.\begin{array}{l}(b^2n^2+a^2)(kn-l)=c^4n^2\,;\\ \text{ou bien}\\ b^2kn^4-2b^2kln^3+(a^2k^2+b^2l^2-c^4)n^2-2a^2kln+a^2l^2=0\end{array}\right\} (19).$$

Cette équation et les équations correspondantes en x et y du n° 10, ont pour facteur du troisième terme, le trinome $a^2k^2+b^2l^2-c^2$. Si l'on avait $a^2k^2+b^2l^2=c^4$, les termes n^3 et n de l'équation ci-dessus ayant toujours le même signe, il en résulterait, d'après la règle de signes de Descartes, au moins deux racines imaginaires pour n. Comme l'équation $a^2k^2+b^2l^2=c^4$ représente l'ellipse construite sur les axes de la développée, il s'ensuit que de tous les points de l'ellipse $a^2k^2+b^2l^2=c^4$, on ne peut abaisser sur $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ que deux normales. Il faut aussi conclure que, pour la même condition $a^2k^2+b^2l^2=c^4$, il y a deux racines imaginaires en x et y dans les équations du n° 10.

Quant aux signes des racines de n, on les déduira de la manière dont l'hyperbole $c^2xy=a^2ky-b^2lx$ se comporte avec l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Les coordonnées de rencontre de ces deux courbes ne pouvant présenter que cette suite de signes : $(-x,-y)$, $(x,y)(x,-y)$, $(x,-y)$, il suit de l'équation (18) que les quatre racines de n sont, deux à deux, de signes contraires. C'est d'ailleurs ce à quoi on pourrait parvenir par la règle de signes de Descartes.

Remarque. Nous n'avons pas jugé nécessaire d'entrer ici dans la discussion des valeurs de n, correspondantes aux cas de k ou $l=0$: car cette discussion a été faite, n° 11.

12. *Problème des trois normales.* Nous avons vu, n° 10, que d'un point (k,l) on ne pourra abaisser sur l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ que trois normales, lorsque l'hyperbole $c^2xy=a^2ky-b^2lx$ est tangente

à l'ellipse. Pour que cela ait lieu, il faut que $\frac{dy}{dx}$ ait la même valeur dans les deux courbes, savoir

$$-\frac{b^2x}{a^2y}=\frac{c^2y+b^2l}{a^2k-c^2x}.$$

En désignant par x,y les coordonnées courantes des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole, on aura pour les équations de ces deux droites,

$$y'-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(x'-x),$$

$$y'-y=\frac{c^2y+b^2l}{a^2k-c^2x}(x'-x).$$

En combinant ces équations avec les équations des courbes respectives, on amènera les premières aux formes suivantes

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2,$$

$$(a^2k-c^2x)y'-(c^2y+b^2l)x'=-c^2xy.$$

En égalant, dans ces deux équations, les valeurs de y' correspondantes à $x'=0$ et celles de x' correspondantes à $y'=0$, on fera coïncider les deux tangentes.

On trouve ainsi, tout calcul fait,

$$c^2x^3=a^4k,\ c^2y^3=-b^4l.$$

Comme le point (x,y) se trouve à la fois sur l'ellipse et sur l'hyperbole, en tirant les valeurs de x et de y et en les substituant dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$\sqrt[3]{a^2k^2}+\sqrt[3]{b^2l^2}=\sqrt[3]{c^4},$$

équation (11) de la développée de l'ellipse. Ainsi de tous les points de la développée de l'ellipse, on ne pourra abaisser sur cette dernière que trois normales, ou pour mieux dire quatre dont deux se confondent en une seule.

Remarque. I. Les sommets de la développée jouissent de la propriété particulière, que nous avons vue, n° 10.

II. Par suite de la forme particulière (13), à laquelle on peut amener l'équation de la développée, l'équation en x du n° 10 devient

$$c^4x^4-2a^2c^2kx^3-3a^2x\sqrt[3]{a^2b^2c^4k^2l^2}+2a^4c^2kx-a^6k^2=0. \quad (20).$$

On connaît deux racines égales $c^4x^3=a^4k$ de cette équation. Quant aux deux autres, on les trouvera en observant que le coëfficient du second terme de l'équation (20) est la somme des racines

prises en signes contraires et que le dernier terme est le produit de ces racines. De cette somme on retranchera le double de x, tiré de l'équation $c^2x^3=a^4k$, et l'on aura la somme des racines de l'équation (20), différentes de celles qu'on suppose égales. On trouve ainsi

$$\frac{2a(ak-c\sqrt[3]{ack})}{c^2}.$$

En divisant le produit des racines de l'équation (20) par le produit des racines égales, savoir

$$-a^6k^2:c^4 \text{ par } \sqrt[3]{(a^8k^2:c^4)},$$

on trouve

$$-\frac{a^3k}{c^2}\sqrt[3]{\frac{ak}{c^2}}.$$

Donc l'équation du second degré, qui donne deux racines inégales de l'équation (20), est

$$c^2x^2-2a(ak-c\sqrt[3]{ack})x-a^3k\sqrt[3]{\frac{ak}{c^3}}=0 \quad \ldots \quad (21),$$

En changeant k en $-l$ et a en b, on aura les valeurs correspondantes de y, savoir

$$c^2y^2-2b(bl-c^2\sqrt[3]{bcl})y-b^3l\sqrt[3]{\frac{bl}{c^2}}=0 \quad \ldots \quad (22).$$

13. Maintenant supposons que l'équation (16) soit partagée en deux autres du second degré, de manière que l'une d'elles contienne les racines réelles de signes contraires, qui ont toujours lieu, et dont l'autre contienne les racines susceptibles de devenir égales et même imaginaires : on pourra ainsi traiter chaque équation à part. Or, dans l'équation du second degré, susceptible d'avoir des racines égales, la condition d'égalité sépare la réalité de l'imaginarité des racines : donc, la développée de l'ellipse jouit de la propriété de séparer la réalité de l'imaginarité des deux entre quatre racines, susceptibles de devenir égales dans l'équation (16). Nous avons vu n° 11, que de tous les points de l'ellipse construite sur les axes de la développée, on ne peut abaisser sur l'ellipse proposée que deux normales : donc, de tous les points extérieurs à la développée, on ne peut abaisser sur l'ellipse que deux normales.

C'est ainsi qu'on peut démontrer que les propositions avancées dans le n° 2, sont vraies.

Nous verrons bientôt une démonstration plus complète de ces propositions.

14. Voyons maintenant ce qui arrive lorsque d'un point de

l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, on veut *abaisser* une normale à cette courbe.

Si le point (k,l) est sur l'ellipse, on aura à combiner les équations suivantes

$$a^2l^2+b^2k^2=a^2b^2, c^2xy=a^2ky-b^2lx.$$

En éliminant l, on trouve

$$a^2y^2(c^2x-a^2k)^2+b^6k^2x^2=a^2b^6x^2.$$

Or, cette équation est satisfaite par $k=x$. Donc, en l'ordonnant par rapport à k, on peut la diviser par $k-x$ et abaisser le degré de l'équation d'une unité. Après avoir effectué le calcul, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}(a^6-a^4x^2+b^4x^2)k-a^4(a^2-2b^2)x-c^4x^2\end{array}\right\}\ (k-x)=0 \quad \ldots \quad (23).$$

$k-x$ étant le facteur dont on a dégagé l'équation. On peut faire deux hypothèses sur le facteur $k-x$, savoir : $k=x$ ou non. Si $k=x$, on a nécessairement $k=x, l=y$; de sorte qu'il ne s'agit d'autre chose ici que d'élever la normale à l'ellipse au point désigné. Dans ce cas, le second facteur de l'équation (23) donne l'abscisse k de l'extrémité de la corde normale. Mais si k n'est pas égal à x, il faut qu'on ait

$$(a^6-a^4x^2+b^4x^2)k-a^4(a^2-2b^2)x-c^4x^2=0 \quad \ldots \quad (24).$$

Dans ce cas, on donne sur l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, un point correspondant à l'abscisse k, et l'on se propose d'abaisser une ou plusieurs normales sur la courbe elle-même. L'équation du troisième degré en x, ci-dessus (24), donne les pieds des normales cherchées. Comme cette équation est du troisième degré, elle peut avoir trois racines réelles, dont deux inégales ou égales, ou bien une seule racine réelle. Le premier de ces trois cas a lieu pour les points de l'ellipse interceptés par la développée ; le second, pour les points d'intersection de l'ellipse et de la développée ; le troisième, pour tous les points de l'ellipse en dehors de la développée et en général pour tous les points de l'ellipse, lorsque cette courbe n'est pas coupée par sa développée. Lorsqu'il n'y a pas d'intersection possible de l'ellipse avec sa développée, on ne peut abaisser, dans le sens absolu de ce mot, qu'une seule normale de chaque point de l'ellipse sur elle-même ; mais on peut en ce point, lui élever une normale : c'est ce qui donne deux racines réelles, toujours possibles, dans les équations (16) et (17), du n° 10.

Exemple. Posons, dans l'équation (24), $k=0$: hypothèse qui fait

placer le point au sommet du plus petit axe de l'ellipse. L'équation (24) devient par suite de cette hypothèse

$$x(a^2(a^2-2b^2)-c^2x^2)=0$$

ou bien

$$x=0, c^2x=\pm a^2\sqrt{(a^2-2b^2)}$$

La première de ces solutions est facile à expliquer. Quant aux deux autres : elles ne sont d'abord réelles que lorsque $a^2>2b^2$ ou $b<c$. Supposons que cette circonstance ait lieu : il reste encore à prouver que la valeur de y correspondante à celle ci-dessus de x est possible.

On trouve, tout calcul fait,

$$y=\frac{b^2}{c^2}.$$

Et il est aisé de vérifier cette dernière expression.

On suppose $b<c$: donc $b^2<c^2$ et par suite

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{b^2}{c^2}\cdot b<b.$$

Remarque. On parvient au même résultat en posant $k=0$ et $l=-b$ dans l'équation (17).

15. *Scholie.* En résumant les considérations des n^os^ 10, 11, 12, 13 et 14, on arrivera à des propositions que nous avons énumérées dans le n° 2.

16. Voyons maintenant la manière la plus simple de résoudre les équations (16), (17) et (19).

On sait que $a^2qy+b^2px=a^2b^2$ représente la tangente au point (x,y) de l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, p et q étant les coordonnées courantes de la tangente et par conséquent extérieures à l'ellipse. Mais si l'on donne les valeurs de p et de q ; x et y deviendront variables à leur tour, dans l'équation $a^2qy+b^2px=a^2b^2$. Comme on peut mener deux tangentes à l'ellipse, l'équation $a^2qy+b^2px=a^2b^2$ sera satisfaite par les coordonnées des deux points de contact et ne représentera par conséquent ni l'une ni l'autre des deux tangentes, mais bien la sécante qui joint les deux points de contact.

Cela posé, cherchons une sécante, telle que $a^2qy+b^2px=a^2b^2$, qui passe par les points d'intersection de l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ et de l'hyperbole $c^2xy=a^2ky-b^2lx$. En éliminant, tour à tour, y et x entre les équations de la sécante et chacune des deux courbes, on arrivera à ces quatre équations

$$(a^2q^2+b^2p^2)x^2-2a^2b^2px+a^4(b^2-q^2)=0, \quad (25)$$
$$(a^2q^2+b^2p^2)y^2-2a^2b^2qy+b^4(a^2-p^2)=0, \quad (26)$$
$$c^2px^2-(a^2kp+ql+c^2)x+a^4k=0, \quad (27)$$
$$c^2qy^2-b^2(c^2-kp-lq)y-b^4l=0. \quad (28).$$

Ces équations étant identiques, on peut égaler la demi somme et le produit des racines en x et y : l'on aura

$$x_1=\frac{a^2b^2p}{a^2q^2+b^2p^2}=\frac{a^2(kp+lq+c^2)}{2c^2p} \quad \dots (29).$$

$$y_1=\frac{a^2b^2q}{a^2q^2+b^2p^2}=\frac{b^2(c^2-kp-lq)}{2c^2q} \quad \dots (30).$$

$$\frac{b^2-q^2}{a^2q^2+b^2p^2}=\frac{k}{c^2p} \quad \dots (31).$$

$$\frac{a^2-p^2}{a^2q^2+b^2p^2}=-\frac{l}{c^2q} \quad \dots (32).$$

x_1 et y_1 étant la demi-somme des racines en x et y.

En multipliant les équations en x_1 et y_1 par p et q, divisant par a^2 et b^2 et ajoutant, on retrouve l'équation de la sécante $a^2qy_1+b^2px_1=a^2b^2$. Donc il suffit, pour déterminer p et q, de n'employer que les équations (31) et (32). En les divisant d'abord, membre à membre, on trouve

$$\frac{b^2-q^2}{a^2-p^2}=-\frac{kq}{lp} \quad \dots (33).$$

ou bien

$$kq^2p^2-c^2(b^2-q^2)p-kqa^2=0 \quad \dots (34).$$

On peut combiner cette dernière équation avec celle en (32), savoir

$$b^2kp^2-c^2(b^2-q^2)p-a^2kq^2=0 \quad \dots (35).$$

En éliminant le dernier puis le premier terme, entre les dernières équations, on trouve

$$k(b^2+q^2)\cdot p=(c^2+lq)(b^2-q^2) \quad \dots (36).$$
$$(c^2q-b^2l)(b^2-q^2)\cdot p=a^2kq(b^2+q^2) \quad \dots (37).$$

En divisant, membre à membre, ces deux dernières équations, il vient

$$(c^2+lq)(c^2q-b^2l)(b^2-q^2)^2=a^2k^2q^2(b^2+q^2)^2$$

ou bien

$$c^2lq^6-(a^2k^2+b^2l^2-c^4)q^5-3b^4c^2lq^4-2b\,(a^2k^2-b^2l^2+c^4)q^3+$$
$$+3b^4c^2lq^2-b^4(a^2k^2+b^2l^2-c^4)q-b^6c^2l=0 \quad \ldots (38).$$

Cette équation donne six valeurs pour q; et l'équation (36) ou (37) six valeurs correspondantes pour p. Il y a donc six points (p, q), par lesquels on peut mener, deux à deux, douze tangentes qui passent par les points d'intersection de l'ellipse proposée et de l'hyperbole solutrice des normales. Mais ces douze tangentes n'en font que quatre distinctes passant par les pieds des quatre normales de l'ellipse. Les six points (p,q), qu'on vient de trouver, sont les points d'intersection des quatre tangentes, deux à deux. En substituant les six valeurs de p et q dans l'équation de la sécante $a^2qy+b^2px=a^2b^2$, on aura les équations des côtés du quadrilatère passant par les pieds des normales, ainsi que les équations des diagonales de ce quadrilatère.

Remarque. I. Nous verrons, dans le n° suivant, comment en combinant les équations (34) et (36), on peut résoudre l'équation (38) du sixième degré en q.

II. En résolvant l'équation (25) ou (26), on trouve sous le radical le trinome $a^2q^2+q^2p^2-a^2b^2$. D'où il résulte que la sécante $a^2qy+b^2px=a^2b^2$ ne peut couper l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ que lorsque $a^2q^2+b^2p^2>a^2b^2$, c'est-à-dire lorsque le point (p,q) est extérieur à l'ellipse.

III. En posant $y=0$, dans l'équation $a^2qy+b^2px=a^2b^2$, et en représentant la valeur correspondante de x par x_0, on trouve $px_0=a^2$; x_0 est l'abscisse du point où la sécante $a^2qy+b^2px=a^2b^2$ coupe l'axe des x. Comme cette expression de x_0 est indépendante de b, il s'ensuit que si l'on construit la droite $p=a^2:x_0$, les tangentes, deux à deux, menées de tous les points de cette dernière, jouissent de la propriété d'avoir leurs points de contact avec l'ellipse sur diverses sécantes qui se coupent en un même point de l'axe des x, correspondant à l'abscisse x_0. On a donné le nom de *pôle* à ce point et celui de *droite polaire* à $p=a^2:x_0$. Il y a également des pôles sur l'axe des y et des polaires perpendiculaires à cet axe. Consultez à ce sujet le Mémoire de M. Lecointe sur *la polaire*, inséré dans les Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége.

16. Si on cherche la droite $y=nx+h$ qui coupe aux mêmes points l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ et l'hyperbole $c^2xy=a^2ky-b^2lx$, on trouve, en procédant absolument de la même manière que dans le n° précédent,

$$(a^2n^2+b^2)x^2+2a^2nh\cdot x+a^2(h^2-b^2)=0 \qquad (39).$$

$$(a^2n^2+b^2)y^2-2b^2hy+b^2(h^2-a^2n^2)=0 \qquad (40).$$

$$c^2nx^2+(b^2l-a^2kn+c^2h)x-a^2kh=0 \qquad (41).$$

$$cy^2+(bl-akn+ch)y-b^2lh=0 \qquad (42).$$

En égalant la demi-somme et le produit des racines en x et y, on trouve

$$x_1=\frac{a^2nh}{a^2n^2+b^2}=\frac{b^2l-a^2nk+c^2h}{2c^2n} \qquad (43).$$

$$y_1=-\frac{b^2h}{a^2n^2+b^2}=\frac{b^2l-a^2kn-c^2h}{2c^2} \qquad (44).$$

$$\frac{h^2-b^2}{a^2n^2+b^2}=-\frac{kh}{c^2n} \qquad (45).$$

$$\frac{h^2-a^2n^2}{a^2n^2+b^2}=-\frac{hl}{c^2} \qquad (46).$$

Les deux dernières équations donnent

$$c^2nh^2+k(a^2n^2+b^2)h-b^2c^2n=0 \qquad (47).$$

$$ch^2+l(a^2n^2+b^2)h-a^2c^2n=0. \qquad (48).$$

En éliminant le dernier puis le premier terme, dans ces équations en h, on trouve

$$\left.\begin{aligned} c^2(a^2n^2-b^2)h&=-(c^2kn-b^2l)(a^2n^2+b^2),\\ (k-ln)(a^2n^2+b^2)h&=-c^2n(a^2n^2-b^2).\end{aligned}\right\} \qquad (49).$$

Donc, en divisant membre à membre, on aura

$$c^2n(a^2n^2-b^2)^2=(k-ln)(a^2kn-b^2l)(a^2n^2+b^2)^2 \quad \ldots (50).$$

équation du sixième degré en n. Au moyen de cette équation, on détermine les directions de côtés du quadrilatère passant par les pieds de quatre normales, et les directions des diagonales de ce quadrilatère.

Remarque. I. Si on résout l'équation ci-dessus (39), par rapport à x, on trouve $a^2n^2+b^2-h^2$ sous le radical. Selon que $a^2n^2+b^2 \gtrless h^2$, la droite coupe ou ne coupe pas l'ellipse. Si $a^2n^2+b^2=h^2$, la droite $y=nx+h$ est tangente à l'ellipse.

II. En posant $an+b=h$, dans les équations (45) et (46), on trouve aisément

$$a^2ln=b^2k, \qquad lh=-b^2c^2.$$

C'est le cas du problème des trois normales, n° 12.

17. Nous avons vu, n° précédent, que la droite $y=nx+h$ est tangente à l'ellipse lorsqu'on a $a^2n^2+b^2=h^2$. Supposons maintenant qu'un point (p,q) se trouve sur la tangente, on aura

$$q=np+h \text{ et } a^2n^2+b^2=h^2.$$

En éliminant h entre ces équations, il vient

$$a^2n^2+b^2=(q-np)^2.$$

Si on remplace n par $-\frac{1}{n}$, on aura

ou bien
$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2n^2&=(qn+p)^2,\\ (q^2-b^2)n^2+2pqn+(p^2-a^2)&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (51).$$

Cette équation donne les directions des deux normales correspondantes au point (p,q). Or les directions de quatre normales à l'ellipse sont données par l'équation (19), savoir

$$(a^2+b^2n^2)(kn-l)^2=c^4n^2.$$

Donc en combinant cette équation avec la précédente, on aura

$$(qn+p)^2(kn-l)^2=c^4n^2$$

ou bien

$$(qn+p)(kn-l)=c^2n. \qquad (52).$$

Cette équation est du second degré en n. Mais en plaçant le signe $\pm$ devant le second membre, comme on a dû le faire, on a deux équations du second degré en n et par conséquent quatre directions. Nous préférons le signe $+$ devant le second membre de l'équation (52), pour des raisons qui suivent. En supposant que les équations (52) et (51) soient identiques, on pourrait égaler les coëfficients de mêmes puissances de n et l'on aurait

$$\frac{p^2-a^2}{q^2-b^2}=-\frac{lp}{kq},$$

$$\frac{2pq}{q^2-b^2}=-\frac{kp-lq-c^2}{kq}.$$

Or ces équations sont les mêmes que (34) et (36).

Donc, pour l'identité des équations (52) et (51), il faut préférer le signe $+$ devant le second membre de la première d'entre elles. Cela posé, on peut écrire

$$\frac{k(p^2-a^2)}{p}\cdot\frac{q}{l(q^2-b^2)}+1=0$$

et poser

$$\frac{k(p^2-a^2)}{p}=t, \quad \frac{l(q^2-b^2)}{q}=-t$$

de sorte qu'on aura

$$kp^2-tp-ka^2=0, \quad \ldots (53).$$
$$lq^2+tq-lb^2=0. \quad \ldots (54).$$
$$2klpq=t(c^2-kp+lq), \quad \ldots (55).$$

pour déterminer p, q et t. En tirant la valeur de q de la dernière et substituant cette valeur dans la seconde des trois équations, il vient

$$lt^2(c^2-kp)^2+t^2(c^2-kp)l(2kp-t)-b^2l^2(2kp-t)^2=0,$$

ou bien

$$t^2(c^2-kp)(c^2+kp-t)-b^2l^2(2kp-t)^2=0,$$
$$t^2(c^4-k^2p^2-t(c^2-kp))-b^2l^2(4k^2p^2-4kpt+t^2)=0,$$
$$t^2(c^4-tc^2-k(kp^2-tp))-b^2l^2(4k(kp^2-pt)+t^2)=0.$$

Or, l'équation (53) donne $kp^2-tp=ka^2$; substituant on aura

$$t^2(c^4-tc^2-ka^2)-b^2l^2(4k^2a^2+t^2)=0,$$

ou bien

$$c^2t^3+(ak^2+b^2l^2-c^4)t^2+4a^2b^2k^2l^2=0.$$

En remplaçant, dans cette dernière équation, ainsi que dans celles données ci-dessus, sous les marques (53) et (54), t par t^{-1}, on aura

$$kt\cdot p^2-p-kta^2=0 \quad \ldots (56).$$
$$lt\cdot q^2+q-ltb^2=0 \quad \ldots (57).$$
$$4a^2b^2k^2l^2\cdot t^3+(a^2k^2+b^2l^2-c^4)t+c^4=0 \quad \ldots (58).$$

équations qui servent très commodément à résoudre l'équation (38) du sixième degré en q.

18. *Scholie.* Ainsi lorsque d'un point (k,l), on veut abaisser toutes les normales possibles sur l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, on a, pour calculer les coordonnées des pieds des normales, les équations (16) et (17), et pour calculer les directions des normales l'équation (19).

Ces équations complètes du quatrième degré ne se prêtent pas facilement au calcul. Mais on peut d'abord chercher les points d'intersection des tangentes correspondantes, à l'aide des équations (56), (57) et (58). Au moyen de ces trois dernières équations, on peut facilement trouver la position de l'une de six sécantes qui passent par les pieds des normales.

Remarque I. Le problème des normales à l'ellipse, amené à la résolution des équations (56), (57) et (58), se laisse facilement discuter.

D'abord on voit que l'équation (58), dépourvue du second terme, ne peut se trouver que dans l'un des trois cas suivants : 1° ou elle aura trois racines réelles inégales ; 2° ou trois racines réelles dont deux égales ; 3° ou bien une seule racine réelle. Pour faciliter la discussion, mettons l'équation (58) sous la forme

$$t^3+3ut+2v=0.$$

Cela posé, l'une des racines de t sera

$$t=\sqrt[3]{-v+\sqrt{v^2+u^3}}+\sqrt[3]{-v-\sqrt{v^2+u^3}}$$

Si u est >0, t n'a qu'une racine réelle. Par conséquent on n'aura que deux valeurs réelles de p et autant de valeurs correspondantes de q. De ces deux points (p,q), on ne pourra mener que quatre tangentes à l'ellipse ; ou bien on n'aura que deux sécantes $a^2qy+b^2px=a^2b^2$ possibles. C'est le cas, dans lequel on ne peut abaisser sur l'ellipse que deux normales. On voit que cette circonstance dépend, dans l'équation en t, de $u>0$. Donc, dans l'équation (58), il faut qu'on ait $a^2k+b^2l^2\overset{=}{>}c^4$. Ainsi de tous les points de l'ellipse, construite sur les axes de la développée, et de tous les points extérieurs à cette ellipse, on ne pourra abaisser sur l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ que deux normales.

Pour que t ait toutes les racines réelles, il faut que, u étant négatif, on ait $u^3\overset{=}{>}v^2$. Ainsi, l'équation en t étant de la forme

$$t^3-3ut+2u=0, \qquad (59).$$

on aura, pour l'une de ses racines

$$t=\sqrt[3]{-v+\sqrt{v^2-u^3}}+\sqrt[3]{-v+\sqrt{v^2-u^3}}. \quad \ldots \quad (60).$$

En comparant cette dernière équation avec (58), et c'est ce qui se fait en posant

$$u=-\frac{a^2k^2+b^2l^2-c^4}{4a^2b^2k^2l^2}, v=\frac{c^2}{4a^2b^2k^2l^2},$$

on déduit aisément que l'équation (58) ne peut avoir toutes les racines réelles que lorsque

$$a^2k^2+b^2l-c^4\overset{=}{>}-3\sqrt[3]{a^2b^2k^2l^2}$$

Dans le cas du signe $=$ on a l'équation (13) de la développée; dans celui du signe $<$ le point (k,l) est assujétie à se trouver en dedans de la développée.

Supposons que t ait deux de ses trois racines égales. Comme t n'a à proprement dire que deux valeurs différentes ; p et q n'en auront chacune que quatre différentes. C'est le cas du problème des trois normales, n° 12. Le point (k,l) se trouve sur la développée. Les trois couples des valeurs de p et q correspondent aux trois sommets du triangle circonscrit à l'ellipse ; et le quatrième au point où se réunissent les pieds des deux normales.

Enfin, si t a trois racines réelles inégales; p et q en auront six. Le point (k,l) sera en dedans de la développée et on aura quatre normales à abaisser sur l'ellipse.

Remarque II. Nous n'avons parlé, dans l'équation (59), que de l'une des trois racines réelles, que nous avons mise sous la forme (60). Dans ce cas, toutes les racines sont compliquées des expressions imaginaires, dont on les dégage comme il suit. Mettons d'abord l'équation (60) sous la forme

$$t=\sqrt[3]{-v+\sqrt{-1}\cdot\sqrt{u^3-v^2}}+\sqrt[3]{-v-\sqrt{-1}\sqrt{u^3-v^2}}$$

Cela étant, il est permis de poser

$$-v=r\cos\vartheta,\quad \sqrt{u^3-v^2}=r\sin\vartheta;$$

de sorte qu'on aura

$$r^2=u^3,\quad \operatorname{tang}\vartheta=-\frac{\sqrt{u^3-v^2}}{v}.$$

Après avoir ainsi déterminé r et ϑ, on aura

$$t=\sqrt[3]{r\cos\vartheta+\sqrt{-1}\cdot r\sin\vartheta}+\sqrt[3]{r\cos\vartheta-\sqrt{-1}\cdot r\sin\vartheta}:$$

Donc, d'après le théorème de Moivre, il vient

$$t=2\sqrt[3]{r}\cdot\cos\tfrac{1}{3}\vartheta.$$

Les deux autres racines se trouvent par la considération que $\cos\vartheta=\cos(2\pi+\vartheta)=\cos(4\pi+\vartheta)=\ldots$

Donc, les deux autres racines de t seront

$$t=2\sqrt[3]{r}\cdot\cos\tfrac{1}{3}(2\pi+\vartheta)\quad 2\sqrt[3]{r}\cdot\cos\tfrac{1}{3}(4\pi+\vartheta).$$

Dans le cas des deux racines égales, $\vartheta=0$. L'une des racines est

$$t=2\sqrt[3]{r}.$$

Les deux autres égales deviennent

$$t=2\sqrt[3]{r}\cdot\cos 120^\circ=-\sqrt[3]{r}.$$

19. Les équations (56), (57) et (58) peuvent servir à déterminer

le lieu géométrique des intersections des tangentes lorsque celui des normales correspondantes est donné et réciproquement.

1° Décrire la courbe sur laquelle se trouvent les intersections des tangentes lorsque celles des normales correspondantes appartiennent à la développée.

On a pour cet effet

$$k=\frac{p}{t(p^2-a)^2},\quad l=\frac{q}{t(q^2-b^2)},$$

$$a^2b^2k^2l^2t^2=-c^2,$$

$$\text{et } \sqrt[3]{a^2k^2}+\sqrt[3]{b^2l^2}=\sqrt[3]{c^4}.$$

Les deux premières de ces équations ne sont autre chose que (56) et (57); la troisième donne l'une des racines, lorsqu'on suppose qu'elle en ait deux égales; la quatrième exprime la condition que le point (k,l) se trouve sur la développée. En substituant les valeurs de k et l dans les deux dernières équations, on trouve

$$t^2=\frac{c^2}{a^2b^2}\cdot\frac{(p^2-a^2)(q^2-b^2)}{pq}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^2p^2}{(p^2-a^2)^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2q^2}{(q^2-b^2)^2}}=\sqrt[3]{c^4t^2}$$

En éliminant t^2 entre ces deux dernières, on trouve

$$\sqrt[3]{a^2b^2pq}\left(\sqrt[3]{a^2p^2}+\sqrt[3]{b^2q^2}\right)=c^2(p^2-a^2)(q^2-b^2) \quad \ldots (61),$$

2° Lorsque le point (k,l) se trouve sur l'ellipse $a^2k^2+b^2l^2=c^4$, un peu d'attention suffit pour faire voir que, pour calculer le lieu des intersections des tangentes correspondantes, il faut remplacer dans l'équation (61) c^2 par $c^2:4$.

3°. Trouver la courbe des intersections des tangentes à l'ellipse, assujéties à comprendre entre elles un angle constant.

On a, n° 17

$$a^2n^2+b^2=(p-qn)^2$$

pour exprimer qu'un point (p,q) est assujéti à se trouver sur une tangente à l'ellipse, dont la direction est n. En ordonnant cette équation par rapport à n, on a

$$(q^2-a^2)n^2-2pqn+p^2-b^2=0$$

Désignons par n' et n'' les deux racines de n, nous aurons

$$n'n''=\frac{p^2-b^2}{q^2-a^2},\quad (q^2-a^2)(n'-n'')=2\sqrt{a^2q^2+b^2p^2-a^2b^2}.$$

Soit maintenant s la tangente trigonométrique de l'angle compris par les deux tangentes, savoir

$$s=\frac{n'-n''}{1+n'n''}.$$

Cela posé, le lieu cherché sera exprimé par l'équation

$$s=\frac{2\sqrt{a^2q^2+b^2p^2-a^2b^2}}{p^2+q^2-a^2-b^2}.$$

Si $s=\infty$, ce qui suppose que les tangentes se coupent à angle droit, on a

$$p^2+q^2=a^2+b^2,$$

pour l'équation de la courbe cherchée.

4°. Trouver la courbe des intersections des normales, lorsque les tangentes correspondantes sont assujéties à se couper à angle droit.

L'équation (51) donne pour le produit des directions des deux normales correspondant au point extérieur (p,q)

$$n'n''=\frac{p^2-a^2}{q^2-b^2};$$

et plus loin dans le même numéro, on a

$$\frac{p^2-a^2}{b^2-b^2}=-\frac{lp}{kq}.$$

Or, par la propriété précédente, ci-dessus 3°, on a $p^2-a^2=-q^2+b^2$; donc $lp=kq$, ou bien

$$k:l=p:q.$$

D'où il résulte que les points de concours des tangentes rectangulaires et des normales correspondantes se trouvent sur une droite passant par le centre de l'ellipse ; de plus que le lieu des intersections des normales est une courbe semblable à celle des intersections des tangentes correspondantes. Donc, les points de concours des normales décrivent un cercle. Pour en déterminer le rayon, on a, n° 6, $a^2k_0=c^2x$. Si dans l'équation $a^2qy+b^2px=a^2b^2$, qui est celle de la tangente au point (x,y) de l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, on pose $q=0$, on aura $p_0x=a^2$. En éliminant x entre cette dernière équation et $a^2k_0=c^2x$ on a $k_0p_0=c^2$. Or p_0 se trouve en posant $q=0$ dans l'équation $p^2+q^2=a^2+b^2$: donc $k\sqrt{a^2+b^2}=c^2$. La valeur de k_0, qu'on vient de trouver, est le rayon de la circonférence décrite

par les points de concours des normales correspondantes aux tangentes rectangulaires. Ainsi, l'équation de la courbe cherchée est

$$k^2+l^2=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

De la construction des normales dans la parabole.

20. Soit $y=2ax$ l'équation de la parabole. En procédant comme dans le n° 5, on trouve

$$l-y=-\frac{y}{a}(k-x);$$

ou bien

$$xy-(k-a)y=al,$$

pour équation de la droite assujétie à passer par le point (k,l) et à être normale au point (x,y) de la parabole. D'où il résulte que si du point (k,l) on veut abaisser une ou plusieurs normales sur la parabole, il faut tracer l'hyperbole $xy-(k-a)y=al$; et les pieds der normales cherchées se trouveront sur l'intersection des deux courbes. La simple mise de x' à la place de $x-k+a$ amène l'équation de l'hyperbole solutrice à la forme $x'y=al$. Donc cette hyperbole a l'axe de la parabole pour l'une de ses assymptotes. Le centre de l'hyperbole est facile à trouver, parce que la transformation $x-k+a=x'$ indique que le centre en question est, à partir de l'origine, le point correspondant à l'abscisse $k-a$. Supposons que ce centre soit situé quelque part sur l'axe et intérieur à la parabole. Par ce point menons la perpendiculaire à l'axe de celle-ci : et nous aurons les assymptotes de l'hyperbole solutrice. Si dans les angles opposés des assymptotes, on trace les deux branches d'une hyperbole, il est aisé de voir qu'elles ne pourront couper la parabole qu'en trois points au plus. Il se peut encore que l'une des branches de l'hyperbole devienne tangente à la parabole ou bien soit entièrement en dehors de cette dernière courbe. D'où il résulte que d'un point (k,l) on ne pourra abaisser sur la parabole que trois normales au plus, deux ou bien une. Toutes ces considérations s'interprèteront facilement au moyen de la seule équation qui donne les ordonnées des pieds des normales.

21. Eliminons x entre $y^2=2ax$ et $xy-(k-a)y=al$; nous aurons

$$y^3-2a(k-a)y=2a^2l.$$

Cette équation donne les pieds des normales cherchées. Comme elle est du troisième degré, dépourvue du second terme, elle ne pourra se trouver que dans l'un des trois cas suivants : ou 1° elle aura trois racines réelles inégales; ou 2° elle aura trois racines réelles, dont deux égales; ou 3° elle aura seulement une racine réelle. Ce dernier cas a toujours lieu pour $k<a$. Les trois racines réelles ne paraissent que lorsque $k>a$. Mais cette circonstance seule ne suffit pas : il faut encore qu'on ait

$$\left(\frac{2a(k-a)}{3}\right)^3 \geqq \left(\frac{2a^2l}{2}\right)^2$$

ou bien

$$8(k-a)^3 \geqq 27al^2.$$

Le signe $=$ a lieu lorsque des trois racines de y deux sont égales, et le signe $>$ lorsque les trois racines de y sont réelles et inégales.

22. En procédant comme dans le n° (8) on trouvera que la développée de la parabole, a pour équation

$$8(k-a)^3=27al^2.$$

Cela posé, il sera aisé de démontrer que cette courbe commence par un point de rebroussement, situé sur l'axe des x, à la distance $k=a$ de l'origine; qu'au delà elle présente deux branches symétriques tournant leur convexité vers l'axe des x. Pour trouver les points où cette courbe coupe la parabole il faut combiner l'équation précédente avec $k^2=2ak$; de sorte qu'en éliminant l^2, on trouve

$$4(k-a)^3=27a^2k,$$

équation du 3e degré en k, n'ayant qu'une racine réelle. Il est aisé de démontrer cette circonstance en posant $k-a=k'$. La seule racine réelle en k, dont nous venons de parler, est l'abscisse correspondante aux deux points symétriques où la développée la coupe. Ainsi la développée de la développée de la parabole, en commençant d'abord par être comprise, finit par couper et comprendre cette dernière.

Cela posé, il résulte des considérations du n° précédent, que selon que le point (k,l) est en dehors sur la développée, ou bien en dedans de cette dernière, on peut abaisser sur la parabole une, deux ou trois normales

Si le point $(k,0)$ est sur l'axe des x, tant qu'on a $k \leqq a$, on ne peut

abaisser qu'une normale : elle aboutit au sommet de la parabole. Pour $k>a$, on a trois normales; l'une d'elles aboutit au sommet de la parabole; les deux autres sont symétriques par rapport à l'axe des x.

Toutes ces considérations sont très faciles à démontrer : aussi nous ne nous y arrêterons pas.

Voyez, pour ce qui regarde le rapprochement de ces propriétés avec les propriétés correspondantes de l'ellipse, l'énoncé qui en a été donné, n° 2.

23. Voyons encore ce qui en arrive lorsque, d'un point pris sur la parabole, il s'agit d'abaisser une normale sur la courbe elle-même.

On aura, comme dans le n° 14, les équations suivantes, à combiner :

$$l^2=2ak,xy-(k-a)y=al.$$

En éliminant k, on trouve

$$(2ax-l^2)y+2a(y-l)=0.$$

Or $2ax=y^2$: donc l'équation précédente devient

$$(y^2+ly+2a^2)(y-l)=0.$$

Si $y=l$, on a $x=k$, $y=l$. Dans ce cas, au point (k,l) de la parabole, on peut élever une normale à cette courbe. L'extrémité de la corde normale est ici déterminée par l'ordonnée l, dans l'équation

$$y^2+ly+2a^2=0.$$

Mais si l'on n'a pas $y=l$, l'équation plus haut du second degré en y, donne les ordonnées des pieds des normales qu'on peut, d'un point de la parabole, abaisser sur elle-même. Examinons les racines de y. D'abord elles peuvent être égales, lorsqu'on aura $l^2=8a^2$. Si on cherche le point où la droite $l=2a\sqrt{2}$ coupe la parabole, on trouve $4a$ pour abscisse correspondante. Or les coordonnées $k=4a$, $l=\pm 2a\sqrt{2}$ satisfont à l'équation de la développée. Donc, les racines ci-dessus de y, ne peuvent être égales que lorsque (k,l) se trouve à la fois sur l'intersection de la parabole avec sa développée : et c'est ce que nous aurions dû apercevoir, dans le n° 22, par l'équation

$$4(k-a)^3=27a^2k$$

à laquelle on peut satisfaire en posant $k=4a$. Il résulte de tout ceci que des deux points où la développée coupe la parabole, on ne peut

abaisser, dans le vrai sens du mot, qu'une normale; mais on peut encore en *élever* une. La première de ces normales doit être considérée comme double, c'est-à-dire résultant de ce que deux se confondent en une seule; la seconde est distincte. Donc, on retrouve ainsi le nombre des trois normales, auquel l'équation du 3ᵉ degré en y, n° 21, donne lieu.

Examinons maintenant le cas des deux racines quelconques de l'équation ci-dessus en y. Elles sont imaginaires pour $l^2<8a^2$ et réelles pour $l^2>8a^2$. Le premier de ces deux cas a lieu pour les points de la parabole en dehors de la développée; le second pour les points de la première comprise par la dernière des deux courbes. Si l'on y tient compte de ce qu'en chaque point de la parabole on peut *élever* une normale, le nombre des trois normales, auquel donne lieu l'équation en y du n° 21, se retrouve toujours.

24. En procédant comme dans le n° (16) on trouvera que $qy=a(p+x)$ est la tangente au point (x,y) de la parabole $y^2=2ax$, p et q étant les coordonnées courantes de la tangente. Si au contraire p et q sont données et x et y variables, l'équation $qy=a(p+x)$ représente la sécante qui joint les points de contact des deux tangentes, qu'on peut mener d'un point (p,q) à la parabole.

Cela posé, cherchons la sécante qui coupe la parabole $y^2=2ax$ et l'hyperbole $xy-(k-a)y=al$ aux mêmes points. En éliminant x et y entre la sécante et les deux courbes il vient

$$\begin{aligned}
&ax^2+2(ap-q^2)x+ap^2=0\\
&x^2-(k-a-p)x-p(k-a)-ql=0\\
&y^2-2qy+2ap=0\\
&qy^2-a(k-a)y-a^2l=0.
\end{aligned}$$

Comme les équations en x et y sont identiques, on peut égaler la demi-somme et le produit des racines correspondantes, et l'on aura

$$x_1=\frac{q^2-ap}{a}=k-a-p,$$

$$y_1=q=\frac{a(k-a)}{q},$$

$$p^2=-p(k-a)-ql,$$

$$2p=-\frac{al}{q},$$

x_1 et y_1 étant la demi-somme des racines en x et y. En multipliant la première de ces équations par a et la seconde par q, puis sous-

trayant, on retrouve l'équation de la sécante. Donc, on peut se servir des deux autres pour déterminer p et q en fonction de k et l. On a ainsi

$$2pq=-al,$$
$$2p^3+2(k-a)p^2-al^2=0.$$

Cette dernière donne trois valeurs pour p et la précédente trois valeurs correspondantes pour q. Lorsque d'un point (k,l) on peut abaisser trois normales sur la parabole, il y a trois points (p,q) où les tangentes passant par les pieds des normales se coupent deux à deux. Lorsqu'on ne peut abaisser que deux normales, p et q auront trois racines réelles, dont deux égales. Enfin s'il n'y a qu'une normale possible, p et q n'auront qu'une racine réelle.

25. En coupant la parabole $y^2=2ax$ par la sécante $y=nx+h$, on trouve pour les abscisses des points d'intersection

$$n^2x^2+2(nh-a)x+h^2=0.$$

En résolvant cette équation par rapport à x, on a

$$n^2x=a-nh\pm\sqrt{a(a-2nh)}$$

D'où l'on voit que x peut avoir deux racines égales, lorsque $a=2nh$. C'est la condition entre n et h pour que la droite $y=nx+h$ soit tangente à la parabole.

Supposons qu'un point (p,q) se trouve sur la tangente, on aura

$$a=2nh \text{ et } q=np+h.$$

En éliminant h, il vient

$$a=2n(q-np),$$

ou bien

$$2pn^2-2qn+a=0.$$

Soient n' et n'' les deux racines de cette équation; on aura

$$2p(n'-n'')=2\sqrt{q^2-2ap},\quad n'n''=+\frac{a}{2p}.$$

Soit s la tangente trigonométrique de l'angle compris par les deux tangentes. Comme on a

$$s=\frac{n'-n''}{1+n'n''}:$$

en substituant $n'-n''$ et $n'n''$ les valeurs précédentes, on trouvera

$$s=\frac{2\sqrt{q^2-2ap}}{2p+a}.$$

Cette équation entre p et q donne la courbe des intersections des

tangentes à la parabole, assujéties à se couper deux à deux sous un angle constant. Il est aisé de démontrer que la courbe ainsi déterminée est une hyperbole. Si les tangentes à la parabole sont assujéties à être perpendiculaires, $s=\infty$ exige qu'on ait

$$2p+a=0.$$

D'où il résulte que dans la parabole les tangentes perpendiculaires, deux à deux, se coupent toutes sur la directrice.

Si dans l'équation ci-dessus en n, on remplace n par $-\frac{1}{n}$, on aura évidemment les directions des deux normales, correspondantes au point (p,q), savoir

$$an^2+2qn+2p=0.$$

Or, si l'on désigne par n la direction de la normale à la parabole assujétie à passer par (k,l), on aura

$$n=-\frac{y}{a}=\frac{y-l}{x-k}.$$

En tirant les valeurs de x et de y de ces deux équations et les substituant dans l'équation $y^2=2px$, on aura

$$an^3-2(k-a)n+l=0.$$

En éliminant le premier terme entre les deux équations en n, on a

$$qn^2+(p+k-a)n-l=0,$$

équation nécessairement identique avec la précédente du second degré en n. Donc, en comparant les coëfficients des mêmes puissances en n, on arrive à ces relations

$$\frac{2q}{a}=\frac{p+k-a}{q},\quad \frac{2p}{a}=-\frac{l}{q}.$$

On peut ainsi déterminer le lieu géométrique des intersections des normales lorsque les tangentes correspondantes sont assujéties à décrire une courbe et réciproquement. Et voici un problème de ce genre.

Trouver le lieu géométrique des intersections des normales, lorsque les tangentes correspondantes sont assujéties à décrire l'angle droit, c'est-à-dire à se couper sur la directrice.

En employant les deux dernières équations ci-dessus, on trouve d'abord, à cause $2p=-a$, $l=q$. D'où il résulte que les points d'intersection des tangentes perpendiculaires de la parabole et des nor-

males correspondantes se trouvent sur une droite parallèle à l'axe des x. En posant $p=-\frac{a}{2}$, $q=l$ dans l'équation $2q^2=a(p+k-a)$ on trouve

$$4l^2=a(2k-3a)$$

pour la courbe des intersections des normales en question. On voit que cette courbe est une parabole. En posant $2k-3a=2k'$, on amène la dernière équation à la forme $4l^2=2ak'$. D'où il résulte que $\frac{1}{2}a$ est le paramètre de cette dernière parabole. Quant au sommet, la transformation $2k-3a=2k'$ fait voir qu'il est situé à la distance $\frac{3}{2}a$ du sommet de la parabole proposée.

Avis.

Au moment où l'on mettait ce mémoire sous presse, M. Noël Prof. ord. à l'Université de Liége m'a fait connaître que la question dont je me suis occupé, a été aussi traitée par MM. Terquem et Gérono dans les nouvelles Annales de Mathématiques, T. II. 1843. Je renvoie le lecteur à l'ouvrage indiqué; il y verra la même question traitée d'une manière tout-à-fait différente.

II. *Sur les Oiseaux américains admis dans la Faune européenne.*

Par M. Edm. de SELYS-LONGCHAMPS.

Depuis une vingtaine d'années, le nombre des espèces d'oiseaux indiqués comme européens s'est sensiblement accru dans les ouvrages qui ont paru successivement sur la Faune de notre continent.

Ces additions proviennent de différentes sources : 1° un petit nombre d'espèces bien constatées et qui avaient jusque là échappé aux recherches des naturalistes. 2° Quelques espèces moins bien caractérisées et qui pourraient bien n'être que des modifications climatiques de celles déjà connues. 3° Un grand nombre d'espèces exotiques observées soit comme de passage assez fréquent vers les limites de l'Europe, soit comme de passage tout-à-fait accidentel.

On conçoit que l'admission sans une extrême réserve des oiseaux de cette dernière catégorie, jette la perturbation dans les considérations de Géographie zoologique qui seraient établies d'après le catalogue des oiseaux d'Europe et affaiblit les traits généraux de la création dans chaque partie du monde.

Les inconvénients de cette manière de procéder, me semblent devenus graves et rendus incontestables par l'exagération dans laquelle on est tombé ; ainsi d'une part, des naturalistes ont admis assez légèrement des oiseaux exotiques par le désir de publier du nouveau et d'enfler le total des Faunes, tandis que le grand nombre de collecteurs qui ne recueillent que des oiseaux indigènes, donnait l'idée aux marchands de spéculer sur cette circonstance et de vendre comme tuées en Europe des espèces purement exotiques.

Je ne traiterai pas aujourd'hui la question de celles des espèces exotiques qui sont originaires de l'Asie ou de l'Afrique : je ne m'occuperai que des oiseaux qui appartiennent à l'Amérique, parce que ce sont eux qui dans nos listes viennent le plus à l'encontre des saines données de la Géographie zoologique.

En ne discutant pas les observations sur la foi desquelles ces oiseaux ont reçu chez nous le droit de cité, on s'est laissé imposer par leur nombre qui a été porté jusqu'à une cinquantaine, c'est-à-dire à un dixième environ de l'Ornithologie européenne (en outre

des oiseaux habitant régulièrement les deux mondes et qui forment environ un cinquième de notre Faune, duquel cinquième les trois quarts sont des Palmipèdes marins). — Des personnes de bonne foi en ont tiré la conséquence qu'un assez grand nombre d'oiseaux de l'Amérique du Nord pourraient se trouver accidentellement en Europe. Je pense qu'il est loin d'en être ainsi, et je me propose de justifier mon opinion en dépouillant consciencieusement cette liste et en la divisant en plusieurs catégories. Je terminerai cet aperçu par l'exposition des principes qui me paraissent devoir être admis pour la constitution des Faunes générales ou locales.

I. *Oiseaux américains indiqués comme européens par suite d'erreurs matérielles.*

Je commence par cette catégorie afin de simplifier le reste de mon exposé.

1. *Haliætus leucocephalus.* L. — On a dit que cet aigle se trouve dans le nord de la Norwège. Quelques captures accidentelles auraient même eu lieu dans le centre de l'Europe. Il est résulté des derniers renseignements qu'il s'agit simplement d'individus très-adultes de l'*H. albicilla* qu'on avait pris pour l'espèce américaine ou bien de jeunes de cette même espèce qui en effet diffèrent peu de ceux du *leucocephalus*.

2. *Strix nebulosa.* L. — Ici il s'agit simplement d'une confusion de synonymie avec le *Strix cinerea* Gm. (*Str. lapponica* Retzius). La Chouette nébuleuse n'a jamais été vue en Scandinavie d'après le témoignage des naturalistes de cette contrée.

3. *Muscicapa ruticilla.* L. — Oiseau du sous-genre américain *Setophaga* introduit dans notre Faune, par M. Schinz, à la suite d'une traduction mal comprise et qui concernait le *Ruticilla phœnicurus* L. (Rossignol de muraille).

4. *Corvus spermologus.* Vieill. — Le seul individu connu, désigné sous le nom de choue ou choucas noir, fait partie du Muséum de Paris. Il n'a aucun rapport avec l'oiseau indiqué sous le même nom par Frisch et Buffon, que ces auteurs ont dit se trouver en France et en Allemagne, et que personne n'a pu revoir depuis. Vérification faite, les individus donnés comme tels étaient des exemplaires jeunes ou un peu foncés du *Corvus monedula*. Le *spermologus* de Paris a été acquis dans un lot d'oiseaux américains où se trouvait la prétendue *Sylvia anthoides* dont je parlerai plus bas. Le *spermologus* est assez

voisin du *Corvus corone* et probablement identique avec le *Corvus americanus* d'Audubon.

5. *Loxia leucoptera* Gm. (*L. falcirostra* Lath.) d'Amérique est très-distinct du *Loxia bisfasciata* (Brehm) qui habite la Sibérie et visite accidentellement l'Europe. C'est en confondant ces deux espèces que l'on a été conduit à admettre le *L. leucoptera* comme espèce européenne. (Voyez ma notice dans le Bulletin de l'académie de Belgique, avril 1846).

6. *Struthus hyemalis.* L. — Vulgairement Bruant jacobin, cité d'après l'indication erronée qu'il se trouve parfois en Islande.

7. *Spiza ciris.* L. — L'individu pris en Angleterre était certainement échappé d'une volière. On rapporte fréquemment cet oiseau sur les vaisseaux.

8. *Fringilla iliaca.* Gm. — M. De Gland, trompé par un faux renseignement, l'a dit de passage accidentel en Russie.

9. *Turdus rufus.* L. — J'ignore si cette espèce du sous-genre américain *Moqueur* (*Mimus*) a été réellement tuée dans les Iles Britanniques, mais ce ne pourrait être en tout cas que de la même manière que le *Spiza ciris* n° 7. — En outre je sais que c'est par suite d'une confusion de nomenclature avec le *Turdus migratorius*, que le *rufus* a été indiqué comme européen dans la Faune publiée par M. Schinz.

10. *Sylvicola noveboracensis.* Gm. — Décrite par Vieillot sous le nom de *Sylvia anthoides.* — La peau de cet oiseau d'un genre américain avait, il est vrai, été acquise dans le nord de l'Europe, mais elle se trouvait dans le même lot d'oiseaux américains que le *Corvus spermolegus* mentionné plus haut.

11. *Sitta canadensis.* L. — C'est, je crois, d'après Pennant que Gmelin dit en parlant de cet oiseau américain, qu'il se trouve dans l'Europe boréale.

Rien n'est venu confirmer cette assertion, car ce que M. Degland a ajouté à cet égard se rapportait à la *Sitta asiatica.* (*S. sericea* Tem.)

12. *Parus bicolor.* L. — On a compris cette espèce dans la zoologie Danoise, parce qu'elle se trouve, dit-on, au Groenland. Les naturalistes Scandinaves sont unanimes pour l'exclure de la Faune européenne et pour supprimer en outre la prétendue espèce de *Parus stromei* Lath, ou *Parus incertus.* Gm., que l'on avait indiquée de Norwège et que M. Temminck avait cru pouvoir rapporter au *Parus bicolor.*

13. *Meleagris gallopavo.* L. — Indiqué avec doute par M. Tem-

minck, d'après un renseignement communiqué à M. Cantraine pendant son voyage en Sicile. Il s'agit évidemment d'un autre oiseau, peut-être d'une outarde prise pour un dindon sauvage par des chasseurs, ou bien de quelque dindon égaré devenu à demi-sauvage.

14. *Ortyx virginiana*. L. — Oiseau acclimaté dans quelques localités en Angleterre. On ne peut pas plus le considérer comme européen que les cerfs de la Virginie que l'on élève dans plusieurs parcs.

15. *Ciconia americana*. Brisson. — (*C. maguari* Tem.) — Ne se trouve que dans l'Amérique méridionale. L'indication qu'elle aurait été tuée en France, résulte sans doute d'une confusion avec la cigogne blanche et n'est fondée sur aucun fait authentique.

16. *Ardea herodias*. L. — Mentionné par M. Schinz, comme ayant été tué en Angleterre. Cela semble le résultat d'une erreur de traducteur.

17. *Ardea cayennensis*. Gm. — Cette espèce ne se trouvant pas dans le nord de l'Amérique, je suis convaincu que l'individu pris à Yarmouth en mai 1824, s'était échappé de quelque navire.

18. *Anser canadensis*. L. — On élève en grand nombre en Angleterre cette espèce d'un naturel fuyard. Cela explique la capture de quelques individus loin des parcs où ils se reproduisent. Il en est de même de l'*Anser gambensis* de l'Afrique dont un individu échappé a été tué en Angleterre.

19. *Anas sponsa*. L. — En Amérique cette belle espèce ne se montre ni dans les régions polaires ni sur les côtes maritimes. — On l'a transportée dans les ménageries de l'Europe et elle s'y reproduit. Comme elle est d'un naturel sauvage, on ne peut douter que les deux ou trois exemplaires tués en Angleterre et en Belgique, ne fussent échappés de quelque basse-cour.

20. *Cairina moschata*. L. — Il est redevenu sauvage sur les bords de la mer Caspienne selon Pallas. Il serait donc de la même catégorie que l'*Ortyx virginiana* cité plus haut. Il ne se trouve pas d'ailleurs à l'état sauvage dans l'Amérique septentrionale.

II. *Oiseaux américains terrestres dont l'apparition en Europe semble constatée.*

1. *Nauclerus furcatus*. L. — Tué deux fois en Angleterre. Peut-être le vol élevé de cet oiseau lui permet-il de passer l'Océan. — Il est toutefois bon de remarquer qu'il n'habite que le sud des Etats-Unis et qu'il ne serait pas impossible que les deux exemplaires tués en Europe se fussent échappés d'un navire.

2. *Procne purpurea*. L. — Tué une fois en Irlande et deux fois en Angleterre, d'après MM. Thompson et Yarrell. J'admets que les hirondelles ayant un vol très-étendu, celle-ci a pu traverser l'Océan en se reposant peut être sur des navires ou sur des montagnes de glace.

3. *Agelaius phœnicœus*. L. — Observé deux ou trois fois dans les Iles Britanniques. Cet oiseau ne se trouve pas au Groenland et n'a pas un vol puissant, et ces Troupiales sont fréquemment apportés en Europe pour les volières. Je suppose donc que les exemplaires observés s'étaient échappés de captivité.

4. *Turdus migratorius*. L. — Cette Grive entreprend en Amérique d'énormes migrations et se rapproche en été des régions polaires. Je ne me prononcerai donc qu'avec réserve sur les causes de l'apparition constatée de trois ou quatre individus en Allemagne, mais je serai plus tenté de croire qu'elle y est venue par l'Orient comme le *Turdus aureus* (*T. Whitei* Eyton) du Japon, que d'admettre qu'elle ait passé l'Océan, en supposant d'ailleurs qu'elle ne se fût pas échappée d'une ménagerie (1).

5. *Turdus solitarius*. Wilson (*T. minor* Brehm). — Un ou deux exemplaires pris en Allemagne. Même observation que pour le *T. migratorius*, et probablement encore échappés d'une volière.

6. *Alcedo alcyon*. L. — Un et peut-être deux exemplaires observés en Irlande en septembre 1845. (Voyez la notice de M. Thompson de Belfast dans les *Annals of natural history*) ; cet alcyon visite en été les régions polaires de l'Amérique boréale et fréquente le bord des eaux. Son apparition est des plus inexplicables, car ces oiseaux n'ont pas un vol étendu et, d'un autre côté, on les élève difficilement en captivité. Il se pourrait qu'ils eussent fait une partie du voyage sur les montagnes de glace qui s'éloignent du Groenland en automne.

7. *Coccystes americanus*. L. — Ce coucou a été tué quatre fois en Irlande. — même observation que pour l'*Alcedo alcyon*. Ces deux oiseaux appartiennent à des sous-genres américains.

8. *Columba migratoria*. L. — On connait les migrations considérables de ce pigeon qui visite en été les régions polaires de l'Amé-

(1) M. l'abbé Fr. Baldacconi mentionne dans une notice spéciale que le *Turdus migratorius* paraît *chaque hiver* en Italie sur les montagnes des environs de Radicofani. Comme ce savant n'en a étudié qu'un exemplaire en mue, je ne doute pas qu'il s'agit de quelqu'autre espèce voisine dont on connaît plusieurs en Asie et en Afrique. A cette autre espèce pourrait bien se rapporter tout ce qu'on a dit des *Turdus migratorius* tués en Europe.

mérique. Trois exemplaires ont été tués en Angleterre et en Norwège. J'admettrai donc que son vol rapide et soutenu lui a permis de passer l'Océan ou d'arriver en Europe par le nord de l'Asie

On remarque que la moitié au moins de ces huit espèces terrestres ne peuvent avoir franchi l'Océan, à moins que par des circonstances en dehors des phénomènes périodiques naturels, que cette moitié se compose d'espèces que l'on élève fréquemment en captivité et que le nombre d'exemplaires de chacune observés depuis un siècle varie de un à cinq, et l'on conclura sans doute avec moi que de telles espèces ne doivent pas raisonnablement être considérées comme faisant partie de la Faune européenne.

On peut présenter différemment la question pour ce qui concerne les oiseaux de rivages et les oiseaux nageurs des régions arctiques de l'Amérique ; c'est ce qui m'a engagé à les énumérer séparément dans la catégorie suivante.

III. *Oiseaux américains aquatiques dont l'apparition accidentelle en Europe semble constatée.*

A. Echassiers.

1. *Tringa pectoralis.* Bonap. — Observé deux fois en Angleterre.
2. *Tringa Schinzi.* Bonap. (*T. Bonapartei* Schlegel). — Comme le précédent.
3. *Tringa rufescens.* Vieillot. — Tué une ou deux fois en Angleterre et en France.
4. *Totanus Bartrami.* Wils. — Observé plusieurs fois dans l'Europe septentrionale.
5. *Totanus semipalmatus.* L. — Comme le précédent.
6. *Totanus macularius.* L. — Comme le précédent.
7. *Macroramphus griseus.* Gm. — Comme le précédent.
8. *Ardea minor* Wilson. (*Ardea lentiginosa* Montagu). — Tué cinq fois dans les Iles Britanniques. (Voyez la notice de M. Thompson de Belfast, dans les *Annals of natural history*, février 1846). Je ferai remarquer que le vol de cet oiseau est très-lourd, et que d'après les naturalistes américains, il se repose à chaque instant.

Quant aux sept premières espèces, comme elles se rencontrent en été dans les régions américaines du cercle arctique jusqu'au Groenland, que leur vol est étendu et que plusieurs d'entre elles, surtout les *Totanus*, peuvent nager lorsqu'elles y sont forcées, leur apparition en Europe est plus naturelle.

B. Palmipèdes.

1. *Anas americana.* L. — Ce canard remplace en Amérique notre *A. penelope.* Un ou deux exemplaires ont été tués en Angleterre, à ce qu'il paraît.

2. *Fuligula mariloides.* Yarrell. — Comme le précédent. Il remplace en Amérique le *F. marila.*

3. *Fuligula rufitorques.* Bonap. — Comme le précédent. Il remplace en Amérique le *F. cristata.* (*A. fuligula.* L.)

4. *Fuligula perspicillata.* L. — Observé plusieurs fois dans le nord-ouest de l'Europe et sur la Manche. Il est certain toutefois qu'il ne se reproduit pas en Europe.

5. *Fuligula albeola.* L. — On dit qu'un exemplaire a été tiré en Angleterre.

6. *Mergus cucullatus.* L. — Observé trois ou quatre fois dans les Iles Britanniques et en France.

7. *Puffinus fuliginosus.* Strickland. — Comme le précédent.

8. *Thalassidroma Wilsonii.* Bonap. — Comme le précédent. Il est bon de remarquer que cet oiseau se trouve aussi aux Açores.

9. *Larus Sabini.* Leach. — Comme le précédent.

10. *Larus atricilla.* L. — Comme le précédent.

11. *Larus Rossii.* Sabine. — Observé une ou deux fois, dit-on, dans le nord des Iles Britanniques.

12. *Megalopterus stolidus.* L. — Observé plusieurs fois sur les côtes européennes de l'Océan. Il ne se trouve pas dans les régions arctiques de l'Amérique et ne peut nullement être considéré comme appartenant au système de la Faune européenne. Les Noddis font partie de la Faune Tropicale. Il en est de même du *Thalassidroma Wilsonii.* En un mot il me semble que les *Larus Sabini*, *Rossii* et le *Fuligula perspicillata*, par leur séjour habituel au Groenland et peut-être en Islande, ont seuls quelques droits à être compris dans notre Faune et peuvent être assimilés aux Scolopacidées mentionnées plus haut, mais je persiste à croire qu'il est préférable de présenter ces oiseaux dans un appendice à la Faune d'Europe, si l'on veut donner une idée exacte de la création ornithologique dans cette partie du monde.

Je terminerai cette nomenclature par deux listes indiquant les oiseaux qui, d'après les dernières observations, sont communs à l'Europe et à l'Amérique septentrionale, sans être visiblement modifiés.

Les espèces précédées d'un astérisque, quoique de passage assez régulier dans les régions arctiques du continent européen, paraissent plutôt y arriver du Groenland, de l'Islande ou du nord de la Sibérie.

IV. *Oiseaux terrestres communs à l'Europe et à l'Amérique.*

1. *Aquila chrysætos.* L.
2. *Haliætus albicilla.* L.
*3. *Falco candicans.* Gm.
4. — *peregrinus.* L.
5. *Strix ulula.* L. (*S. funerea* Lath.)
6. — *nyctea.* L.
7. — *brachyotos.* Gm.
8. — *cinerea.* Gm. (*S. lapponica* Retzius.)
*9. *Fringilla Hollbollii.* Brehm. (*Linaria canescens* Bonap.)
10. *Corythus enucleator.* L.
11. *Plectrophanes nivalis.* L.
12. — *lapponicus.* L.
13. *Lagopus albus.* L.

En outre, un certain nombre d'espèces américaines terrestres ne semblent être en réalité que des modifications climatiques de nos oiseaux européens. Ce sont surtout :

Astur atricapillus Bonap.	en Europe :		*Astur palumbarius.* L.
Pandion carolinensis. Gm.	—	—	*Pandion haliætus.* L.
Falco anatum. Bonap.	—	—	*Falco peregrinus.* L.
Strix americana. Bonap.	—	—	*Strix otus.* L.
Corvus catototl. Wagler.	—	—	*Corvus corax.* L.
Pica hudsonica. Sabine.	—	—	*Pica caudata.* Ray.
Otocoris cornuta. Sw.	—	—	*Otocoris alpestris.* L.
Picus arcticus. Sw.	—	—	*Picus tridactylus.* L.
Lagopus rupestris. Sabine	—	—	*Lagopus mutus.* Leach.

Et quelques autres espèces principalement dans les genres *Loxia*, *Erythrospiza* et *Troglodytes*.

V. *Oiseaux aquatiques communs à l'Europe et à l'Amérique.*

A. Echassiers.

1. *Squatarola helvetica.* L.
2. *Strepsilas interpres.* L.
3. *Tringa maritima.* Brünn.
4. — *canutus.* L.
5. — *cinclus.* L.
6. — *subarquata.* Gm.
7. *Phalaropus fulicarius.* L.
8. *Lobipes hyperboreus.* L.

B. Palmipèdes.

1. *Anser erythropus.* L. (*A. albifrons* Gm.)
*2. — *hyperboreus.* L.
3. — *bernicla.* Gm.
4. — *leucopsis.* Bechst.
5. *Anas boschas.* L.
6. — *strepera.* L.
7. *Rhynchaspis clypeata.* L.
8. *Fuligula mollissima.* L.
*9. — *spectabilis.* L.
10. — *fusca.* L.
*11. — *Stelleri.* Pall.
*12. — *islandica.* Gm. (*A. barrovi* Sw.)
13. — *clangula.* L.
14. — *glacialis.* L.
*15. — *histrionica.* L.
16. *Mergus albellus.* L.
17. — *merganser.* L.
18. — *serrator.* L.
19. *Phalacrocorax carbo.* L.
20. *Sterna macroura.* Naumann. (*S. arctica.* Tem.)
21. — *hirundo.* L.
22. — *paradisæa.* Brünn. (*S. Dougalli* Montagu.)
23. — *cantiaca.* Gm.
24. — *fissipes.* L. (*S. nigra* auct.)

25. *Larus marinus*. L.
26. — *leucopterus*. Faber.
27. — *glaucus*. Brünn.
28. — *tridactylus*. L.
29. — *eburneus*. Gm.
30. *Puffinus major*. Faber.
31. — *arcticus* (*P. Anglorum*. Tem. *Procellaria puffinus*. L.)
32. — *obscurus*. L. Gm.
33. *Procellaria glacialis*. L.
34. *Thalassidroma Leachii*. Tem.
35. — *pelagica*. L.
36. *Lestris catarractes*. L.
37. — *pomarinus*. Tem.
38. — *parasiticus*. Brünn. (*L. Richardsoni* Sw.)
39. — *cepphus*. Brünn. (*L. Buffonii* Boie.)
40. *Alca torda*. L.
41. — *impennis*. L.
42. *Mormon arcticus*. L.
43. — *glacialis*. Leach.
44. *Mergulus alle*. L.
45. *Uria lomvia*. L. Brünn. (*U. troile* auct.)
46. — *troile*. Brünn. (*U. Brunnichii*. Sabine.)
47. — *ringvia*. Brünn. (*A. leucophthalmos* Faber.)
48. — *grylle*. L.
49. *Colymbus glacialis*. L.
50. — *arcticus*. L.
51. — *septentrionalis*. L.
52. *Podiceps cristatus*. L.
53. — *cornutus*. Lath.
54. — *auritus*. Briss.
55. — *subcristatus*. Jacquin. (1)

En outre, un certain nombre d'oiseaux aquatiques américains, décrits comme espèces distinctes, ne semblent être que des races locales. Ce sont principalement :

(1) Les personnes qui ont étudié l'ouvrage de M. le docteur De Gland (de Lille), sur les oiseaux d'Europe, seront surprises de ne pas trouver dans ma liste plusieurs oiseaux terrestres européens qu'il a signalés comme se trouvant aux Etats-Unis. Cet Ornithologiste estimable a été victime d'une supercherie : les oiseaux américains qu'on lui envoyait de New-York, ayant été remplacés en partie par des espèces européennes au moment de leur entrée en France.

Ardea americana. Bonap.	En Europe :	*Ardea nyctiorax.*
Totanus chloropygius. Vieill.	—	—	*Totanus glareola.* L.
— *floridanus.* Bonap.	—	—	*Totanus glottis.* L.
Charadrius virginiacus. Bonap.	—	—	*Charadrius pluvialis.* L.
Anas americana. L.	—	—	*Anas penelope.* L.
Fuligula americana. Bonap.	—	—	*Fuligula nigra.* L.
— *erythrocephala.* Bonap.	—	—	*Fuligula ferina* L.
— *mariloides.* Yarrell.	—	—	*Fuligula marila* L.
— *rufitorques.* Bonap.	—	—	*Fuligula cristata.* Stephens.
Sula americana. Bonap.	—	—	*Sula bassana.* L.
Sterna argentea. Nuttall.	—	—	*Sterna minuta.* L.
— *aranea* Wilss.	—	—	*Sterna anglica.* Montagu.
Larus argentatoides. Bonap.	—	—	*Larus argentatus.* Brunn.

Il y a donc 13 oiseaux terrestres, 8 Echassiers et 55 Palmipèdes, au total 76 espèces d'oiseaux, qui sont les mêmes dans le nord des deux continents européen et américain ; plus environ 10 oiseaux terrestres, 3 Echassiers, et 11 Palmipèdes, total 24, qui pourraient n'être que des races américaines ne différant pas spécifiquement des européennes, ce qui produirait un chiffre général d'une centaine d'espèces communes à ces deux parties du monde. (1).

Résumé.

La 1re liste comprend 20 espèces qui certainement doivent être rejetées du catalogue des oiseaux d'Europe, même par les personnes qui y admettent ceux de passage accidentel. Deux oiseaux qui y sont mentionnés se sont acclimatés dans deux contrées de l'Europe.

La 2e liste (espèces terrestres trouvées accidentellement) en renferme 8. Je l'ai fait suivre d'un commentaire où je crois avoir démontré qu'on ne peut guère mieux admettre ces oiseaux comme européens, que ceux de la 1re liste.

---

(1) Après avoir terminé mon travail, je m'aperçois que ce chiffre d'espèces communes aux deux mondes, est précisément le même que celui indiqué en 1838 par le prince C. Bonaparte dans son excellente *List of Birds of Europe and North-America*, mais il y est arrivé par une voie toute différente : 1° il a énuméré parmi les espèces communes aux deux Faunes, 24 de celles qui ont été trouvées accidentellement en Europe, et que ma notice a précisément pour but d'exclure; 2° il a admis comme espèces exclusivement propres à l'Amérique, environ 24 oiseaux que je ne crois être que des races climatiques. Nos deux chiffres n'ont donc qu'une coincidence toute fortuite. Comme cette liste d'oiseaux que je suppose n'être que des races

La 3e liste (espèces aquatiques trouvées accidentellement) comprend 8 Echassiers et 12 Palmipèdes. La plupart d'entre eux ont sans doute été amenés par des tempêtes ou sur des glaces flottantes. Un petit nombre se trouvent presque toute l'année dans les régions

---

locales est plus ou moins arbitraire, je crois bien faire de citer en outre la plupart des autres espèces qui, par leur stature et leur coloration, ont la plus grande analogie avec les européennes; ce sont principalement et d'après l'excellent ouvrage du Prince Bonaparte :

En Amérique :	En Europe :
—	RAPACES. —
Haliœtus Washingtoni. Bonap. }	*H. albicilla* L.
— *leucocephalus.* L. }	
Buteo Swainsoni. Bonap.	*B. vulgaris.* Bechst.
— *sancti johannis.* Gmel.	*B. lagopus.* L.
Elanus leucurus. Bonap.	*E. melanopterus.* Daud.
Astur fuscus. Bonap.	*A. nisus* L.
Circus uliginosus. Bonap.	*C. pygargus.* L.
Strix Richardsoni. Bonap.	*S. tengmalmi.* L.
— *pratincola.* Bonap.	*S. flammea.* L.
	PASSEREAUX.
Lanius septentrionalis. Vieill.	*L. excubitor.* L.
— *ludovicianus.* L.	*L. meridionalis.* Vieill.
Corvus ossifragus. Wils.	*C. frugilegus.* L.
— *americanus.* Aud.	*C. corone.* L.
Fringilla pinus. Wils.	*F. spinus.* L.
Erythrospiza purpurea. Gm.	*E. rosea.* Pall.
— *frontalis.* Say.	*E. erythrina.* Pall.
Loxia americana. Wils.	*L. curvirostra.* L.
— *leucoptera.* Gm.	*L. bifasciata.* Brehm.
Regulus satrapa. Licht.	*R. ignicapillus.* Brehm.
— *Cuvieri.* Aud.	*R. cristatus.* Ray.
Parus hudsonicus. Lath.	*P. sibiricus.* L.
— *atricapillus.* L.	*P. palustris.* L.
Certhia americana. Bonap.	*C. familiaris.* L.
Troglodytes hyemalis. Vieill.	*T. europœus.* L.
	GRIMPEURS.
Picus varius. L.	*P. major.* L.
	GALLINACÉS.
Lagopus leucurus. Sw.	*L. albus.* L.
	ALECTORIDES.
Gallinula galeata. Licht.	*G. chloropus.* L.
Fulica americana. Gm.	*F. atra.*

glacées du Groenland d'où ils émigrent au midi pendant l'hiver, et paraissent de temps en temps aux Orcades, en Norwège et même plus au midi. Ceux-là ont, j'en conviens, plus de droit à prendre place parmi les oiseaux d'Europe, d'autant mieux que le caractère de la Faune du Groenland est plutôt européen qu'améri-

---

ECHASSIERS.

Charadrius (2 espèces).	*C. hiaticula.* L.
Hæmatopus palliatus. Tem.	*H. ostralegus.* L.
Himantopus nigricollis. Vieill.	*H. melanopterus.* Meyer.
Scolopax Wilsoni. Bonap.	*S. gallinago.* L.
Numenius borealis. Lath.	*N. tenuirostris.* Savi.
— *hudsonicus.* Lath.	*N. phæopus.* L.
Totanus flavipes. Vieill.	*T. stagnatilis.* Bechst.
Tringa Schinzi. Bonap.	*T. cinclus.* L.
— *pusilla.* Wils.	*T. Temmincki.* Leisler.
Ibis Ordi. Bonap.	*Y. falcinellus.* Gm.
Ardea egretta. L.	*A. alba.* L.
— *candidissima.* Wils.	*A. garzetta.* L.
Platalœa ajaja. L.	*P. leucorhodia.* L.
Phœnicopterus ruber. L.	*Ph. roseus.* Pall.
Cygnus americanus. Sharpless.	*C. musicus.* Bechst.
— *buccinator.* Richards.	*C. islandicus.* Brehm.
Anas discors. L.	*A. querquedula.* L.
— *carolinensis.* Bonap.	*A. crecca* L.
Pelecanus trachyrhynchus. Lath.	*P. onocrotalus.* L.
Larus Bonaparti. Richards.	*L. ridibundus.* L.
— *Francklini.* Richards.	*L. melanocephalus.* Natterer.

L'Ornithologie de l'Amérique septentrionale a pour caractère négatif l'absence d'une quarantaine de genres européens dont les types principaux sont : *Vultur*,—*Gypaetos*, —*Sturnus*, — *Oriolus*, — *Emberiza*, — *Alauda*, — *Motacilla*, — *Sylvia*, — *Calamoherpe*, — *Saxicola*, — *Coracias*, — *Merops*, — *Upupa*, — *Yunx* — *Pterocles*, — *Phasianus*, — *Turnix*, — *Otis*, — *Cursorius*, — *Glareola*, — *Ciconia*. L'Amérique tout en possédant des genres très-voisins, manque aussi des groupes européens :

Neophron, — *Circaetos*, — *Pernis*, — *Milvus*, — *Caprimulgus*, — *Cypselus*, — *Tichodroma*, — *Phyllopneuste*, — *Ruticilla*, — *Calamophilus*, — *Ægythalus*, — *Muscicapa*, — *Acridotheres*, — *Pyrgita*, — *Cuculus*, — *Francolinus*, — *Coturnix*, — *Ædicnemus*, — *Porphyrio*.

Elle a en revanche pour caractère positif la présence d'une quarantaine de genres étrangers à l'Europe dont les principaux sont : *Cathartes*, — *Polyborus*, — *Tyrannus*, — *Milvulus*, — *Sylvicola*, — *Icterus*, — *Vireo*, — *Icteria*, — *Pyranga*, — *Trochilus*, — *Psittacus*, — *Meleagris*, — *Tantalus*, — *Aramus*, — *Tachypetes*, — *Plotus*, — *Phaeton*, — *Heliornis*, — *Rhynchops*, — *Diomedea*, — *Phaleris*; et d'autres moins importants qui sont représentés en Europe par des équivalents; ce sont les groupes américains : *Nauclerus*, — *Ictinia*, — *Chordeiles*, — *Chœtura*, — *Procne*. — *Mniotilta*, — *Thryothorus*, — *Sialia*, — *Vermivora*, — *Setophaga*, — *Cuspiza* et sous-genres voisins, — *Spiza*, — *Colaptes*, — *Coccystes*, — *Ortyx*, — *Macroramphus*, — *Holopodius*, — *Sylbeocyclus*, — *Ceratorhyncha*.

cain. Mais, par le même principe, s'il arrive que des oiseaux terrestres de l'Amérique tempérée poussent leurs migrations jusqu'au Groenland pendant quelques semaines du cœur de l'été, et de là viennent à s'égarer en Europe, deux ou trois fois de mémoire d'homme et par individus isolés (comme la *Columba migratoria*, le *Cocystes americanus* et l'*Alcedo alcyon*), je ne puis les admettre pour cela comme européens, et il faut noter que ma détermination reçoit une sanction de ce que ces trois oiseaux appartiennent à des sous-genres qui sont exclusivement propres au nouveau continent.

Les 4e et 5e listes indiquent 76 espèces d'oiseaux communs à l'Europe et à l'Amérique boréale, plus 24 autres qui semblent n'être que des races légèrement modifiées par le climat. (Voyez la note 2.)

Les enseignements que l'on peut tirer de ces deux dernières catégories sont fort importants : sur environ 300 espèces d'oiseaux terrestres qui se trouvent en Europe, il n'y en a pas 15, c'est-à-dire 5 pour cent, qui soient les mêmes dans les deux mondes, et ce sont tous des oiseaux exclusivement propres à la zone glaciale, sauf deux ou trois espèces qui se retrouvent en même temps sur les montagnes élevées et froides du centre de l'Europe. Il en est à peu près de même des dix espèces considérées comme races climatiques.

Sur 80 Echassiers européens, il y en a 8 identiques, c'est-à-dire 10 pour cent, et la remarque que je viens de faire sur les oiseaux terrestres s'applique également ici, comme pour quelques espèces supposées n'être que des races.

Sur 100 Palmipèdes environ qui existent en Europe, il y en a à peu près 60 qui sont les mêmes dans le nord de l'Amérique, c'est-à-dire 60 pour cent ou plus que la moitié, et si l'on y ajoute celles que l'on regarde comme des races climatiques, on aurait l'énorme proportion de 7/10mes d'espèces nageuses communes, tandis qu'en prenant la classe des oiseaux dans son ensemble on ne trouve qu'à peu près 2/10mes. Et notons le bien, ce sont, comme pour les oiseaux Terrestres et Echassiers, tous oiseaux qui se trouvent dans la zone glaciale des deux mondes et dont la plupart ne s'en écartent qu'en hiver ou même accidentellement.

En un mot, pour les espèces identiques, comme pour celles qu'on a lieu de croire modifiées par la localité, il n'y a pas d'hiatus entre leur habitation géographique dans les deux mondes ; elles fréquentent simultanément les montagnes neigeuses et les mers glacées de

la Lapponie, du Spitzberg, de l'Islande, du Groenland et du Labrador. Nous manquons toutefois de documents précis pour fixer quelle est la limite de longitude des espèces que l'on suppose modifiées; nous ne savons pas, par exemple, si au Groenland on trouve l'*Anas penelope* ou l'*Anas americana*, les *Fuligula nigra*, *marila*, *ferina*, et *cristata*, ou les *Fuligula americana*, *mariloides*, *erythrocephala* et *rufitorques*, ou bien ci ces différentes races y arrivent concurremment. Mais ces Anatidées viennent tout à fait à l'appui de mon opinion que les oiseaux terrestres de l'Amérique ne peuvent guère traverser l'Océan, car on cite à peine deux ou trois individus de ces Canards, Morillons ou Harles américains capturés en Europe, et cependant ce sont des oiseaux marins, plongeurs, et accoutumés à de grands voyages périodiques, qui sont dans des circonstances tout-à-fait favorables pour accomplir une pareille traversée.

De ce qui précède je tirerai les conclusions suivantes :

A. Il ne faut pas énumérer dans la liste des oiseaux d'Europe les espèces qu'on y a rencontrées accidentellement, mais il est nécessaire de les mentionner dans un appendice séparé.

B. Les oiseaux exotiques, acclimatés à l'état sauvage dans une contrée européenne, doivent constituer un second appendice.

C. Les oiseaux domestiques formeront un 3e appendice auquel on adjoindra ceux que l'on suppose échappés des basse-cours ou des ménageries.

D. Les oiseaux fossiles peuvent être réunis dans un dernier appendice à la Faune d'une contrée.

E. Jusqu'ici les zoologistes ont bien fait de réunir les espèces de passage accidentel aux espèces indigènes ou périodiques, parce qu'on manquait des documents précis pour savoir ce qui appartenait positivement à ces diverses catégories.

F. Le moment n'est peut-être pas encore arrivé d'exclure de la Faune européenne les espèces qui arrivent accidentellement de la Sibérie, de la Perse, et de l'Afrique, parce qu'il est possible que plusieurs de ces espèces soient de passage régulier, dans quelqu'une des parties orientales ou méridionales de l'Europe qui n'ont pas été suffisamment explorées.

Ces espèces asiatiques, étant en général analogues à celles de l'Europe, n'altèrent pas notablement les considérations générales de la géographie zoologique.

G. Il en est tout autrement des oiseaux américains, la Faune ornithologique du nord de l'Europe étant suffisamment connue et l'ensemble de la géographie zoologique du nouveau monde ayant des caractères différents de celle de l'ancien.

H. Le moment est donc venu d'éloigner de la Faune européenne proprement dite, les oiseaux américains qu'on a trouvés accidentellement en Europe.

I. Ces considérations devront être appliquées sur une échelle proportionnelle aux Faunes locales, à celle de Belgique par exemple, en ce qui concerne les oiseaux européens qu'on y trouve accidentellement; mais avant que tous les documents désirables ne soient recueillis, on peut se borner à mettre en tête de ces Faunes locales, comme je l'ai tenté, des listes où les oiseaux sont repartis en espèces sédentaires, — espèces d'été, — espèces d'hiver, — espèces de double passage, — espèces de passage accidentel, — en reportant dans des appendices : les oiseaux acclimatés, — ceux qui sont domestiques, — et enfin les fossiles.

III. *Description d'un appareil destiné à éviter les dangers d'empoisonnement dans la fabrication du fulminate de mercure.*

Par J. T. P. Chandelon,

professeur a l'université de liége et a l'école de pyrotechnie de la même ville.

Avant 1836, le fulminate de mercure qui forme la base des amorces ou capsules fulminantes, était préparé dans des vases ouverts. Les produits volatils qui se dégagent pendant l'opération et qui consistent en gaz nitreux, vapeurs mercurielles et éthérées, acide cyanhydrique etc., se répandant alors dans l'atmosphère, incommodaient les ouvriers en agissant fortement sur leur respiration, et occasionnaient même parfois des accidents graves qu'il faut attribuer surtout à l'acide cyanhydrique qui, selon M. Gaultier de Claubry, se produit en quantités variables et quelquefois considérables, suivant le degré de concentration des liqueurs (1).

Ce fut M. A. Chevalier qui, en visitant les ateliers de quelques fabricants de poudre fulminante, frappé des inconvénients que je viens de signaler, conçut le projet d'un appareil propre à les faire disparaître (2). Cet appareil monté d'abord dans la fabrique de MM. De Lion et Goupillat, au bas Meudon, fut ensuite adopté dans toutes les fabriques de ce genre, l'expérience ayant démontré qu'il remplissait les usages auxquels il était destiné. — Il consiste : 1° en une cornue tubulée supportée par un chassis et dans laquelle on introduit les matières nécessaires à la préparation du fulminate; 2° en un condenseur composé d'un tuyau cylindrique en grès, de 54 à 60 pouces de longueur sur 8 à 9 de diamètre, mis en commu-

(1) Annales d'hygiène publique et de médecine légale 1839, 44e n°, Paris.
(2) Journal des connaissances usuelles et pratiques, Tome 25e, page 223.

nication avec 3 ou 4 tourilles placées dans des baquets remplis d'eau et reliées entre elles à l'aide de tubes en verre courbés à angle droit. Le tube de la dernière tourille donne issue aux vapeurs éthérées qui ne sont point condensées. Toutes les jointures de l'appareil sont fermées par un lut gras et la cornue est réunie au condenseur par un ajutage en bois tendre.

L'emploi que l'on a fait de cet appareil à l'école militaire de pyrotechnie de Liége a fait reconnaître qu'il ne soustrait pas complètement les ouvriers à l'influence des émanations délétères. Les tubes de verre qui relient entre elles les différentes tourilles, n'ayant pas un diamètre suffisant pour livrer issue à la grande quantité de vapeurs qui se dégagent au moment de la réaction, il en résulte une pression intérieure si considérable que le lut appliqué aux diverses jointures de l'appareil se détache ou se crevasse et laisse s'échapper des vapeurs malfaisantes. La crainte de faire éclater la cornue ne permet point de boucher les fuites et force même parfois l'opérateur à diminuer la pression en enlevant momentanément l'un des bouchons de la première tourille.

Un autre inconvénient non moins grave consiste en ce que l'on ne peut extraire des tourilles les liqueurs produites par la condensation qu'au moyen d'un syphon ou en démontant l'appareil, opérations que la nature vénéneuse de ces liquides rend extrêmement dangereuses, comme le prouvent du reste les accidents éprouvés par M. Gaultier de Claubry dans ses recherches sur les produits de la préparation du fulminate.

C'est pour éviter ces inconvénients que j'ai proposé l'appareil suivant adopté aujourd'hui par l'école de pyrotechnie de Liége.

Il se compose (*Voir les figures ci-jointes*) 1° de deux ballons en verre, AA', d'une capacité de 40 litres, reposant sur chevalet et dans lesquels on introduit les matières propres à produire le fulminate. Chacun de ces ballons porte à la partie supérieure du col, qui est dépolie, un collier B en bois, recouvert d'une feuille de plomb et s'adaptant à frottement. Le collier, par sa rainure circulaire *a*, forme fermeture hydraulique avec les tuyaux CC qui relient les ballons à l'appareil de condensation. Ces tubes, pour plus de solidité, sont supportés par des tiges de fer implantées dans le sol de l'atelier; 2° D'une série de 4 tourilles en grès-cérame commun, (*brown stoneware* (1)) DDDD, munies à leur partie inférieure d'un robinet E

(1) De la fabrique de M. Stephen Green à Lambeth.

aussi en grès, par lequel les produits de la condensation s'écoulent dans le tuyau F, et portant à leur partie supérieure des tubulures *b b b b* à fermeture hydraulique, dans lesquelles viennent s'adapter les tubes en grès G G G G qui mettent en communication les diverses bombones dont se compose le système. Chaque bombone a une capacité d'environ 90 litres ; la première est à trois tubulures, les autres n'en portent que deux ;

3° D'un tuyau en grès H, à fermeture hydraulique, encastré dans la muraille de l'atelier, servant à conduire dans la cheminée K les vapeurs délétères non condensées dans les tourilles ;

4° D'un tuyau ou conduit F en grès, placé dans le sol de l'atelier et recevant de chaque robinet les liqueurs condensées dans les bombones, pour les conduire dans le *bac à saturer* qui se trouve en plein air au-dehors de l'atelier.

L'appareil étant monté pour fonctionner, on commence par verser dans chaque tubulure *b* l'eau nécessaire pour qu'il y ait fermeture ; on enlève le tuyau C et l'on introduit dans un des ballons

4, 2 Litres d'alcool à 36^{d} ;

d'autre part on fait dissoudre à chaud

0,367 kilogr. de mercure dans
4,111 d'acide nitrique à 36^{d}

et aussitôt que cette dissolution est faite et que sa température est à 80 degrés, on la verse, au moyen d'un entonnoir à longue tige, dans le même ballon qui contient l'alcool.

Le tuyau C étant remis à sa place, on remplit d'eau la rainure du collier et on laisse l'opération marcher d'elle-même. Au bout de quelques instants la réaction commence et la grande masse de vapeurs qu'elle produit passe par les diverses bombones qui, suffisamment refroidies par le contact de l'air froid, en condensent la majeure partie : la petite portion qui leur échappe se rend par la cheminée à l'extérieur de l'atelier, sans nuire aux ouvriers.

Les soins de l'opérateur, pendant tout le cours de cette opération, se bornent à verser de temps à autre de l'eau froide dans chaque tubulure, pour remplacer celle qui s'y est échauffée : ce liquide, par l'effet même de la construction de la tubulure, se rend dans l'intérieur de la tourille.

Lorsque la réaction du nitrate acide de mercure sur l'alcool est terminée, on enlève de nouveau le tuyau C, en ayant soin de boucher

aussitôt par une cloche de verre la tubulure qu'il laisse béante, et l'on procède immédiatement avec le second ballon à une autre opération qui s'exécute en tous points comme la première.

Avec les proportions ci-dessus indiquées, on obtient $0^k,600$ de fulminate humide ou $0^k,450$ de fulminate sec et 3 litres et demi de liqueur condensée.

Cet appareil joint aux avantages que je viens de signaler celui d'être moins coûteux que l'ancien.

IV. — *Théorèmes et Problèmes numériques ;*

PAR

J. N. NOËL,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Les Mathématiques élémentaires fournissent, comme on sait, un grand nombre d'exercices numériques, souvent remarquables, soit pour le fond soit pour la forme. Nous croyons pouvoir indiquer les suivants, comme addition à ceux que nous avons déjà publiés ailleurs et notamment dans le présent recueil des mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége.

Théorème I.

Si l'on multiplie 37 par les neuf premiers multiples de 3; les produits ont chacun trois chiffres égaux, dont la somme est égale à celle des chiffres du multiplicateur. On a, en effet, $37\times3=111$; etc.

Théorème II.

Si l'on multiplie 15873 par les neuf premiers multiples de 7; tous les chiffres de chaque produit sont égaux et leur somme est égale au multiplicateur diminué de l'un d'eux. C'est qu'en effet, $15873\times7=111111$; etc.

Théorème III.

Si l'on multiplie 8547 par les neuf premiers multiples de 13; tous les chiffres de chaque produit sont égaux, et leur somme doublée est égale au multiplicateur diminué de l'un d'eux. Cela vient de ce que $8547\times13=111111$; etc.

Théorème IV.

Si l'on multiplie 5291 par les neuf premiers multiples de 21; tous les chiffres de chaque produit sont égaux et leur somme est divisible par celle des chiffres du multiplicateur. Cela est fondé sur ce que $5291\times21=111111$; etc.

Remarques. Les produits de 481 par les neuf premiers multiples de 231 jouissent de propriétés analogues, aussi bien que les produits de 3003 par les neuf premiers multiples de 37. Toutes ces propriétés résultent de ce que 111111 a pour *facteurs premiers :* 37, 3, 7, 11 et 13 ; d'où $10101 \times 11 = 111111$.

Ces propriétés sont connues depuis longtemps, mais n'ont pas encore été énoncées, sous forme de théorèmes, a démontrer, dans les traités d'arithmétique, où cependant ces théorèmes devraient figurer, comme de curieux *exercices*, aussi bien que les théorèmes analogues, qui proviennent de la décomposition de 11111111 *en facteurs premiers* ou de 111111111111.

Théorème V.

Si l'on multiplie 143 par les neuf premiers multiples de 7 ; les deux chiffres extrêmes de chaque produit sont seuls significatifs et égaux au chiffre du multiplicateur de 7, pour former le multiple proposé. Cela vient de ce que $143 \times 7 = 1001$; etc.

Théorème VI.

Si l'on multiplie 143 par chacun des multiples de 7, depuis 1 fois jusqu'à 142 fois 7 ; chaque produit aura, pour ses deux extrémités, le nombre multiplicateur de 7. Ainsi, par exemple, $143 \times 994 = 142142$. Cela vient toujours de ce que $143 \times 7 = 1001$; etc.

Remarque. Il existe des propriétés analogues pour $91 \times 11 = 1001$ et pour $77 \times 13 = 1001$.

Théorème VII.

La différence de deux nombres composés des mêmes tranches de deux chiffres (en allant de droite à gauche, la première à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre) est toujours divisible par 99. C'est ce qu'on démontre aisément.

Théorème VIII.

Si l'on supprime, à volonté, une tranche de deux chiffres dans la différence de deux nombres inégaux, mais composés des mêmes tranches de deux chiffres, et si l'on donne la somme des tranches restantes, ou bien la somme des tranches de la première somme, si celle-ci a plus de deux chiffres ; la différence entre 99 et la seconde somme est précisément la tranche supprimée, si cette dernière n'est pas 00 ou pas 99. De sorte qu'on peut toujours *deviner* ainsi quelle est la tranche supprimée.

Remarques. Il existe des théorèmes analogues pour la différence de deux nombres inégaux, mais composés, soit des mêmes chiffres, soit des mêmes tranches de chacune trois chiffres, en allant de droite à gauche; la première à gauche pouvant n'avoir que deux chiffres ou un seul. Tous ces théorèmes reposent sur les différents *caractères* de divisibilité par 3, 9, 11, 7 et 13; lesquels sont eux-mêmes des théorèmes numériques importants.

Problème I.

On a deux coupons M et N d'une même étoffe et par conséquent de même *largeur;* on connaît le prix du plus petit N : comment calculer le prix du plus grand M?

Première solution. C'est évidemment en cherchant le *rapport* de M à N; or, pour cela, il faut d'abord diviser M par N, N par le premier reste P, P par le second reste Q, celui-ci par le troisième R, et ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à un reste ou nul ou si petit qu'on ne puisse plus diviser par lui. Avec quelques précautions, on obtient des quotients exacts en portant N sur M, P sur N, Q sur P, etc. On aura ainsi la seconde ligne du premier tableau ci-dessous :

M	N	P	Q	R	S	$M=6N+P$, $N=8P+Q$,
	6	8	3	4	2	$P=3Q+R$, $Q=4R+S$, $R=2S$.
6	1					
49	8	1				$Q=(2\cdot4+1)S=9S$,
153	25	3	1			$P=(9\cdot3+2)S=29S$,
661	108	13	4	1		$N=(29\cdot8+9)S=241S$,
1475	241	29	9	2	1	$M=(241\cdot6+29)S=1475S$.

Le second de ces tableaux résulte de ce que chaque dividende est le produit du diviseur par le quotient entier, plus le reste de la division; et quant au troisième tableau, on le forme en substituant la *valeur* 2S de R dans celle de Q, ces deux dernières dans celle de P, et ainsi en remontant jusqu'aux valeurs de N et M.

On voit que le dernier reste S est diviseur commun de M et N. Soit x le p. g. c. d. de M et N : puisque x divise M, N et par conséquent 6N, x divise aussi la différence M—6N ou P; par la même raison x divise P, puis Q, puis R, puis S; donc x ne saurait surpasser S, p. g. c. d. de R et S. D'ailleurs, S divisant M et N, ne saurait surpasser x, p. g. c. d. de M et N; ainsi il faut que $S=x$.

Donc *celui des restes qui divise le précédent, est le p. g. c. d. des deux grandeurs proposées.*

Remarquons d'ailleurs qu'ici toutes les divisions s'effectuent sur des *longueurs;* ce qui est plus simple et plus exact. De sorte que la longueur de S est *la plus grande mesure commune* des longueurs de M et N ; ces deux dernières valant respectivement 1475 fois et 241 fois la longueur de S.

Ces deux nombres sont les deux premiers termes de la dernière ligne du premier tableau : *chaque terme de cette ligne se trouve en multipliant le terme qui le suit par le quotient au-dessus de celui-ci et en ajoutant au produit le second terme à droite, dans la même ligne.* On voit, en effet, par les égalités du troisième tableau, que $9=2\cdot4+1$, $29=9\cdot3+2$, $241=29\cdot8+9$ et $1475=241\cdot6+29$.

Cette règle est générale et surtout indispensable, dans le *mesurage* des longueurs, pour éviter les erreurs de nouvelles divisions de M et N par S, afin de calculer les nombres 1475 et 241, que l'on obtient plus simplement en opérant *mentalement*, d'après la règle ci-dessus. Ayant donc M=1475 S et N=241S, il vient $M:N=1475:241$ et $M=\frac{1475}{241}N$. De sorte qu'on aura le prix de M en multipliant celui de N par la fraction 1475 sur 241 ; et telle est une première solution du problème proposé.

Deuxième solution. La solution précédente laisse ignorer quel est le degré d'approximation obtenu, pour le prix demandé ; et il est préférable de résoudre le problème à l'aide d'une *fraction continue.* Soit d'abord F la fraction qui exprime le *rapport* de la longueur M à la longueur N : comme le quotient de deux longueurs ne change point lorsqu'on divise ses deux termes par le dividende, il est clair que les égalités du second tableau ci-dessus deviennent successivement

$$F=6+\frac{1}{N:P},$$

$$N:P=8+\frac{1}{P:Q},$$

$$P:Q=3+\frac{1}{Q:R},$$

$$Q:R=4+\frac{1}{R:S},$$

$$R:S=2.$$

$$F=6+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}}}$$

$F=6,8,3,4,2$; où l'on a $6,8=6\frac{4}{5}$; $8,3=8\frac{1}{3}$; $3,4=3\frac{1}{2}$ et $4,2=4\frac{1}{5}$.

Le second de ces tableaux se déduit du premier : c'est l'expression de F en *fraction continue ;* et cette fraction continue ne dépend que des quotients 6, 8, 3, 4, 2, trouvés en cherchant la p. g. m. c. de M et N. C'est pourquoi, pour plus de simplicité, on écrit F=6, 8, 3, 4, 2 ; et si l'on termine cette fraction continue au premier terme 6, au second 8, au troisième 3, etc., il en résulte pour F des fractions ordinaires, appelées *réduites* et qu'il faut d'abord calculer.

Or, dans la première solution, les lignes successives du premier tableau, à partir de la troisième, sont formées d'après la règle très-simple qui a donné la dernière ligne, c'est-à-dire en regardant successivement N, P, Q, R, S, comme le p. g. c. d. de M et N; d'où il suit que les deux premiers termes de ces lignes, sont le numérateur et le dénominateur des réduites cherchées, et l'on a :

Fraction continue	F=6,	8,	3,	4,	2.	
Réduites successives. . . .	$\frac{6}{1}$,	$\frac{49}{8}$,	$\frac{153}{25}$,	$\frac{661}{108}$,	$\frac{1475}{241}$.	

Ces réduites sont nécessairement *irréductibles ;* et on les calcule, le plus simplement possible, d'après la règle que voici : *une réduite se trouve en multipliant, par le quotient auquel elle répond, les deux termes de la réduite immédiatement précédente, et en ajoutant aux deux produits respectifs les deux termes de la réduite qui précède de deux rangs.*

D'après la fraction continue proposée, il est évident que la valeur de F est plus grande que la première réduite, plus petite que la seconde, plus grande que la troisième, plus petite que la quatrième et plus grande que la cinquième; c'est-à-dire que *F est toujours comprise entre deux réduites consécutives :* elle diffère donc moins de l'une de ces deux réduites, que celles-ci ne diffèrent l'une de l'autre. Or, la différence de $\frac{661}{108}$ à $\frac{153}{25}$ est 1 sur 108·25; donc $F=\frac{153}{25}+<1$ sur 108·25, et à plus forte raison, $F=\frac{153}{25}+<1$ sur $(25)^2$. Réduisant en décimales on voit que la valeur de F ne surpasse pas 6,12 de 0,002. De même, la valeur de F n'est pas surpassée par la quatrième réduite 661 sur 108 ou 6,12037, de 1 sur $(108)^2$ ou de 0,0001 ; de sorte que F=6,1203, à moins de 0,0001 près.

Si donc N coûte 60 francs, M coûtera $60\times6,1203$ ou 367 fr. 22 : l'erreur n'est pas d'un centime de trop.

Troisième solution. Les deux solutions précédentes ne sortent pas des éléments d'arithmétique, où il est tout aussi naturel de représenter les choses ou les nombres par des lettres, afin de faciliter les déductions logiques du calcul, qu'il est naturel, à cet effet, de représenter les nombres par des chiffres. La première solution développe et établit complètement la théorie du *plus grand commun diviseur;* tandis qu'il y a peu à ajouter à la seconde solution, pour avoir la théorie complète des *fractions continues.* Mais ces deux solutions supposent qu'on n'ait pas sous la main, le mètre subdivisé en millimètres ; ce qui peut arriver.

La troisième solution, celle ordinairement employée, consiste à *mesurer* d'abord, avec le mètre, subdivisé en millimètres, les longueurs de M et de N ; puis a déduire, par le calcul, le prix de M de celui de N et des deux nombres décimaux résultants. On obtient ainsi une approximation, suffisante sans doute, mais dont on ne connaît pas bien le degré certain d'exactitude.

THÉORÈME IX.

Lorsque le dénominateur d est un nombre premier, on démontre aisément que la réduction de la fraction n sur d en décimales, 1° si elle donne un reste égal à $d-n$, après avoir calculé v chiffres, 10^v+1 est divisible par d, et réciproquement ; 2° la division de $n\cdot10^{\cdot v}$ par d donne le reste égal à n et par conséquent la première période p, ayant par suite $2v$ chiffres ; 3° enfin, si q désigne le premier quotient, on aura $p=q\cdot10^v+(10^v-1)-q$; de sorte que comme (10^v-1) est un nombre de v chiffres 9, les v derniers chiffres de la période p se trouvent mentalement, en écrivant à la droite de q les *compléments* à 9 des chiffres successifs, déjà calculés.

PROBLÈME II.

Quelles sont les fractions ordinaires où l'on peut abréger de moitié le calcul de la première période décimale?

Ce sont les fractions dont les dénominateurs, nombres premiers d, divisent 10^v+1. Or, pour $v=1,2,3,4$ et 8, on a $d=11$, 101, 7 ou 13, 10001 et 17. Il en est de même des fractions 1 sur 19 et 1 sur 71, dont les périodes ont 18 et 70 chiffres. On peut abréger davantage encore ; car pour 1 sur 19, par exemple, après avoir

calculé 05263, il reste 3 ou 3 fois 1 sur 19. Multipliant par 3 le quotient trouvé, on aura 15789, à écrire à la suite de ce quotient, avec le reste 9 ou 9 fois 1 sur 19. Il est donc facile maintenant d'écrire la période.

Remarque. On observe que le nombre de chiffres de la période, lorsque le dénominateur d est un nombre premier, est toujours ou $d-1$ ou un sous-multiple de $d-1$. Cela arrive même lorsque la fraction ne jouit pas des propriétés précédentes ; car pour $d=37$, la période a trois chiffres, et 3 est diviseur de $37-1$ ou de 36.

Problème III.

Deux mobiles M et N, ayant chacun un mouvement uniforme, suivent la même droite et vont dans le même sens : ils ont entre eux un intervalle de d mètres et partent au même instant ; M parcourt des chemins partiels devenant de 3 en 3 fois plus petits, le premier étant a et parcouru en une heure ; tandis que N fait des chemins partiels devenant de 5 en 5 fois moindres, le premier étant b et aussi fait en une heure. On demande, 1° quels temps x et y il faudra à M et à N, pour devoir s'arrêter, en vertu des deux conditions ci-dessus ; les derniers chemins partiels étant *infiniment petits?* 2° quel doit être le premier chemin partiel b, a étant donné, pour que M et N s'arrêtent au même point ou soient encore séparés de c mètres entre eux ?

Remarque. Pour résoudre ce problème, il suffit d'observer que la suite illimitée de fractions, de même numérateur n et dont les dénominateurs deviennent de c en c fois plus grands, le premier étant le nombre entier c, a pour somme n sur $(c-1)$.

J'appelle *série périodique simple*, cette suite illimitée de fractions ; et *série périodique composée*, la suite illimitée de fractions, dont les dénominateurs deviennent de c en c fois plus grands, le premier étant le nombre entier $c>1$, et dont plusieurs numérateurs se présentent sans cesse dans le même ordre : l'ensemble des fractions, positives ou négatives, ayant ces numérateurs, est une *période* de la série périodique composée. Sommant les fractions de chaque période, on aura une série périodique simple.

Théorème X.

Si l'on convertit la fraction irréductible n sur d en une suite d'autres dont les dénominateurs deviennent de c en c fois plus grands, le premier étant le nombre entier c : 1° la série

périodique résultante se termine ou ne se termine pas, suivant que c n'a pas ou a d'autres facteurs premiers que d ; 2° si n sur d est <1 et que c soit premier avec d, la série périodique illimitée, simple ou composée, commence par la première fraction de la période (facile à démontrer, chaque fois).

Remarque. Il serait intéressant de savoir, dans le second cas, quand la série périodique doit être simple et quand elle doit être composée. Les séries périodiques jouissent d'ailleurs de propriétés analogues à celles des fractions périodiques décimales, comme on sait.

Théorème XI.

Soit n_1 le nombre composé de n chiffres 1, en sorte, par exemple, qu'on ait $3_1=111=\frac{1}{9}(10^3-1)$. Si Sn_1 désigne la somme des nombres composés de 1, 2, 3, 4, ... n chiffres 1, on aura toujours

$$Sn_1=\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{1}{9}n.$$

Théorème XII.

Soit x la somme des neuf séries de nombres telles, que les termes successifs de l'une d'elles soient l'un des chiffres significatifs écrit 1, 2, 3, 4, ..., n fois : on aura toujours

$$x=\frac{50}{9}(10^n-1)-5n.$$

Problème IV.

Résoudre les systèmes d'équations, où v, x, y, z sont les inconnues, savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x}{a-m}+\frac{y}{a-n}+\frac{z}{a-p}=1,\\
&\frac{x}{b-m}+\frac{y}{b-n}+\frac{z}{b-p}=1,\\
&\frac{x}{c-m}+\frac{y}{c-n}+\frac{z}{c-p}=1.
\end{aligned}\right|\quad\left.\begin{aligned}
&v+y+z=m,\\
&av+x+by+cz=m^2,\\
&a^2v+2ax+b^2y+c^2z=m^3,\\
&a^3v+3a^2x+b^3y+c^3z=m^4.
\end{aligned}\right.$$

Remarque. Dans tous les systèmes semblables aux deux précédents, non-seulement on peut abréger l'élimination des inconnues; mais on peut rendre *logarithmiques* les expressions résultantes.

Problème V.

Les côtés latéraux d'un triangle équilatéral ABC sont divisés chacun en n parties égales au mètre, par des parallèles à la base BC. Deux mobiles M et N, ayant un mouvement uniforme chacun, partent en même temps du point A, et le second N, qui fait 3 mètre de chemin pendant que le premier en fait 2, parcourt successivement le premier mètre de AC et la première parallèle, le second mètre de AB et et la seconde parallèle, le troisième mètre de AC et la troisième parallèle, et ainsi juqu'à ce qu'il ait parcouru la base BC. Comme le premier mobile M doit parcourir successivement les mètres de AB, de rangs impairs, les mètres de AC, de rangs pairs, et les parallèles successives, ainsi que BC; on demande, 1° quel est le chemin total fait par N? 2° quel est le chemin total de M et quelle est sa position à l'instant où N finit de parcourir BC?

1° Il est aisé de voir que le chemin total de N est

$$n+\tfrac{1}{2}n(n+1) \text{ ou } \tfrac{1}{2}n(n+3).$$

2° Soit x le nombre des chemins partiels successifs, parcourus par M, à l'instant où N finit de parcourir B : le chemin total de M, à cette époque, est donc $\frac{1}{2}x(x+3)$; et comme ce chemin est les 2 tiers de celui de N, on doit avoir

$$x^2+3x=\tfrac{3}{3}n(n+3);$$
$$\text{d'où } x=-\tfrac{3}{2}+\sqrt{(\tfrac{3}{3}n^2+2n+\tfrac{9}{4})}.$$

Ici x doit être un nombre entier positif; il faut donc ajouter un certain nombre y à ce qui est sous le radical, pour que le nombre résultant soit un carré parfait; or, y est donné par le reste négatif de l'extraction de la racine carrée, où l'on a mis 1 de plus. Supposons $n=21$; nous aurons $y=4$ et $x=17$. Dans ce cas donc, 1° N a fait 252 mètres et se trouve à l'extrémité B; 2° M a fait le chemin total 168 mètres et se trouve sur la 17$^{\text{me}}$ parallèle, à 2 mètres du côté AC.

Remarque. On peut résoudre le problème lorsque le triangle ABC est rectangle en B et que les parallèles à BC divisent AB en n parties égales à 3 mètres et AC, en n parties égales à 5 mètres.

Problème VI.

Les côtés latéraux du triangle équilatéral ABC, sur le terrain, sont divisés chacun en n parties égales au mètre, par des parallèles à la base BC : toutes les parallèles sont accessibles, aussi bien que les parties égales au mètre, de rangs impairs sur AB, à partir de A, et de rangs pairs sur AC ; les autres parties étant inaccessibles. Au point A et à chacun des $n-1$ points de division de AB, est placé un objet ; un ouvrier M doit réunir ces n objets vers le point B, en marchant sur les parallèles et sur les parties accessibles de AB et AC, en allant les prendre un à un, à partir du premier en A. Comme après le transport du dernier objet, M est revenu au point B, on demande quel est le chemin total parcouru ?

Les chemins partiels sont : $n(n+3)-1$, $(n-1)(n+4)-1$, $(n-2)(n+5)-1$, ..., $(n-n+1)[n+3+(n-1)]-1$. La somme de tous ces chemins est donc

$$n^3-n[1+2+3+\ldots+(n-1)]+n[3+4+5+\ldots+(3+n-1)]$$
$$-[1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\ldots+(n-1)(n+2)]-n.$$

Sommant toutes les séries numériques, on verra que le chemin total demandé se réduit à $\frac{1}{3}n(2n^2+9n+4)-2$.

Problème VII.

Les côté du triangle équilatéral ABC sont divisés chacun en n parties égales au mètre, par deux systèmes de parallèles aux côtés AB et BC, tracés sur le terrain. Un boulet est placé à chacun des sommets et à chacun des points d'intersection des parallèles avec les côtés et entre elles ; or, un ouvrier M, partant du point B et marchant sur les côtés AB, BC et sur leurs parallèles, doit réunir tous ces boulets et les *empiler* vers B, en les allant prendre un à un : quel chemin total x devra-t-il faire pour cela ? Réponse : $x=\frac{2}{3}n(n+1)(n+2)$ mètres.

Remarque. Si les boulets sont de même calibre, on peut calculer le nombre de boulets qu'il faut placer à chaque côté de la base de la *pile* triangulaire vers B, complète ou tronquée.

Problème VIII.

Les côtés d'un triangle équilatéral ABC étant divisés chacun en n parties égales au mètre, par deux systèmes de parallèles aux deux

côtés AB et BC; ces parallèles divisant le triangle en n triangles réguliers de côtés 1, et en $\frac{1}{2}n(n-1)$ losanges égaux. Cela posé, si le triangle proposé tourne autour du côté BC, 1° quelles sont les sommes des volumes et des surfaces des anneaux engendrés par les n triangles partiels? 2° quelles sont les sommes des volumes et des surfaces des anneaux décrits par les losanges égaux?

Problème IX.

Le terrain ABC est un triangle isocèle, rectangle en B, dont les côtés égaux AB et BC sont divisés chacun en n parties égales au mètre, par deux systèmes de parallèles à ces côtés; l'hypoténuse BC étant aussi divisée, par ces parallèles, en n parties égales à $\sqrt{2}$. Une gerbe est placée à chacun des sommets A, B, C et à chaque point d'intersection des parallèles entre elles et avec les côtés; or, le voiturier doit réunir toutes les gerbes en un tas, placé vers B, d'où il partira d'abord, en allant les prendre une à une et en marchant sur AB, sur ses parallèles et sur BC. On demande le chemin total qu'il aura fait pour cela? Réponse : $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$ mètres.

Théorème XII.

Si le triangle ABC du précédent problème tourne autour du côté BC et décrit par conséquent un cône équivalent au quart de la sphère, ayant n pour rayon : 1° la somme des $n-1$ cylindres *inscrits* dans ce cône est $\frac{1}{6}\pi n(n-1)(2n-1)$; 2° la somme des volumes engendrés par les n triangles rectangles, ayant les hypoténuses sur AC, a pour mesure $\frac{1}{6}\pi n(3n-1)$; 3° enfin, la somme des surfaces engendrées par les périmètres de ces n triangles, est $\frac{1}{6}\pi n(3n-1)(2+\sqrt{2})$.

Problème X.

Le champ rectangulaire ABCD, moissonné et mis en gerbes, a ses côtés AB et BC divisés en n et m parties égales chacune à 4 mètres, par deux systèmes de parallèles à ces côtés; et de plus, une gerbe est placée à chacun des sommets et à chacun des points d'intersection des parallèles entre elles et avec les côtés; de sorte qu'il y a $(m+1)(n+1)$ gerbes en tout. Si le voiturier, avant de les placer sur sa voiture, doit les réunir en un tas vers B, d'où il

partira d'abord, pour les y transporter une à une, en marchant sur AD, sur ses parallèles, sur BC et sur AB; quel chemin total aura-t-il parcouru, après avoir placé la dernière gerbe sur le tas? Rép. $4(m+1)(m+n)(n+1)$ mètres.

Problème XI.

Le chemin total parcouru, pour réunir en un tas les $(m+1)(n+1)$ gerbes, d'après les conditions du précédent problème, serait plus petit, si le tas était placé au *centre* du rectangle : quel est alors ce chemin total? Réponse : $2(m+1)[n(m+n+3)+m+1]$, si m est impair et n pair.

Problème XII.

Le rectangle ABCD est divisé en mn carrés égaux, de côtés égaux à 4 mètres, et dont les centres sont ceux de carrés *curvilignes* égaux; les côtés de ces derniers étant chacun le quart de la circonférence 4π, inscrite dans chacun des premiers carrés. Or, si le rectangle tourne autour de AB : 1° quelle est l'expression de la somme des surfaces décrites par les contours des carrés curvilignes? 2° quelle est la somme des volumes engendrés par les aires de ces carrés?

Remarques. On peut résoudre les problèmes analogues pour les carrés *curvilignes*, dont les côtés sont les quarts des circonférences circonscrites aux mn carrés proposés.

De plus, les mn *rosaces*, formées par les circonférences décrites sur les côtés 4 des carrés, ont même centre chacune et mêmes sommets que ces derniers. D'ailleurs le contour de chaque rosace est 8π et son aire, $8\pi-16$; on peut donc calculer la somme des surfaces et la somme des volumes engendrés respectivement, autour de AB, par les contours et les airs des mn rosaces proposées.

Théorème XIII.

Lorsque les côtés du triangle équilatéral ABC sont divisés chacun en n parties égales au mètre, par deux systèmes de parallèles aux côtés AB et BC, il en résulte $\frac{1}{2}n(n-1)$ losanges égaux, ayant une diagonale égale au côté 1 mètre. De plus, si l'on décrit sur chaque côté d'un losange, comme diamètre, une demi-circonférence intérieure, il en résulte une rosace concentrique, dont 4π

est le périmètre et $2\pi-\sqrt{3}$, l'aire a ; de sorte qu'on a ainsi $\frac{1}{2}n(n-1)$ rosaces égales entre elles. Or, si le triangle ABC tourne autour d'un axe, parallèle à AC et mené par le sommet B : 1° la somme des surfaces, décrites par les contours des rosaces, a pour mesure

$$\tfrac{2}{3}n(n-1)(2n-1)\pi^2\sqrt{3};$$

2° la somme des volumes engendrés par les aires a, a pour expression

$$\pi n(n-1)(2n-1)\sqrt{3}.$$

Remarques. La recherche des deux formules demande un peu d'attention pour sommer les séries numériques en n. Ici le triangle ABC est divisé en $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ triangles équilatéraux, ayant chacun 1 mètre de côté ; et l'on peut calculer, 1° la somme des surfaces et la somme des volumes de révolution autour de BC, engendrés respectivement par les contours et les aires des triangles équilatéraux partiels ; 2° la somme des surfaces et celle des volumes engendrés respectivement par les contours et les aires des cercles inscrits ; etc.

Problème XIII.

Les droites a et b étant numériques et données, comment construire le côté x du carré x^2, exprimé par la fraction dont le numérateur et le dénominateur sont $(a+b)^4-a^4-b^4$ et $(a+b)^2-a^2-b^2$?

Problème XIV.

Les droites étant numériques, construire le rectangle et le parallélipipède rectangle, exprimés respectivement par

$$(a+b+c)^2-(a+b-c)^2-(a+c-b)^2+(b+c-a)^2,$$
$$(a+b+c)^3-(a+b+c)^3-(a+c-b)^3-(b+c-a)^3.$$

Le parallélipipède est équivalent à celui ayant le rectangle pour base ; quelle doit être la hauteur x de ce dernier parallélipipède rectangle ? Comment construire le cube de base équivalente au rectangle et quel est le rapport de ce cube au parallélipipède ?

Problème XV.

Soit v un nombre de deux chiffres et n_v le nombre formé en écrivant v successivement n fois ; en sorte, par exemple, que

$3_{11}=\frac{11}{99}(10^6-1)$: quelle est la somme en n des 90 séries dont les $n$ièmes termes respectifs sont : n_{10}, n_{11}, n_{12}, ..., n_{99}?

Problème XVI.

Les carrés extérieurs, faits sur les côtés $5n$, $4n$ et $3n$ du triangle ABC, rectangle en A, n étant un nombre entier donné, sont divisés chacun en n^2 carrés, ayant respectivement 5, 4 et 3 mètres de chaque côté. Un objet est placé à chacun des sommets de ces $3n^2$ carrés partiels ; ce qui fait en tout $3n(n+2)$ objets. Comme un ouvrier doit les réunir près du sommet A, d'où il partira d'abord, en les allant prendre un à un, et en marchant sur les côtés des trois grands carrés et des carrés partiels ; on demande quelle est l'expression en n du plus court chemin total qu'il devra faire, à cet effet?

Remarque. Même problème lorsque le triangle ABC, rectangle en A, est isocèle ; $4n$ mètres étant alors la longueur de l'hypoténuse BC.

Problème XVII.

Quel est le volume du parallélipipède rectangle, dont a, b, c sont les dimensions numériques inconnues? On sait que la seconde b est moyenne proportionnelle entre les autres ; que 228 est la mesure de la surface du parallélipipède, et enfin que 28,5 est le quotient de $(a+b+c)^3-(a+b)^3-c^3$ par $(a+b+c)^2-(a+b)^2-c^2$.

Remarques Si le quotient 28,5 est seul donné, avec la condition $b^2=ac$, on peut calculer les trois dimensions a, b, c pour que le volume du parallélipipède soit un *maximum* et sa surface, un *minimum*. — Enfin, on peut calculer les trois dimensions a, b, c, connaissant leur somme 19, la surface 228 et le volume 216.

Problème XVIII.

Les carrés extérieurs, faits sur l'hypoténuse $4n$ mètres et sur les côtés égaux à $2n\sqrt{2}$ du triangle rectangle isocèle ABC, étant divisés chacun en n^2 carrés égaux, n étant un nombre entier arbitraire ; on peut calculer l'aire et le contour de la rosace formée en décrivant sur les côtés de chaque carré, comme diamètres, quatre demi-circonférences intérieures. Cela posé, si la figure tourne autour du côté $4n$, égal et opposée à l'hypoténuse BC, quelle

seront les expressions en n de la somme des surfaces et de celle des volumes engendrés respectivement par les contours et les aires des rosaces proposées ?

Problème XIX.

Les nombres respectifs de mètres, qui expriment les longueurs de la base BC, des côtés latéraux et de la hauteur AD du triangle isocèle ABC, sont $8n$, $5n$ et $3n$, n étant un nombre entier donné. Si par chacun des points de division de la hauteur AD, en n parties égales à 3 mètres, on conçoit des parallèles à BC, divisant par suite AB et AC en n parties égales à 5 mètres, elles divisent aussi en parties égales à 5 mètres les parallèles à ces côtés, menées par les points de division de AD. Or, un objet est placé à chacun des points de division des trois systèmes de parallèles, entre elles et avec les côtés latéraux, pour le premier système, et avec BC, pour les deux autres : il y a de plus un objet à chacun des points A, B, C, D et à chacun des points de division de AD. De plus, deux ouvriers M et N, le premier faisant 4 mètres de chemin pendant que le second en fait 2, partent ensemble du milieu D, pour réunir tous les objets vers ce point, en les allant prendre un à un et en ne marchant sur aucune des parallèles à BC. Comme M doit transporter tous les objets distribués sur le triangle ABD et sur ses côtés, tandis que N ne doit transporter que les objets restants ; on demande quelle est l'expression en n du chemin total fait part M et quelle est la position de N à l'instant où M place le dernier objet ?

Théorème XIV.

Considérons le losange, ayant une diagonale égale au côté $2c$ donné ; soient construits, sur les côtés, quatre carrés extérieurs ; sur les côtés de chacun de ces carrés, comme diamètres, soient décrites des circonférences égales :

1° Les sommets extérieurs des carrés sont ceux d'un octogone *symétrique*, concentrique au losange, et dont les mesures respectives de l'aire et du contour sont $2c^2(8+3\sqrt{3})$ et $4c(3+\sqrt{3})$.

2° Les circonférences se coupent, quatre à quatre ; aux centres des carrés et du losange, où elles forment cinq rosaces, inscrites et concentriques ; et les mêmes circonférences se coupent, deux à deux, au milieux de quatre côtés de l'octogone et aux sommets

d'un carré inscrit concentrique; la diagonale de ce carré ayant pour mesure $2c(1+\sqrt{3})$.

3° Les sommets du même carré sont ceux de la rosace R, à huit feuilles égales quatre à quatre; les deux feuilles extrêmes de chaque branche étant égales aux deux feuilles moyennes de l'autre branche, et chaque fois les prolongements de l'une des deux branches de la rosace concentrique au losange proposé.

4° Enfin, le contour et l'aire de la rosace R ont pour mesures respectives $8\pi c$ et $8c^2(2\pi-3-\sqrt{3})$.

Remarques. L'octogone, le carré inscrit et les rosaces, étant des figures *symétriques*, on peut calculer aisément les surfaces et les volumes des *anneaux* engendrés par ces figures, tournant autour de l'un des côtés de l'octogne; ce qui donne lieu à trois genres d'anneaux, aussi bien que pour le losange proposé.

L'octogone a deux côtés parallèles égaux à $2c$, bases de deux triangles équilatéraux, et deux côtés parallèles égaux à $2c\sqrt{3}$, bases de deux triangles isocèles; or, si l'on construit, sur ces deux couples de côtés, des carrés extérieurs, on aura les sommets d'un second octogone, jouissant de propriétés analogues à celles du premier.

MONOGRAPHIE

DU

GENRE PRODUCTUS,

PAR

L. DE KONINCK, D. M.,

CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, ETC.

V. — *Monographie du genre Productus*,

PRÉFACE.

Quelle que soit la prévention que l'on puisse avoir contre les applications de la paléontologie, il sera impossible de contester que cette science n'ait fait d'immenses progrès depuis quelques années. Cependant elle est de création trop récente pour qu'il soit possible de la traiter convenablement dans un travail d'ensemble. Le nombre des espèces fossiles en ce moment répandues dans les collections, quoique déjà d'une certaine importance, est encore trop faible comparativement à celui des espèces dont la nature nous a jusqu'ici dérobé la connaissance ; il règne encore trop d'incertitude sur la détermination de la plupart d'entre elles, pour qu'un semblable travail dont l'exécution est nécessairement lente et difficile, ne se trouvât pas arriéré bien longtemps avant d'arriver à sa fin. Ceci s'applique non-seulement à l'ensemble de tous les êtres qui ont laissé des traces de leur existence dans les diverses couches de notre globe, mais encore à chacune de leurs classes en particulier.

A mon avis, la publication d'une liste de toutes les espèces d'animaux fossiles pourrait suffire aux besoins actuels de la science, pourvu qu'elle fût complète, méthodique et rédigée avec les soins convenables sous le rapport de la synonymie. Ne fît-elle que mettre un terme aux doubles emplois de noms que la multitude des publications actuelles, l'insouciance et quelquefois l'ignorance même ne font que trop fréquemment commettre, que ce serait déjà un grand bien (1).

(1) Tout en exprimant le désir qu'un semblable travail se fasse le plus promptement possible, je fais des vœux pour qu'il ne soit pas exécuté par un homme à idées systématiques, qui s'en rapporterait bien plus à son imagination qu'à l'observation directe. Une liste entreprise par un tel homme, pas plus que celle qui ne consisterait que dans la simple dénomination des espèces décrites, sans avoir égard aux doubles emplois, n'atteindrait le but désiré et ne ferait qu'augmenter la confusion actuelle.

Dès qu'un semblable travail aurait paru, il serait facile à chacun, soit en y intercalant des notes manuscrites, soit par des publications successives, de le perfectionner et d'y ajouter les espèces nouvelles au fur et à mesure de leur découverte.

Ce n'est qu'après la publication de cette liste et lorsqu'elle aura mis d'accord la majeure partie des paléontologistes sur la plupart des espèces décrites, qu'il sera possible d'entreprendre avec fruit un travail général qui comprendra à la fois les descriptions des espèces et leurs applications à la géologie.

Les Mollusques, qui par la nature calcaire de leur test, et par leur grande abondance, ont mieux résisté aux diverses causes qui ont anéanti plus ou moins complétement la plupart des autres animaux, jouent, comme on sait, un très-grand rôle dans la paléontologie. Aussi est-ce à cette classe que les réflexions précédentes s'appliquent plus spécialement. En effet, on ne fouille point un terrain fossilifère, on ne visite point de collections de fossiles, que l'on ne soit frappé aussitôt de la prépondérance numérique des mollusques, sur les autres classes d'animaux. Ce n'est donc pas sans motifs qu'ils ont plus particulièrement fixé l'attention des paléontologistes et que par suite, leur organisation et leur distribution sont mieux connues que celles de la plupart des autres fossiles.

Parmi les auteurs qui ont le plus contribué à perfectionner cette partie de la science, et qui ont le plus vivement fait sentir les avantages qu'on peut en retirer, je citerai surtout M. de Buch, l'un des plus savants géologues de notre époque. Avant la publication de ses mémoires sur la classification des *Ammonites*, des *Térébratules*, des *Spirifères*, des *Orthis* et des *Productus*, et avant qu'il n'eut fait ressortir les véritables caractères de ces divers genres, avec cette rare sagacité et cette finesse d'observation que nul ne possède à un dégré plus élevé, leurs espèces se trouvaient non-seulement distribuées sans ordre, mais en outre plusieurs d'entre elles étaient confondues ensemble et d'autres, en plus grand nombre, qui sont identiques, étaient considérées comme distinctes.

Est-il nécessaire de faire la remarque, que la plupart des erreurs commises, provenaient de ce que les auteurs dans leurs déterminations, négligeaient en général les caractères essentiels et invariables, pour s'attacher à d'autres plus fugitifs, que l'âge ou toute autre cause, modifie plus ou moins profondément, et parfois détruit d'une manière complète.

Le désir de contribuer à l'avancement de l'une des branches les

plus importantes des sciences naturelles, m'a engagé à me livrer à des recherches analogues à celles pour lesquelles le célèbre paléontologiste Allemand a fourni de si précieux modèles.

L'un des motifs qui m'ont fait choisir de préférence un genre qui a déjà fait l'objet des investigations de M. de Buch, c'est précisément, parce que je trouvais dans son travail, le meilleur guide que je pusse suivre pour le mien. Aux observations de ce savant, j'ai cru devoir en ajouter quelques-unes qui m'appartiennent et qui se trouvent déjà indiquées en partie dans mon ouvrage sur les fossiles du système carbonifère de Belgique (1).

Un second motif qui m'a fait préférer le genre en question à tout autre, c'est que quelques inexactitudes se sont glissées, dans les déterminations et les limites d'un petit nombre de ses espèces décrites dans l'ouvrage auquel je viens de faire allusion.

Enfin, pour dernière raison, je désirais faire connaître un certain nombre d'espèces nouvelles, dont les unes ont été découvertes par moi et les autres par diverses personnes, qui pour la plupart, ont mis beaucoup d'empressement à me les communiquer et quelquefois même, à en enrichir ma collection.

J'appellerai principalement l'attention sur les espèces que MM. le comte de Keyserling, de Verneuil et A. d'Orbigny ont rapportées les deux premiers de leurs voyages en Russie et le troisième de son voyage dans l'Amérique méridionale.

C'est grâces à l'amitié dont ces savants veulent bien m'honorer, grâces surtout à leur libéralité, à laquelle sont venues se joindre celles de M. A. Lewis, de M. de Buch et de l'Etat-Major du Corps impérial des mines de Russie, que je suis redevable des nombreux matériaux qui m'ont servi à la confection de mon travail. Je ne dois point oublier non plus les services que m'ont rendus MM. Valenciennes et Rouault, en mettant momentanément à ma disposition les échantillons de *Productus* que renferment les riches galeries du Museum d'histoire naturelle de Paris.

Parmi les autres personnes qui ont eu l'obligeance de me fournir des objets qui m'ont été utiles, je citerai particulièrement MM. Ansted à Londres, Ewald, Krantz et Böhmer à Berlin, Geinitz à Dresde, Hœninghaus à Crevelt, Roemer à Hildesheim, Germar à

(1) Descript. des animaux fossiles du terrain carbonifère de Belgique, Genre *Productus*, p. 147.

Halle, Philippi à Cassel, von Klipstein à Giessen et Waterkeyn à Louvain. C'est avec le plus grand plaisir que je saisis l'occasion d'exprimer à tous ces savants les vifs et sincères remercîments que j'ai déjà eu occasion d'offrir à quelques-uns d'entre eux.

Je n'ai pas cru devoir limiter ma Monographie aux *Productus* proprement dits; j'ai pensé qu'il était d'autant plus indispensable d'y joindre celle des *Chonetes* (1), que quelques-unes des espèces de ce genre, ont été rangées pendant longtemps parmi les *Productus*, tandis que d'autres se trouvaient classées parmi les *Orthis*, malgré les caractères qui les distinguent des uns et des autres.

Quoique la plupart des espèces que je décris, aient déjà été figurées soit par moi-même, soit par d'autres, il m'a semblé qu'il ne serait cependant pas inutile de les reproduire, afin de mieux faire ressortir leurs différences spécifiques et de parvenir, en supprimant ainsi toute incertitude à leur égard, à les faire admettre promptement et d'une manière définitive dans la méthode. J'ai pensé en outre, que si, en agissant de la sorte, je ne parvenais pas à éviter complètement aux paléontologistes la nécessité d'avoir recours à d'autres ouvrages, dont le moindre défaut est souvent d'être d'une grande rareté ou d'un prix excessif, je leur épargnerais au moins, dans la plupart des cas, des recherches longues et fastidieuses. Afin de donner plus de précision à cette partie de mon travail, j'ai moi-même dessiné au trait toutes les figures des planches qui l'accompagnent et les ai fait exécuter sous mes yeux, par M. Heusch, lithographe habile, aux talents duquel je me fais un devoir de rendre hommage.

Dans l'exécution de ces planches, je n'ai pas cru devoir toujours m'astreindre à figurer l'échantillon qui a servi de modèle à la représentation de l'espèce, avec tous les défauts qu'il pouvait offrir. J'ai cru pouvoir me permettre de le restaurer ou de le redresser, chaque fois, que par un nombre suffisant d'autres échantillons, j'avais acquis la certitude que je ne m'écartais point de la forme naturelle. Sans cela, il eut fallu avoir recours à un nombre démesuré de figures et de planches, ce qui, n'eut servi qu'à jeter la confusion dans l'esprit du lecteur.

Il y a quelques mois j'ai essuyé des reproches passablement amers et très peu courtois, de la part de M. Bronn, pour avoir osé dé-

(1) Cette monographie paraîtra dans la seconde partie de ce volume.

fendre le principe d'une rigoureuse justice, posé par l'*Association britanique pour l'avancement des sciences*. Ce principe consiste comme on sait, à faire suivre l'espèce du nom de l'auteur qui le premier l'a publiée en l'accompagnant soit d'une figure, soit d'une description suffisante pour la faire reconnaître, quelque soit le genre auquel on l'ait rapportée par la suite. M. Bronn veut au contraire, que le nom du premier descripteur fasse place à celui du créateur du genre nouveau auquel appartient l'espèce.

Malgré l'opposition de mon contradicteur qui, enivré sans doute par l'encens journalier qu'on lui brûle dans son pays, semble s'habituer un peu trop à parler en maître, je n'en continuerai pas moins à me conformer à cette règle et à repousser celle qu'il veut faire prévaloir, parce que je la considère comme *très mauvaise* en ce qu'elle tend à dépouiller de l'honneur qui leur revient, les auteurs qui ont écrit à une époque où l'on ne créait pas des genres comme on le fait aujourd'hui (1).

---

(1) L'article auquel je fais allusion a paru dans le numéro 31 du *Heidelberger Jahrbücher der Literatur* de cette année, à l'occasion d'un compte rendu de l'ouvrage de M. Nyst sur les fossiles tertiaires de Belgique, article dans lequel l'illustre Professeur de Heidelberg, s'amuse a relever plusieurs fautes typographiques, dont la correction a échappé à l'auteur Belge.

LISTE

PAR ORDRE CHRONOLOGIQUE DES OUVRAGES CITÉS DANS CETTE MONOGRAPHIE.

Nota. Les trois ouvrages précédés d'un astérique ne me sont connus que par des citations; j'ai pu consulter tous les autres.

1685–1692. M. LISTER. Historia sive Synopsis methodica Conchyliorum et Tubularum marinarum. 4. vol. in fol. cum tab. æneis.

1720. G. A. Volkmann. Silesia subterranea, oder Schlesien, mit seinem unterirdischen Schätzen, Seltsamheiten, welche dieses Land mit andern gemein oder zuvoraus hat. 4°, mit Kupfern.

* 1745. T. C. Hoppe. Kurze Beschreibung vrrsteinerter Gryphiten, daß solche zurückgebliebene Zeugen der algemeinen Sündfluth sind, nebst andrer Fossilien sohier in Gera befindlich sind, ingleichen eines Apfel-Baums so in der Christ-nach blühen und Früchten tragen soll; in einem Sendschreiben an Herrn Fr. Ern. Brückmann. 4°.

1762 u. 1769. J. E. J. Walch. Das Steinreich systematisch entworfen. 2 Bände. 8° mit Kupfern (La date de 1769 est celle de la 2me édition).

1768-1773. J. E. J. Walch und G. W. Knorr. Die Naturgeschichte der Versteinerungen, zur Erlauterung der Knorrischen Sammlung der Merkwurdigkeiten der Natur; Lapides ex celeberrimorum virorum sententia diluvii universalis testes. 4 part. in fol. (C'est sous le dernier de ces deux titres que Knorr fit paraître les planches de cet ouvrage en 1755).

1775. J. S. Schröter. Von dem innern Bau der Gryphiten. Mit Kupfern (Journal für die Liebhaber des Steinreichs und der Konchyliologie, B. II, S. 323). 8°.

1776. E. MENDES DA COSTA. Elements of Conchology: or,

an Introduction to the Knowledge of Shells. 8°, with Plates.

1779. J. S. Schröter. Lithologisches Real und Verballexikon, in welchem nicht nur die Synonymien der deutschen, lateinischen, französischen und holländischen Sprachen angeführt und erlautert, sondern auch alle Steine und Versteinerungen ausführlich beschrieben werden. 8 Bände. 8°, mit Kupfern.

1780. J. W. Baumer. Historia naturalis regni mineralogici ad naturæ ductum tradita. in 12°, cum tab.

1780. J. E. J. Walch. 1°. Beytrag zur Geschichte der Gryphiten. 2° Das schwarze Schiff (Der Naturforscher. Stuck XIV, S. 24 u. 33).

1781. S. J. Brugmans. Lithologia Groningana, juxta ordinem Wallerii digesta, cum synonimis aliorum, in primis Linnæi et Cronstedii. 8°, cum tabula ænea.

1784. J. H. Chemnitz. Neues systematisches Conchylien-Cabinet, geordnet und beschrieben von F. H. W. Martini; fortgesetzt durch J. H. Chemnitz, B. VII.

1785. Id. B. VIII. 4°, mit Kupfert.

* 1793. Ure. History of Rutherglen.

1796. W. Martin. Account of some Species of Fossil Anomiæ found in Derbyshire. Read April 5, 1796 (Transactions of the Linnean Society of London. vol. IV. p. 44, publié en 1698). 4°.

1798. Brugière. Encyclopédie méthodique, Article *Vers*, Planche 301, fig. 9 de l'Atlas.

1809. W. Martin. Petrificata Derbiensia; or figures and descriptions of Petrifications collected in Derbyshire. 4°, with Plates.

1809. E. F. von Schlotheim. Brief an dem Geheimen Rath Karsten (Der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin, Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde. B. IV. S. 74. Ce volume a été publié en 1810).

1811. J. Parkinson. Organic Remains of a former World, or Examination of the mineralized Remains of the Vegetables and Animals of the antidiluvial World. 3 vol. 4°, with Plates.

1813. E. F. von Schlotheim. Beiträge zur Naturge-

schichte, der Versteinerungen in geognostischer Hinsicht (Taschenbuch für die gesammte Mineralogie, von C.-C. Leonhard, B. VII, Erste Abtheilung).

1814-1829. J. SOWERBY. The mineral Conchology of great Britain. 6. vol. 8°.

1816. E. F. VON SCHLOTHEIM. Beiträge zur Naturgeschichte der Versteinerungen in geognostischer Hinsicht (Denkschriften der K. Academie der Wisssenschaften zu München für die Jähre 1816 u. 1817. B. VI. S. 13-36, herhausgegeben in J. 1820).

1819. J. B. P. A. DE LAMARCK. Histoire naturelle des animaux sans vertèbres. T. VI, 1re partie. 7 vol. in 8°.

1820. E. F. VON SCHLOTHEIM. Die Petrefactenkunde auf ihrem jetzigen Standpunkte durch die Beschreibung versteinerter und fossiler Ueberreste des Thier-und Pflanzenreiches der Vorwelt erlautert. 8°. Atlas in 4°.

1822-1823. E. F. VON SCHLOTHEIM. Nachträge zur Petrefactenkunde. 2 Theile, in 8°; Atlas in 4°.

1822. DE FERUSSAC. Tableaux systématiques des animaux mollusques classés en familles naturelles, dans lesquels on a établi la concordance de tous les systèmes. Petit in fol.

1823. L. W. DILLWYN. An index to the Historia Conchyliorum of Lister, with the name of the species to which each figure belongs, and occasional remarks. fol.

1824. H. G. BRONN. System der Urweltlichen Konchylien durch Diagnose, Analyse, und Abbildung der Geschlechter erlautert. Kl. fol.

1825. J. F. Krüger. Urweltliche Naturgeſchichte der organiſchen Reiche. 2 Bände, 8°.

1825. H. M. DUCROTAY DE BLAINVILLE. Manuel de Malacologie et de Conchyliologie. 2 vol. 8°.

1825. KÖNIG. Icones fossilium sectiles. fol° cum tab. lith.

1826. Defrance. Article Productus du T. XLIII, du Dictionnaire des sciences naturelles. 60 vol. 8°.

1826-1830. LINK. Handbuch der Physikalische Erdbeschreibung. 2 Bände, 8°.

1827. G. B. Sowerby. The Genera of recent and fossil shells for the use of students in Conchology and Geology. 2 vol. in 8° pl. (Genus *Producta*).

1827. J. W. Dalman. Uppställning och Beskrifning af de i . Sverige funne Terebratuliter (Konglich Vetenskaps Academiens Handlingar, for är 1827). Publié en 1828. 8° avec pl.

1828. L. von Buch. Ueber die Silicification organischer Körper, nebst einigen anderen Bemerkungen über wenig bekannte Versteinerungen (Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1828. Publié en 1831). 4°.

1828. J. Fleming. A History of British Animals, exhibiting the descriptive characters and systamatical arrangement of the genera and species of Quadrupeds, Birds, Reptils, Fishes, Mollusca and Radiata of the United Kingdom; including the indigenous, extirpated and extinct Kinds, together with periodical and occasional visitants. 8°.

1828. F. W. Hoenighaus. Planche représentant des moules intérieurs de Productus de Visé, accompagnée d'une page de texte.

1829. Sander Rang. Manuel de l'histoire naturelle des Mollusques et de leurs coquilles, ayant pour base de classification, celle de M. le Baron Cuvier. 18 avec Planches.

1829-1830. F. Holl. Handbuch der Petrefactenkunde. 4 Theile, 18°

1830. C. T. Menke. Synopsis methodica molluscorum generum omnium et specierum earum, quæ in Musæo Menkeano adservantur; cum synonymia critica et novarum specierum diagnosibus. 8°. Ed. altera. La 1re édition a paru en 1828.

1830. S. Woodward. A Synoptical Table of british organic Remains; in which, all the edited british fossils are systematically and stratagraphically arranged, in accordance with the views of the Geologists of the present day. 8°, with Pl.

1830-1837. G. Fischer de Waldheim. Oryctographie du Gouvernement de Moscou. Fol. avec pl.

1831. G. P. Deshayes. Description de coquilles caractéristiques des terrains. 8°, avec pl.

1832. G. P. Deshayes. Encyclopédie méthodique. — Histoire naturelle des Vers. T. III. Article *Productus*.

1832. A. H. Dumont. Mémoire sur la constitution géologique de la Province de Liége (Mémoires couronnés par l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles. — Années 1829 et 1830. — T. VIII). 4°, avec carte et coupes.

1833. C. J. Davreux. Essai sur la constitution géognostique de la Province de Liége (Mémoires couronnés par l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles. — Année 1830 — T. IX). 4°, avec planches.

1834. K. F. Klöden. Die Versteinerungen der Mark Brandenburg, insonderheit diejenigen, welche sich in den Rollsteinen und Blöcken der sudbaltischen Ebene finden. 8°, mit Steindruktafeln.

1834. J. de Carle Sowerby. Systematical, stratigraphical and alphabetical Indexes to the first sex Volumes of the Mineral Conchology of great Britain. 8°, with pl.

1835. Quenstedt. Ueber die Identität der Petrificate des Thüringischen und Englischen Zechsteins (Archiv für Naturgeschichte, herausgegeben von A. F. A. Wiegmann. T. II, p. 75). 8°, mit Steindrucktafeln.

1835-1837. H. G. Bronn. Lethæa geognostica; oder Abbildungen und Beschreibungen der für die Gebirgs-Formationen bezeichnendsten Versteinerungen. 2 Bände in 8°, mit Atlas in 4°.

1836. J. Phillips. Illustrations of the Geology of Yorkshire; or a description of the strata and organic Remains; accompanied by a geological Map, sections, and Diagrams, and figures of the fossils. Part II, the Mountain limestone district. 2 vol. 4°, with pl.

1836. J. B. P. A. De Lamarck. Histoire naturelle des animaux sans vertèbres, deuxième édition, revue et augmentée de notes présentant les faits nouveaux dont la science s'est enrichie jusqu'à ce jour; par P. G. Deshayes et H. Milne Edwards. T. VII,

p. 377, genre *Producte* par M. Deshayes. 11 vol. 8°.

1837. G. G Pusch. Polens Paläontologie oder Abbildung und Beschreibung der vorzüchlichsten und der noch unbeschriebenen Petrefakten aus den Gebirgsformationen in Polen, Volhynien und den Karpathen, nebst einigen allgemeinen Beiträgen zur Petrefactenkunde und einem Versuch zur Vervolständigung der Geschichte des Europäischen Auer-Ochsen. 4°, mit Steindruktafeln.

1837. W. Hisinger. Lethæa suecica, seu Petrificata Sueciæ iconibus et characteribus illustrata. Cum supplementis tribus. 4°, cum tabulis.

1837-1845. E. Desor. Traduction de la Conchyliologie minéralogique de la Grande Bretagne par J. Sowerby. 2 vol. 8°, dont un de planches.

1839. R. J. Murchison. The Silurian System, founded on geological researches in the Counties of Salop, Hereford, Radnor, Montgomery, Caermarthen, Brecon, Pembroke, Monmouth, Gloucester, Worcester, and Stafford; with descriptions of the coal-fields and overlying formations. 2. vol. 4° (Le 2me vol. contient les planches et la discription des fossiles par J. D. C. Sowerby).

1839. G. A. Kurtze. Commentatio de petrefactis quæ in schisto bituminoso mansfeldensi reperiuntur. 4°, cum tab.

1839. G. zu Münster. Beiträge zur Petrefaktenkunde. Erstes Heft. (Une seconde édition de ce volume a paru en 1843). 4°, mit Steindruktafeln.

1840. E. Eichwald. Die Thiere und Pflanzenreste des alten rothen Sandsteins und Bergkalks im Novogrodschen Gouvernement, erläutert von E. Eichwald. Bulletin scientifique publié par l'Acad. impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. VII, N° 6 et 7).

1840. E. Eichwald. Die Urwelt Russlands, durch Abbildungen erläutert. Erstes Heft. 3 vol. 4° (aus den Schriften der Kaiserlichen St-Peterburgischen minerologischen Gesellschaft besonders abgedruckt).

1840. J. D. C. Sowerby. Mineral Conchology of Great

Britain, continued. 8° (Il n'a paru que 2 livraisons de cette continuation).

1840. A. SEDGWICK, and R. J. MURCHISON. On the physical structure of Devonshire, and on the subdivisions and geological Relations of its older stratified Deposits, etc. (Transactions of the geological Society of London, vol. V, 2nd series, p. 633. La description des fossiles a été faite par J. D. C. Sowerby). 4°, with pl.

1840. F. BRAUN. Verzeichniss der in der Kreis-Naturalien Sammlung zu Bayreuth befindlichen Petrefacten. 4°, mit Steindrucktafeln.

1840. R. J. MURCHISON. Description de quelques-unes des coquilles fossiles les plus abondantes dans les couches dévoniennes du Bas-Boulonnais (Bulletin de la Société géologique de France T. XI, p. 250).

1840. E. DE VERNEUIL. Sur quelques espèces intéressantes de Brachiopodes des terrains anciens (Bulletin de la Société géologique de France, T. XI, p. 257). 8°.

1840. J. PRESTWICH. On the Geology of Coalbrook Dale (Transactions of the geological Society of London. 2nd series, vol. V, p. 413). 4°.

1840. L. VON BUCH. Beiträge zur Bestimmung der Gebirgsformationen in Russland (Aus den fünfzehnten Bande des Archivs für Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde, von C. J. B. KARSTEN und H. VON DECHEN, p. 3, besonders abgedruckt). 8°.

1840. A. GOLDFUSS. Petrefacta Germaniæ, tam ea quæ in Museo Universitatis regiæ Borussicæ Fridericiæ Wilhelmiæ rhenanæ servantur, quam alia quæcunque in Museis Hœninghausiano, Münsteriano aliisque extant, iconibus et descriptionibus illustrata. T. II. 3. vol. in fol°. cum tab.

1841. G. ZU MÜNSTER. Beiträge zur Petrefacten-Kunde, Heft. IV. 4°, mit Steindruckt.

1841. J. PHILLIPS. Figures and Descriptions of the Palæozoïc Fossils of Cornwall, Devon and West Somerset. 8°, with Plates.

1841. L. VON BUCH. Ueber Productus oder Leptæna (Ab-

handlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Erster Theil). 4°, mit Kupfertafeln.

1842. G. B. Sowerby. A conchological Manual. 2nd édition. 8°, with Plates.

1842. Bouchard-Chantereaux. Note sur le genre Productus (Annales des sciences naturelles, cahier de septembre). 8°, avec planche.

1842. R. Griffith. Notice respecting the Fossils of the Mountain Limestone of Ireland, as compared with those of Great Britain, and also with the devonian System. 4°.

1842. A. d'Orbigny. Voyage dans l'Amérique méridionale T. III. 4me partie, Paléontologie. 4°, avec planches.

1842. S. Kutorga. Verhandlungen der Kaiserlich. Russischen minerologischen Gesellschaft zu St Petersbourg. Jahr 1842. 8° mit Steindruckt.

1842. d'Archiac and E. de Verneuil. Memoir on the older deposits in the rhenish Provinces, preceded by a general survey of the Faune of the palæozoïc Rocks, and followed by a tabular List of the organic Remains of the Devonian System in Europe (Abstracted from the transactions of the geological Society of London, 2nd series, vol. VI, part II, p. 303). 4°.

1842. Landner Vanuxem. Geology of New-York Part III, comprising the survey of the third geological District. 4°.

1843. J. Hall. Geology of New-York. Part IV, comprising the Survey af the fourth geological District. 4°.

1843. J. Morris. A Catalogue of British Fossils, comprising all the genera and species hitherto described, with References to their geological Distribution and of the Localities in which they have been found. 8°.

1843. J. E. Portlock. Report on the Geology of the County of Londonderry, and of Parts of Tyrone and Fermanagh. 8°, with Plates.

1843. H. B. Geinitz und A. von Gutbier. Die Versteinerungen von Ober-Sachsen und der Lausitz, in *Gœa von Sachsen*, S. 61. 8°.

1843. F. A. Roemer. Die Versteinerungen des Harzgebirges. 4°, mit Steindruckt.

1843. F. DE CASTELNAU. Essai sur le système silurien de l'Amérique septentrionale. 4°, avec planches.

1843. L. DE KONINCK. Description des Animaux fossiles qui se trouvent dans le terrain carbonifère de Belgique. 2 vol. 4°. pl.

1844. W. KING. On a new Genus of palæozoïc Shells (Annals of Natural History, XIV, page 813). 8°.

1844. A. FAHRENKOHL. Bemerkungen über einigen Fossilien des Moskowischen und Kalugaischen Gouvernements (Bulletin de la Société impériale des naturalistes de Moscou T. XVII, 1844). 8° avec pl.

1844. J. KUTORGA. Zweiter Beitrag zur Palæontologie Russlands (Verhandlungeu der Kaiserlich Russischen mineralogischen Gesellschaft, zu St-Petersbourg, Jahr 1844, p. 61). 8°, mit Steindruckt.

1844. C. F. ROEMER. Das rheinische Uebergangsgebirge. 4°, mit Steindruckt.

1844. V. L. V. POTIEZ et A. L. G. MICHAUD. Galerie des Mollusques, ou Catalogue méthodique, descriptif et raisonné des Mollusques et coquilles du Muséum de Douai, T. II. 2 vol. 8°, avec planches.

1844. F. M'COY. A. Synopsis of the characters of the carboniferous Limestone fossils of Ireland. 4°, w. Plat.

1844. C. DARWIN. Geological observations on the volcanic Islands, visited during the voyage of H. M. J. Beagle (Les descriptions des coquilles fossiles sont de M. G. B. Sowerby). 8°.

1845. A. VON KLIPSTEIN. Beiträge zur geologischen Kenntniss der östlichen Alpen. 4°, mit Steindruckt.

1845. F. J. PICTET. Traité élémentaire de Paléontologie, ou histoire naturelle des animaux fossiles. T. III, 4 vol. 8°, avec planches.

1845, P. E. DE STRZELECKI. Physical descriptions of new South Wales and Van Diemen's Land (Les descriptions des coquilles fossiles sont de M. J. Morris). 8°, with Plates.

1845. R. J. MURCHISON, E. DE VERNEUIL and A. DE KEYSERLING. The Geology of Russia in Europe and the Ural Mountains. Vol. II, Part III, Paléontology. 2 vol. 4°, with Plates.

1845. E. Robert. Géologie, Minéralogie et Métallurgie des Voyages de la commission scientifique du Nord en Scandinavie, en Laponie, au Spitzberg et aux Feroë, pendant les années 1838, 1839 et 1840. vol. in 8°, avec Atlas in fol°.

1846. H. B. Geinitz. Grundriss der Versteinerungskunde (Dritte Lieferung). 8°, mit Steindrucktafeln.

1846. F. A. Schmidt. Petrefacten-Buch, oder allgemeine und besondere Versteinerungskunde, mit berücksichtigung der Lagerungsverhältnisse besonders in Deutschland. 4°, mit Steindrucktafeln.

1846. A. Keyserling. Geognostische Beobachtungen auf einer Reise in das Petschora-Land im Jahre 1843. 4°, mit Steindrucktafeln.

1846. L. de Koninck. Notice sur quelques fossiles du Spitzberg (Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. XIII, p. 592). 8°.

1846. Paillette et de Verneuil. Note sur le terrain carbonifère de Pola de Lena et de Mieres del Camino (Asturies) (Bulletin de la soc. géol. de France. 2^me^ série, T. III, p. 450).

1846. von Buch. Ueber Spirifer Keilhavii (Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus dem Jahre 1846, S. 145).

INTRODUCTION HISTORIQUE.

Il est singulier que malgré la profusion avec laquelle certaines espèces de *Productus* sont repandues dans les assises supérieures du terrain paléozoïque, elles aient si peu attiré l'attention des anciens naturalistes. Linné même, dont l'esprit observateur eut certainement été frappé par les formes si remarquables qu'affectent la plupart des espèces qui composent ce genre, ne semble pas en avoir connu une seule ; du moins ne trouve-t-on rien dans ses écrits ni dans ceux de ses commentateurs, qui puisse le faire supposer.

Presque tous les auteurs qui se sont occupés des *Productus* avant le commencement de notre siècle, les ont confondus avec les *Gryphœa*, dont ils rappellent à peu près la forme. C'est peut-être à cette circonstance, jointe au peu d'étendue que possèdent en général les roches qui les recèlent le plus abondamment, qu'il faut attribuer l'oubli dans lequel ils sont restés pendant si longtemps, alors que d'autres coquilles, bien moins importantes, mais provenant de terrains dont la surface découverte occupe un espace beaucoup plus considérable et se montre dans un bien plus grand nombre de localités, sont décrites et représentées dans une foule d'ouvrages.

Le premier travail dans lequel, à ma connaissance, sont mentionnés des *Productus*, est celui de Lister, intitulé : *Historia sive synopsis methodica conchyliorum*, dont la première partie a été publiée en 1685, tandis que la troisième, qui est celle qui renferme les *Productus*, ne date que de 1688. Le célèbre conchyliologiste Anglais, auquel la science est redevable d'un grand nombre d'observations importantes, ne semble avoir connu qu'une seule espèce de *Productus*, qu'il a figurée à différents âges ; c'est l'espèce à laquelle un de ses compatriotes, que la Paléontologie compte au nombre de ses meilleurs observateurs, a donné le nom de *Anomites (Productus) giganteus*.

Depuis la publication de l'ouvrage de Lister, il s'écoule plus d'un demi siècle avant qu'il soit de nouveau question dans la science de coquilles appartenant à ce genre. En 1745, Hoppe, trouvant encore, malgré les opérations commerciales auxquelles il se

livrait, le loisir de cultiver quelques branches des sciences naturelles, fit paraître une description assez détaillée des *Productus* du Zechstein des environs de Gera (1). Ce naturaliste semble principalement s'être attaché à faire ressortir la conformation extérieure de ces coquilles; à la page 17 de son ouvrage, on trouve l'observation assez importante, que leur surface est lisse ou chagrinée, ou bien hérissée d'un nombre plus ou moins considérable d'épines. Knorr, dont l'attention avait sans doute été éveillée par l'écrit de Hoppe, dut naturellement figurer le *Productus* de Gera, dans le grand ouvrage sur les fossiles, dont il a publié les planches en 1755 et dont Walch n'a fourni le texte qu'en 1768, quelque temps après la mort de Knorr. En effet, cette espèce s'y trouve représentée par cinq figures, dont deux seulement, c'est-à-dire celles de la planche B. I. *d.* sont assez reconnaissables (2).

A cette occasion, Walch entre dans quelques détails sur le genre *Gryphites*, tel qu'on le comprenait à cette époque et en divise les espèces en deux grandes sections ; la première section renferme les *Gryphites* à crochet sinué ou divisé dans son milieu et la seconde, celles qui sont dépourvues de cecaractère. C'est aux *Gryphites sinués*, (gespaltene Gryphyten) qu'il rapporte l'espèce de Gera et par conséquent les *Productus*. Un peu plus loin il fait observer, que ces mêmes *Gryphites* se distinguent encore de celles qui ont servi plus tard à la création du genre *Gryphæa*, par la couleur argentée de leur têst et par la dilatation en forme d'oreillette de chacun de leurs côtés. Ce dernier caractère permettrait ajoute-t-il, de leur donner aussi le nom de *Gryphites ailés* (*Gryphitæ alati*).

Walch a en outre représenté cette même espèce de *Productus*, dans un ouvrage dont il a publié la première édition en 1762 et dont la seconde a paru en 1769 ; il l'y confond encore avec les *Gryphæa* (3).

Kundmann et Muralto ayant émis l'opinion que les *Gryphites* devaient se ranger à côté des *Nautilus*, fournirent à Schröter l'occasion de leur démontrer leur erreur. Ce dernier publia à cet effet, en 1775, une dissertation accompagnée d'une planche, parmi

---

(1) Hoppe. Kurze Beschreibung versteinerter Gryphiten.

(2) Knorr und Walch. Die Naturg. der Verstein. II Theil, Tf. B. I. *d.* fig. 5 u. 6 Tf. D. III. *b.* fig. 1, 2 u. 3.

(3) J. L. J. Walch. Das Steinreich systematisch entworfen. I. Tf. 19. fig. 2.

les figures de laquelle se trouve celle d'un *Gryphite* (*Productus*) de Gera (1). Dans cet écrit, Schröter adopte complètement la division indiquée par Walch ; il termine en proposant de classer les *Gryphites* entre les genres *Ostrea* et *Terebratulites*.

A l'article *Gryphites* de son dictionnaire lithologique (2), ce même naturaliste se borne à reproduire les idées qu'il avait déjà fait connaître antérieurement et à copier presque textuellement ce que Walch avait écrit sur ces coquilles.

Da Costa paraît être celui des Conchiliologistes Anglais, qui le premier, après Lister, ait fait attention aux *Productus*. Cet auteur a représenté en 1776, le *P. semireticulatus*, MARTIN, sous le nom de *A. Polyginglymon, or Multarticulate Anomia, fossil of which the living species still remains undiscovered* (3). Il plaça cette espèce dans les *Anomia*, parmi lesquelles il comprenait les *Terebratula* et, persuadé d'après une apparence trompeuse, que la charnière était garnie d'une multitude de petites dents sériales, semblables à celles qui composent la charnière des *Arca*, il créa pour elle et pour ses congénères, une division particulière, sous le nom de *multarticulate Anomiæ* (4).

En 1780, Baumer, conseiller des mines du Landgrave de Hesse, a publié un abrégé de minéralogie dans lequel il a donné la figure assez mauvaise, du reste, d'un *Productus*, qui me semble être le *P. semireticulatus* MART. et qu'à l'exemple de ses prédécesseurs, il a placé parmi les *Gryphites sinués* (5). C'est à la même époque que Walch a publié un article dans lequel, il a donné une nouvelle description beaucoup plus étendue et beaucoup plus complète des *Gryphites (Productus)* de Gera, que celle qu'il en avait donnée antérieurement et que j'ai déjà eu occasion de citer (6). C'est dans ce même article, qu'il a consigné l'importante observation, que l'existence d'un certain nombre de longs tubes creux à la surface de leurs coquilles, était un caractère qui pouvait servir à distinguer ces *Gryphites* de tous leurs congénères. Il remarqua fort

(1) J. H. SCHROETER. Journal für die Liebhaber des Steinreichs und der Konchyliologie. II, S. 323, Tf. 1, fig. 5.

(2) J. H. SCHROETER. Lithologisches Real und Verballexikon. II. S. 308. 1779.

(3) M. DA COSTA. Elements of Conchology, p. 293, pl. 6, fig. 10.

(4) Id. ibid. p. 261.

(5) J. W. BAUMER. Hist. nat. regni mineral. p. 402, tab. III, fig. 29.

(6) Naturforscher, XIV, S. 27.

judicieusement que ces tubes communiquaient avec l'intérieur de la coquille et que leur accroissement avait dû s'opérer de dedans en dehors. Si je dois en juger par l'oubli complet dans lequel il est resté pendant plus d'un demi siècle, ce fait, quelque neuf et extraordinaire qu'il fut, ne parvint pas à piquer seulement la curiosité des conchyliologistes de l'époque. Walch s'en empara cependant pour corroborer l'opinion qu'il avait déjà émise, sur la nécessité de former de ces coquilles un nouveau genre et pour les classer à côté des *Spondylus* de Linné.

Le même naturaliste a fait suivre la dissertation dont je viens de parler, d'une notice sur une autre espèce de *Productus*, dont il donne une très-bonne figure (1). Mais le crochet de la coquille se trouvant engagé dans la roche, l'auteur resta dans le doute sur la place qu'il devait assigner à l'espèce. Il s'est demandé si le crochet était recourbé et s'il ne se terminait pas en pointe à l'instar de celui des *Gryphites*, ou bien s'il était perforé et semblable à celui des *Terebratulites*, ou enfin s'il ne se recourbait pas sur lui-même et si la coquille dont il faisait partie n'appartenait point aux univalves et ne devait pas former un genre intermédiaire entre les *Oreilles de mer* (*Haliotis*) et les *Nautilites?* Quoiqu'il ne se soit pas prononcé à cet égard, c'est cependant à la dernière supposition que Walch semble avoir accordé la préférence, à en juger par le titre même de sa notice (2).

En 1784, Chemnitz fit graver parmi les Peignes, l'espèce de *Productus* qui porte actuellement le nom de *P. pustulosus* et en donna une assez bonne description, sous le nom de *Pyxis transversim striata*, ou *Die Quergestreifte Dose* (3). Mais un an après, l'inspection de la figure du *P. semireticulatus*, donnée par Da Costa, lui fit reconnaître l'erreur dans laquelle il avait été entraîné relativement à la classification qu'il avait adoptée et il s'empressa de rectifier sa description, en se rangeant entièrement de l'opinion de l'auteur Anglais (4), qui, ainsi que je l'ai déjà dit, en a fait une *Anomia* (5). Cependant tout en faisant cette rectification,

---

(1) Naturforscher, XIV, S. 33, Tf. I, fig. 2.

(2) Cette notice est intitulée : *Das schwarze Schiff*, c'est-à-dire le *Nautile noir*.

(3) Martini-Chemnitz. Neues syst. Conch. Kabinet. VII, Tf. 561. Tf. 63, fig. 605 u. 606.

(4) Id. Ibid. VIII S. 69.

(5) Voir la page précédente.

Chemnitz commit une nouvelle faute, en considérant l'espèce représentée par lui-même, comme identique avec celle figurée par Da Costa, tandis qu'il suffit de confronter les deux figures, pour s'assurer à la première inspection, qu'elles sont parfaitement distinctes l'une de l'autre.

Il est étonnant, que Chemnitz et Walch, qui, ainsi qu'il est facile de s'en assurer par leurs écrits, avaient reçu de Belgique les *Productus* qu'ils ont décrits et figurés, n'aient pas cherché à s'en procurer d'autres espèces. Il est surtout remarquable que le dernier de ces deux Naturalistes, dont la collection renfermait bon nombre de fossiles du calcaire carbonifère de Visé et des environs de Namur, parmi lesquels il devait inévitablement se trouver des *Productus*, n'en ait fait figurer qu'une seule espèce et qu'il n'en ait point communiqué à Knorr, dont l'ouvrage sur les fossiles a été en partie composé sur des objets de sa collection.

En 1793, Ure a publié sous le titre de *History of Rutherglen*, un ouvrage dans lequel il est question de quelques *Productus*, sous les noms d'*Anomiæ echinatæ* et de *Conchæ pilosæ*, en faisant sans doute allusion aux tubes dont la surface de la plupart de ces coquilles est hérissée. Dans l'espèce figurée sous ce dernier nom, on reconnait facilement celle que Bruguière fit figurer quelque temps après parmi les *Arca* (1).

Par les détails dans lesquels je viens d'entrer, l'on a pu se convaincre, que, si la plupart des auteurs qui ont traité des *Productus*, ont cherché à les classer, il n'y en a que deux qui leur aient assigné une place convenable, en les introduisant dans le genre *Anomia* au *Anomites*, qui à cette époque, bien que correspondant à peu près à la division actuelle des BRACHIOPODES, servait de réceptacle à toutes les coquilles bivalves, d'une nature plus ou moins douteuse.

En 1796, Martin, voulant remédier à cet état de choses et établir le genre *Anomia* sur des bases plus solides, fit insérer dans le 4^{me} volume des *Transactions of the Linnean Society of London*, une notice, dans laquelle il chercha à prouver par des exemples tirés de la conformation de plusieurs espèces fossiles, dont il a donné la figure, que la perforation du crochet de la grande valve ne constituait point le caractère essentiel des *Anomia*,

(1) Encycl. méth. Art. *Vers*. pl. 311, fig. 9.

que dans certaines espèces, cette ouverture n'existait point et que dans d'autres, elle était remplacée par une ouverture triangulaire située immédiatement au-dessous du crochet de la grande valve. Il termine, en proposant de ranger parmi les *Anomia*, « toutes les bivalves à valves inégales, dont le crochet de l'une des valves est plus allongé ou plus proéminent que celui de l'autre (généralement la petite valve), et en général recourbé au-dessus de la charnière (1) » et de les diviser en *Imperforées* et en *Perforées*. Les imperforées sont en outre sousdivisées en *Anomia* ayant une valve convexe et une valve concave ou plane et à charnière courbe ou droite. D'après la figure donnée par Martin, ces dernières comprennent exactement les *Productus*, tels qu'ils sont admis en ce moment. Les *Anomia perforées* sont sousdivisées en *Anomia* correspondant à nos *Terebratula*, c'est-à-dire dont le crochet est percé d'une ouverture circulaire, et en *Anomia* dont la grande valve est garnie d'une ouverture triangulaire, et qui comprennent par conséquent la plupart de nos *Spirifer*.

Mais le travail de Martin était d'une portée trop élévée et si peu en rapport avec les idées et les travaux de ses contemporains qu'il passa presque complètement inaperçu et fut bientôt voué à un oubli complet.

Cependant reprenant plus tard son travail, cet observateur distingué modifia légèrement ses idées, tout en les étendant et en les rectifiant, dans son ouvrage sur les fossiles du Derbyshire, dont la première partie parut en 1809 et dont la continuation fut malheureusement interrompue par la mort prématurée de l'auteur. Il y fit de nouveau observer que la charnière en ligne droite et l'imperforation du crochet des *Productus*, jointes à la forme plane ou concave de leur petite valve, étaient des caractères suffisants pour autoriser leur réunion en un genre, ou du moins en une section particulière qu'il plaça à côté des *Spirifer* et des *Terebratula*, mais qu'il eut le tort de ne point nommer.

Martin est même allé plus loin; il a reconnu parfaitement les moules intérieurs de plusieurs des espèces de *Productus* qu'il a figu-

---

(1) To consider *all bivalves with unequal valves, the beak of one being produced or more prominent than that of the other (generally the smaller valve), and for the most part curved over the hinge*, as belonging to the *genus* of *Anomia*. Trans. IV, p. 49.

rées et en a décrit quelques-uns. C'était déjà beaucoup pour l'époque à la quelle ce Paléontologiste a publié son travail, mais il ne s'en tint point encore là. A la page 7 de l'*arrangement systématique* des fossiles, arrangement qui se trouve placé à la fin de son ouvrage, il a émis l'opinion si bien développée par M. de Buch, que les excavations qui ont dû se trouver à l'intérieur de la valve dorsale de son *Anomites giganteus*, ainsi que l'attestent les deux protubérances du moule intérieur de cette espèce, ont dû être déterminées par la présence des appendices spiraux qui caractérisent le genre *Anomia* (1), c'est-à-dire les BRACHIOPODES en général.

Ainsi qu'on vient de le voir, les travaux de Martin sur les BRACHIOPODES sont empreints d'un cachet d'exactitude et de précision que l'on n'est pas habitué à trouver dans ceux des Naturalistes de son époque; aussi Sowerby n'a-t-il pas dû faire de grands efforts d'imagination pour établir (en 1814) ses genres *Productus* et *Spirifer*.

Il n'avait qu'à appliquer ces noms, qui auraient pu être plus heureusement choisis, aux coupes si bien établies par Martin à qui revient ainsi l'honneur d'avoir le premier convenablement caractérisé des coquilles que l'on n'avait que trop longtemps négligées.

Depuis cette époque le nombre des espèces de *Productus* augmenta rapidement; aux 7 espèces décrites par Martin vinrent bientôt se

---

(1) Cette dernière remarque de Martin est si importante que je crois que les conchyliologistes qui ne possèdent point son ouvrage, devenu très-rare, me sauront gré de la reproduire ici : « Specimen *c* is the *nucleus* of the petrifaction, wholly « divested of the coast or layers, and consequently exhibiting the interior form « of the original. — This, as in most *Anomiæ*, appears to have been very remar- « kable. — Near the beak of the *nucleus* arise two large, roundet gibbosities, one « on each side, somewhat flattened, wrinkled on the surface, and serrounded by « a strong furrow; beneath these towards the margin, two others, generally less « in diameter, but more convex or prominent, and with their surface smooth, « without furrows or wrinkles. It is evident that these prominences in the coast « must have taken their form, from cavities on the inner surface of the original « shell; the use of these cavities, however, it will be scarcely to ascertain.—Per- « haps those near the beak might contain the twisted *appendages*; which are pecu- « liar to the genus *Anomia*, and which are first noticed, we believe, by Davila, « and described by him as two slender, gristly ligaments, proceeding from each « side of the inner part of the beak, and returning to it again after various involu- « tions. The furrows surrounding the upper gibbosities of our fossil, are probably « impressions from these *appendages*; or, at least, from some other bodies of a « like nature. »

joindre celles que Sowerby père et fils publièrent dans leur *Mineral Conchology*, sans toutefois s'inquiéter de la place qu'elles devaient occuper dans la méthode. Ce n'est qu'en 1834, lors de la publication de son tableau systématique des coquilles décrites dans les six premiers volumes de cet ouvrage, que Sowerby fils les plaça parmi les Brachiopodes, entre les genres *Orbicula* et *Spirifer*.

De Lamarck ne connut qu'une seule espèce de *Productus*, et, chose assez étrange, il la plaça parmi les *Tridacna*. Il est probable que c'est à l'affaiblissement de sa vue, par suite de l'ophthalmie dont il souffrait à l'époque à laquelle il a décrit cette espèce (1819), que doit être attribuée l'erreur dans laquelle ce savant Conchyliologiste a été entraîné.

Conybeare et Phillips proposèrent en 1822 de changer la désinence du genre *Productus* et de lui substituer le nom de *Producta*, pour le mettre en rapport avec la terminaison de la plupart des autres divisions génériqnes des Brachiopodes. Mais ce changement n'étant pas plus heureux que ne l'a été le choix du nom, qui a pour lui l'antériorité, la plupart des auteurs ont continué à donner la préférence à celui de Sowerby, préférence que je crois devoir lui accorder également.

Vers la même époque von Schlotheim décrivit de nouveau le *Productus* de Gera (P. *horridus*. Sow.) (1) qu'il avait déjà figuré en 1809 (2) et décrit en 1813 (3) sous le nom de *Gryphites aculeatus*, sans rien nous apprendre, qui ne fut déjà connu par les publications de Hoppe et de Walch. Cet auteur ne fut pas plus heureux pour une seconde espèce (le *P. punctatus*, Mart.) provenant du calcaire carbonifère de Belgique, à laquelle il donna le nom d'*Anomites thecarius*, bien qu'elle fut déjà décrite et nommée depuis longtemps, par Martin et par Sowerby, dont il ne semble pas avoir connu les ouvrages (4).

Tandis que par les travaux des Conchyliologistes Anglais, le genre *Productus* prenait de plus en plus d'extension, ceux du continent se bornaient en général à enregistrer les différentes espèces nouvelles et à introduire les descriptions, dont il leur était le plus souvent impossible de constater l'exactitude, par le défaut des

(1) v. Schlotheim. Die Petrefaktenkunde. S. 293.
(2) Magaz. des Gesells. Naturf. Freunde in Berlin, IV, S. 74.
(3) v. Leonhard. Miner. Taschenb. VII, S. 58.
(4) Schlotheim. Nachträge zur Petrefaktenk. Erste Abth. S. 63.

matériaux nécessaires à l'établissement d'un contrôle rigoureux. Cependant en 1826, M. Defrance, au zèle duquel je me plais à rendre le plus éclatant hommage, décrivit quatre espèces de *Productus*, qu'il crut nouvelles, mais dont une seule mérite d'être conservée (1). Ce savant, confondant avec ce genre une espèce de *Leptæna* des environs de Valognes, dont le bord cardinal est garni d'un grand nombre de petites dents sériales, tomba dans la même erreur qu'avait commise Da Costa un demi siècle avant lui, en s'empressant de trop généraliser ce fait et d'attribuer aux *Productus* une charnière semblable à celle de certaines *Arca*, avec laquelle elle n'offre pas la moindre analogie (2).

Link, dans son ouvrage intitulé : *Handbuch der physikalische Erdbeschreibung*, dont le premier volume a paru en 1826, a désigné les *Productus* sous le nom générique de *Protonia*, qui eut été préférable à celui que l'on a été forcé d'adopter à cause de son antériorité.

Dalman, dans son Mémoire sur les BRACHIOPODES de la Suède ; inséré dans les Mémoires de l'Académie de Stockholm (année 1827), comprit mal le genre *Productus*. C'est à tort qu'il le confondit avec son genre *Leptæna*, qui, formé de coquilles à double area, ne pouvait en aucune manière être considéré comme son équivalent.

En 1828 M. Hœninghaus publia à Crefeld, une planche d'intérieurs de *Productus* de Visé, remarquables par la conservation parfaite d'impressions en arbuscules, produites par des ramifications qui ont dû se trouver en relief à l'intérieur des coquilles (3). Il est probable que ces ramifications différentes pour chaque espèce en particulier, sont dues au foie entre les lobes duquel elles ont été secrétées et dont elles représentent la forme.

---

(1) Dict. des sc. nat. XLIII. Art. *Productus*.

(2) Voir pag. 90.

(3) Induit en erreur par la notice qui accompagne la planche, dont je viens de parler, ainsi que par l'apparence des moules que j'avais sous les yeux, j'ai eu tort de soutenir un avis contraire à celui de M. Deshayes et de croire que les ramifications intérieures des *Productus* étaient creusées dans la coquille. Depuis, j'ai pu m'assurer que le relief qui se trouve sur les moules, n'est qu'apparent et provient de ce qu'en détachant la coquille, on ne peut dégager sa partie ramifiée qui, restant incrustée par ses replis, se brise à sa base et laisse un relief trompeur, qu'il est facile de faire disparaître au moyen d'un burin ou de tout instrument terminée en pointe.

Il semble que l'apparition de cette planche a produit une assez vive impression en France et qu'elle n'a pas peu contribué à fixer l'opinion des Conchyliologistes de ce pays et à y faire admettre définitivement parmi les Brachiopodes, un genre que de Ferussac et Latreille ont rangé dans la famille des Ostracées et dont MM. de Blainville et Rang n'ont formé qu'une section du genre *Terebratula*.

M. Deshayes, dans les divers ouvrages qu'il a publiés en 1831 (1), 1832 (2) et 1836 (3) a admis le genre *Productus*, mais en lui donnant en même temps une extension beaucoup plus considérable que celle qui lui avait été attribuée par Sowerby et que lui eut donnée Martin, si la mort n'était venu l'enlever au milieu de ses travaux. Le savant Conchyliologiste Français, accordant une trop grande importance au ligament qui sert à fixer la plupart des Brachiopodes, et négligeant complètement l'existence et la forme de l'area, comprit parmi les *Productus*, toutes les espèces de Brachiopodes à charnière articulée, dont l'ouverture est complètement oblitérée. L'admission dans ce genre, d'un certain nombre de *Spirifer*, de *Leptæna* et d'*Orthis*, fut la conséquence logique à laquelle cette nouvelle définition entraina son auteur.

En 1835, M. Bronn, dans sa *Lethæa geognostica*, préféra le nom de *Strophomena* de Rafinesque à celui de *Productus* de Sowerby, malgré la priorité que ce dernier avait en sa faveur ; il en changea en même temps les limites en y introduisant des *Leptæna* et des *Chonetes*. En outre, la confusion qui règne dans la synonymie du petit nombre des espèces qu'il a décrites, nous donne la certitude qu'il ne les a pas connues ou qu'il ne les a pas suffisamment étudiées. Il ne racheta que bien faiblement ces fautes, par la séparation de son genre *Strophomena* en deux sections, dont la première comprend les coquilles garnies de tubes et dépourvues d'area, c'est-à-dire, les *Productus*, et la seconde, les coquilles privées de tubes et à double area ou les *Strophomena* (*Leptæna*) proprement dits.

En 1836 et en 1841, M. Phillips publia deux ouvrages (4) dans lesquels il décrivit sous le nom générique de *Producta*, un assez

(1) Description de Coq. caract. des terrains.
(2) Encycl. méth. *Vers*, Article *Productus*.
(3) Nouvelle édition des Anim. sans vert. de Lamarck.
(4) Geology of Yorkshire et Palæozoïc fossils.

grand nombre d'espèces nouvelles dont quelques-unes, à mon avis, font double emploi et devront être rayées de la liste des espèces connues, ainsi que les *Leptæna* que ce savant Géologue a introduits dans ce genre.

Le même auteur a en outre placé parmi les *Pinna*, une excellente espèce de *Productus*, déjà décrite par M. Fischer, mais confondue par ce dernier avec les *Mytilus*, par M. Eichwald avec les *Pecten*, et un instant avec les *Lima* par M. de Buch.

En 1839, le comte de Münster, dans la première partie de ses *Beiträge zur Petrefakten-Kunde*, a décrit une nouvelle espèce de *Productus* du Zechstein, sous le nom générique de *Spondylus*. Dans la 4^me^ partie de ce même ouvrage, il en a fait connaître une autre espèce également nouvelle, provenant des couches triasiques de St.-Cassian Ce même auteur a donné de nouveaux noms à des espèces dont des échantillons se trouvent déposés au Musée de Beyreuth; ces noms ont été publiés en 1840 par M. Braun dans son *Verzeichniss der in der Kreis-naturalien-Sammlung zu Bayreuth befindlichen Petrefakten*. Il est fâcheux que ces noms ne soient accompagnés au moins d'une bonne figure, ou d'une description suffisante, ce qui eût permis de porter un jugement sur la valeur des espèces auxquelles ils ont été appliqués. Des ouvrages semblables loin de servir à l'avancement de la science, ne sont propres qu'à lui faire les plus grands torts.

Dans le courant de cette même année, il a été publié plusieurs mémoires dans lesquels il est question des *Productus*. Les auteurs de ces mémoires, dont les titres se trouvent indiqués au commencement de mon travail, sont MM. de Buch, Eichwald, J. D. C. Sowerby, Murchison et de Verneuil. Le mémoire de ce dernier savant, auquel la science est déjà redevable d'un grand nombre de travaux importants, a eu principalement pour objet, de faire connaître une espèce de ce genre, provenant du calcaire carbonifère de Visé, remarquable par un prolongement en forme de tube de la valve supérieure. Ce prolongement a été cause que presqu'immédiatement après l'apparition de cette publication, mais sans en avoir eu connaissance, M. Goldfuss en a fait une *Clavagella*.

En 1842, M. Bouchard-Chantereaux inséra dans les *Annales des sciences naturelles* une notice très-intéressante, ayant uniquement pour objet l'étude de la charnière des *Productus* parmi lesquels ce naturaliste me parait avoir rangé quelques espèces appartenant au

genre *Leptæna*. C'est aussi à la même époque, que parut la partie paléontologique du bel ouvrage que M. d'Orbigny achève en ce moment, et dans lequel il a consigné ses nombreuses observations et décrit les divers objets qu'il a recueillis pendant son voyage dans l'Amérique méridionale. Ce Naturaliste distingué y a représenté et décrit plusieurs espèces de *Productus* dont il s'est habilement servi, pour déterminer l'âge relatif des couches calcaires qui les renferment.

Mais de tous les travaux sur les *Productus* qui ont paru dans ces dernières années, la Monographie que M. de Buch a publiée, est bien certainement celui qui mérite de fixer le plus particulièrement l'attention des Paléontologistes.

Ainsi que le fait observer fort bien mon savant ami, M. de Verneuil, cette Monographie est venue couronner dignement l'ensemble des travaux de son illustre auteur sur l'organisation et la classification des Brachiopodes.

Depuis la publication de cet excellent travail, il a encore paru plusieurs ouvrages qui traitent des *Productus*. Je vais en signaler les principaux. Dans les *Mémoires de la Société Impériale de Minéralogie de St-Pétersbourg* année 1844, se trouve un mémoire de M. Kutorga, dans lequel ce Paléontologiste décrit plusieurs espèces nouvelles de *Productus*, dont la plus remarquable est sans contredit, celle qui a quelqu'analogie avec le *P. proboscideus* de Visé. En même temps a paru a Dublin, une Monograghie intéressante des fossiles du calcaire carbonifère d'Irlande, pour la rédaction de laquelle, M. M'Coy s'est servi de la belle collection de M. Griffith; parmi les Brachiopodes, on distingue un assez grand nombre de *Productus*, dont quelques-uns sont considérés comme nouveaux. A en juger par les figures et la description de ces derniers, je crois pouvoir affirmer que M. M'Coy a placé un véritable *Productus* parmi ses *Leptæna* (*Chonetes*), et que d'un autre côté une espèce de *Leptæna* ou de *Chonetes* est inscrite un nombre des *Productus*.

Le nouveau genre que M. King a créé en 1844, sous le nom *Strophalosia*, ne me parait pas suffisamment caractérisé pour séparer des *Productus*, les espèces qu'il y rapporte. Je regrette beaucoup que le savant Directeur du Musée de Newcastle ait cru devoir refuser de me communiquer ses observations à cet égard.

Enfin le Magnifique ouvrage sur la *Géologie de la Russie et des Monts-Ourals* que Sir Roderick Murchison, a tout récemment terminé, avec la coopération de MM. de Verneuil et de Keyserling,

ainsi que le travail dans lequel ce dernier a consigné les observations paléontologiques qu'il a faites pendant son voyage sur les rives de la Petchora, viennent dignement clore la série des travaux que j'avais à mentionner dans cette esquisse historique.

Ces savants ont non seulement enrichi la science de plusieurs espèces nouvelles de *Productus*, mais se sont en outre occupés de l'organisation et de la classification de la plupart de celles qui composent ce genre, auquel ils assignent les mêmes limites que celles que je lui ai données en 1843.

PRODUCTUS. (*Sowerby.*)

GRYPHITES. *sp.* Hoppe; Walch; Schröter; Baumer; v. Schlotheim.
ANOMIA. Da Costa; Chemnitz.
PYXIS. *sp.* Chemnitz.
ANOMIÆ ECHINATÆ et CONCHÆ PILOSÆ. Ure.
ANOMITES. Martin; v. Schlotheim (*partim*).
ARCA. *sp.* Bruguière
TRIGONIA. *sp.* Parkinson.
PRODUCTUS. J. Sowerby; Bronn; Defrance; Fleming; Deshayes, Quenstedt; Eichwald; Murchison; de Verneuil; A. d'Orbigny; v. Buch; Kutorga; Morris; de Koninck; de Keyserling.
TRIDACNA. *sp.* de Lamarck.
TEREBRATULA. *partim.* de Blainville; Rang.
PROTONIA. Link.
ARBUSCULITES. Murray, teste Bronn.
LEPTÆNA. Dalman (*partim*); Fischer de Waldheim; Goldfuss; Menke, zu Münster; Pusch; J. D. C. Sowerby; Phillips (*partim*); M'Coy *sp.*; Fahrenkohl (non de Koninck; M'Coy; Murchison; de Verneuil et de Keyserling).
MYTILUS. *sp.* Fischer de Waldheim.
PRODUCTA. Conybeare; J. D. C. Sowerby; de la Bèche; Phillips; M'Coy.
STOPHOMENA. (*partim*), Bronn; Vanuxem; Schmith (non Rafinesque).
PINNA. *sp.* Phillips.
PECTEN. *sp.* Eichwald.
LIMA. *sp.* v. Buch.
STROPHALOSIA? King.

CARACTÈRES.

Coquille inéquivalve équilatérale, à valves ordinairement prolongées en avant, quelquefois irrégulières et frangées vers leur bord antérieur. Valve dorsale convexe, geniculée ou recourbée perpendiculairement sur elle-même, à crochet non perforé et non détaché du bord cardinal, mais renflé vers le col et élevé au-dessus des oreillettes latérales qui sont souvent plates et déprimées. Valve ventrale operculiforme, plus ou moins concave, quelquefois sub-plane jusqu'à sa partie antérieure qui est toujours recourbée avec le prolongement de la valve dorsale, dont elle suit tous les mouvements. Charnière linéaire droite et articulée dans son milieu par trois dents, dont deux divergentes et placées sur la valve dorsale embrassent la dent de l'autre valve; cette dernière, bifurquée ou trifurquée à son extrémité, paraissant composée de deux dents soudées à leur base; elle dépasse le bord cardinal et pénètre fort avant sous le crochet. Area nulle ou rudimentaire et partagée dans ce dernier cas par une petite ouverture deltoïde cicatrisée. La surface externe tantôt lisse ou légèrement striée et garnie d'épines ou tubes épars, tantôt ornée de côtes longitudinales, ordinairement dichotomes et irrégulières, d'où s'élèvent çà et là des tubes souvent d'une assez grande longueur et tantôt garnie de plis transverses, donnant naissance à une grande quantité de petits tubes. Ces tubes plus nombreux sur les oreillettes qu'ailleurs, s'y réunissent quelquefois en groupe, ou forment près du bord cardinal une ou deux rangées assez régulières; ils sont rarement situés sur le bord cardinal même, ils sont arrondis, nacrés, creux et paraissent avoir communiqué directement à l'intérieur.

La paroi interne de la valve dorsale est criblée d'un grand nombre de petites fossettes de diamètre et de profondeur variables, tandis que la paroi interne de la valve opposée est granuleuse et souvent hérissée de pointes dirigées en dedans. On remarque sur l'intérieur de chaque valve deux impressions ramifiées, séparées par une lame médiane et produites par le foie; on observe en outre de chaque côté, mais sur la valve dorsale seulement, une empreinte musculaire, ovale et obliquement striée (1).

---

(1) Cette définition du genre *Productus* est en grande partie la reproduction de celle qu'en ont donnée MM. Murchison, de Verneuil et de Keyserling dont je partage presque complètement les idées. Il m'a paru inutile de répéter les mêmes choses en me servant d'autres termes.

Le grand nombre de travaux qui ont eu pour objet l'étude des *Productus* a complètement levé le doute que l'on a conservé pendant quelque temps sur la classification de ces animaux.

Aujourd'hui l'on est généralement d'accord de les placer dans la classe des Brachiopodes et il est probable, que cette place leur restera définitivement acquise.

Parmi les caractères qui distinguent plus particulièrement les *Productus*, il en est quelques-uns sur lesquels il est d'autant plus nécessaire de s'étendre, qu'ils serviront de base aux idées que je me permettrai d'énoncer sur l'organisation probable et la manière de vivre de ces animaux, dont le type est sans doute à jamais anéanti.

On a cru pendant longtemps, et j'ai moi-même partagé cette opinion, que le caractère essentiel des *Productus* résidait dans la forme linéaire et droite de leur charnière, et dans l'absence complète de toute trace d'area et par suite de toute fente deltoïdale, qui en est inséparable. Mais depuis que l'on a acquis la certitude, qu'un petit nombre d'espèces possèdent ordinairement une area rudimentaire, ainsi que l'ouverture triangulaire médiane, qui l'accompagne constamment, il a fallu chercher ailleurs, les moyens de distinguer ce genre de ceux avec lesquels il offre le plus d'analogie. D'ailleurs ces espèces n'eussent-elles point existé, la découverte d'une area parfaitement distincte mais accidentelle, sur deux échantillons d'espèces qui en général n'en présentent pas (*P. giganteus* et *P. pustulosus*) lorsqu'elles ont pu prendre un développement régulier, eût été de nature à faire naître des doutes sérieux sur la valeur réelle de ce caractère et à ébranler ma conviction.

La présence d'un assez grand nombre de tubes creux près de la charnière, a été également invoquée pendant quelque temps, comme caractère essentiel des *Productus* ; l'on croyait même, que l'existence de ces tubes, jointe à l'absence complète d'area les distinguait parfaitement de tous les autres genres de Brachiopodes ; mais le retablissement du genre *Chonetes*, mal défini par son auteur, est venu modifier ce caractère à son tour et lui ôter l'importance qu'il paraissait avoir. En effet, ce genre intermédiaire entre les *Productus* et les *Leptæna*, tels que je les ai définis, de concert avec mes savants amis MM. de Verneuil et de Keyserling, possède non seulement une double area bien constante et parfaitement caractérisée, mais encore une série unique de tubes placés exactement sur le bord cardinal de la valve dorsale. C'est cette position, qui, réunie

à l'absence de toute trace de tube sur le reste de la surface (1), constitue l'un des caractères les plus essentiels des *Chonetes*. Les *Productus* n'offrent que très rarement une semblable disposition de leurs tubes; ceux-ci sont en général situés à une certaine distance du bord cardinal, et souvent rangés sur deux ou trois lignes parallèles; quelquefois ils sont réunis en masses compactes, soit sur les oreillettes, soit sur les flancs du crochet; en outre la surface extérieure de la valve dorsale en est ordinairement plus ou moins hérissée, sans que leur distribution présente rien de constant; tantôt ils sont en petit nombre et épars sur toute l'étendue de la coquille; tantôt ils sont très-nombreux et disposés en quinconce, ou par bandes concentriques au crochet.

Ces tubes sont d'une longueur et d'une épaisseur extrêmement variables; tous sont de même nature, et depuis les plus petits et les plus minces jusqu'aux plus longs et aux plus épais, ils ont eu très-probablement une origine commune. Tous sont creux; la plupart sont cylindriques, nacrés et d'un égal diamètre sur toute leur étendue (2). Leur accroissement s'est fait de dedans en dehors; ils ont dû être sécrétés par des appendices charnus du manteau, probablement surmontés d'un cil semblable à ceux dont est garni le bord du manteau de certains Brachiopodes encore vivants.

Ces tubes n'existent que très rarement à la surface de la valve ventrale. Jusqu'ici, je ne connais encore que les *P. crinitus*, *horridus*, *horrescens*, *Goldfussi* et *Murchisonianus* (3) qui soient dans ce cas. Les autres espèces, à une seule exception près, présentent sur leur valve inférieure, des fossettes ou dépressions correspondantes à l'origine des tubes de la valve opposée, en sorte que l'une des valves montre en creux, exactement le même dessin que celui qui se trouve en relief sur l'autre, avec cette différence, que les creux ne percent point le têt, et ne pénètrent point à l'intérieur, comme cela a lieu pour les tubes. S'il m'était même permis de tirer une conclusion générale, d'un cas particulier, je me hasarderais à dire, que les tubes qui se trouvent sur la valve ventrale sont oblitérés,

---

(1) Le *Chonetes variolatus* A. d'Orb. semble seul faire exception à cette règle générale.

(2) Je ne connais à cet égard qu'une seule exception; elle m'a été offerte par le *P. Deshayesianus*, dont les tubes sont applatis et renflés vers leur milieu.

(3) Je n'ai pas encore pu parvenir à constater leur présence sur les *P. punctatus* et *pustulosus* cités par M. de Verneuil.

tandis que ceux de la valve dorsale sont ouverts, mais n'ayant encore pu découvrir cette disposition que sur un seul échantillon du *P. horridus* (PL. XV, FIG. 1, *b*), j'attendrai le résultat d'un plus grand nombre d'observations, avant de me prononcer à cet égard. Cet exemple suffit néanmoins, pour prouver que ces tubes n'étaient point destinés à livrer passage aux muscles d'attache des animaux, car il est de toute évidence, que si telle avait été leur destination, c'était bien plutôt aux tubes de la valve inférieure qu'elle eut dû être dévolue, qu'à ceux de la valve opposée. En outre, comment expliquer la destination du nombre infini de petites pointes dont la surface de certaines espèces (*P. punctatus*, *pustulosus*, *Humboldti*) est hérissée, ainsi que l'absence des tubes cardinaux non seulement chez quelques *Productus*, mais aussi chez les *Leptæna*, dont l'ouverture deltoïdale est le plus souvent hermétiquement fermée? Aussi M. de Buch, convaincu sans doute par de nouvelles observations, semble-t-il avoir abandonné complètement l'opinion qu'il a émise anciennement, pour se ranger du côté des naturalistes qui attribuent aux tubes des *Productus* et des *Chonetes* une toute autre destination, que celle de servir de passage à des muscles d'attache. « S'il nous était permis, dit M. de Verneuil (1), de hazarder une opinion sur la destination de ces organes, nous croirions plutôt qu'ils servaient à introduire l'eau nécesssaire à la vie et à la respiration de l'animal; ce qui n'était peut-être pas sans utilité dans des coquilles qui paraissent avoir eu assez de difficulté à entr'ouvrir leurs valves. »

Je partagerais volontiers l'opinion de mon savant ami, si l'on remarquait que les espèces de *Productus* dont les valves ont dû s'entrouvrir le plus difficilement, sont précisément celles dont la surface est la plus fortement hérissée de tubes, mais comme c'est exactement le contraire qui a lieu, il m'est impossible de lui donner mon adhésion pleine et entière. En effet, on ne pourra nier, que les coquilles du *P. semireticulatus* et des espèces qui comme lui, sont fortement géniculées et possèdent un prolongement des bords assez étendu, n'aient dû s'entr'ouvrir beaucoup plus difficilement que celles des *P. punctatus, pustulosus, Leuchtenbergensis*, etc., qui n'ont point un prolongement semblable. C'est cependant sur ces dernières que les tubes sont les plus nombreux et le plus régulière-

(1) Russia and the Ural Mountains, II, p. 249.

ment distribués, tandis qu'il s'en trouve parmi les autres, quelques-unes qui en sont presqu'entièrement dépourvues. En outre, si ces tubes avaient été destinés par la nature, à remplir des fonctions aussi importantes et aussi indispensables que le seraient celles qui consisteraient dans l'introduction de l'eau nécessaire à la respiration et à la nutrition, c'est-à-dire à l'entretien de la vie des animaux, il est probable que leur distribution n'eut point été abandonnée aux chances du hazard et qu'elle eut été plus régulière qu'elle ne l'est généralement. D'après ces motifs auxquels vient se joindre la difficulté matérielle qu'eut rencontrée l'eau pour passer à travers des tubes capillaires de 5 à 6 centimètres de long et en partie obstrués par la présence du filet musculaire qui les sécrète, je persiste à croire, ainsi que je l'ai déjà soutenu ailleurs (1), que ces tubes doivent leur origine à des déviations de filets musculaires du manteau, filets probablement surmontés d'un cil, dont la présence a servi à maintenir leur extrémité ouverte et dont le mouvement a pu contribuer à établir autour de la coquille, un courant favorable à sa nutrition et à son développement, par le renouvellement du liquide dont elle se trouvait entourée. Aux considérations qui précèdent, j'ajouterai que les *Siphonotreta*, qui certes n'ont pas eu plus de difficulté à entr'ouvrir leurs valves que les *Terebratula* et les autres genres dont le crochet est attaché par un pédoncule musculaire qui le traverse, ont cependant leur coquille hérissée de tubes en tout semblables à ceux qui garnissent la surface des *Productus* et dont les fonctions ont par conséquent dû être les mêmes.

La forme générale des *Productus* ne mérite pas moins d'attention que les tubes qui recouvrent leur surface. Cette forme est généralement transverse et ellipsoïdale; rarement elle est orbiculaire, abstraction faite, dans l'un comme dans l'autre cas, des oreillettes qui s'étendent de chaque côté du crochet et qui ne manquent jamais, lorsque les échantillons sont d'une conservation parfaite. C'est à défaut de semblables échantillons, que plusieurs auteurs ont mal figuré la plupart des espèces dont le test extrêmement mince en cet endroit, permet rarement qu'on l'isole d'une manière complète et leur ont attribué un bord cardinal courbe qu'elles possédaient en apparence, tandis qu'en réalité il est droit dans toutes, sans exception aucune. Chez plusieurs *Productus*, ce bord donne

(1) Descr. des anim. fossiles du terr. carb. de Belgique. p. 152.

immédiatement la plus grande largeur de la coquille ; cependant cette largeur n'est ordinairement indiquée que par le grand axe de l'ellipsoïde ou par le diamètre de la cycloïde dont ils affectent le contour. Toutes les espèces ont leur valve dorsale plus ou moins fortement bombée ; un sinus assez large, mais généralement peu profond, part fréquemment du crochet, et sépare alors cette valve en deux parties égales et symétriques ; dans deux espèces (*P. mesolobus* et *Christiani*), ce sinus est accompagné d'un bourrelet médian, assez faiblement prononcé.

Parmi les *Productus* les uns s'accroissent régulièrement, en conservant pendant toute leur vie la forme et les ornements qui les avaient caractérisés pendant le jeune âge, sauf quelques légères modifications dues à la décrépitude, tandis que les autres, arrivés à un certain point de leur croissance, changent brusquement la direction de leurs bords et les inclinent à angle droit, pour se prolonger plus ou moins régulièrement dans ce nouveau plan en abandonnant le plus souvent en même temps, une partie des ornements qu'ils possédaient auparavant. Dans la plupart des cas, ces ornements consistent dans la présence de plis concentriques et d'un plus grand nombre de tubes qu'on n'en compte sur le prolongement. La valve ventrale, tout en suivant les mouvements de la valve opposée, reproduit en creux tous les ornements qui se trouvent sur cette dernière et en relief, ceux qui y existent en creux; mais au moment où les deux valves changent si brusquement de direction, elles se rapprochent tellement qu'elles semblent se toucher et qu'à l'instar de certains auteurs, on serait tenté de croire si l'on n'y fesait attention, que la valve dorsale seule possédait la faculté de s'allonger d'une façon aussi anormale ; cette apparence est due à la difficulté que l'on rencontre quelquefois pour distinguer les deux valves l'une de l'autre. Afin de faciliter la description de cette catégorie d'espèces, j'ai désigné en 1842, sous le nom de *disque visceral* (1), la partie de la coquille comprise entre le bord cardinal et l'angle formé par cette partie et par le prolongement, parcequ'il est incontestable, que c'est elle qui a contenu et garanti les organes les plus essentiels à l'entretien de la vie et à la propagation de l'espèce, et que ce n'est qu'après que ces organes avaient reçu tout leur développement nécessaire, que la direction primitive de la coquille a été abandonnée par l'animal.

(1) Depuis cette époque plusieurs auteurs se sont servis de ces termes pour indiquer la même partie.

Dans deux espèces (*P. proboscideus* et *genuinus*) le prolongement de la valve dorsale prend la forme d'un tube plus ou moins allongé; ce tube, dont la longueur et la direction sont très variables, est quelquefois susceptible de se bifurquer, ainsi qu'on le verra par la suite.

Le têst des *Productus* a dû être d'une nature très-fibreuse, à en juger par la résistance qu'il offre encore malgré la fossilisation et le métamorphisme qu'il semble avoir éprouvé dans plusieurs circonstances. Ainsi que Martin l'avait déjà observé, il est composé de plusieurs feuillets superposés qui, lorsque la coquille est assez épaisse (circonstance assez rare), peuvent s'enlever successivement. Par cette opération la coquille subit plusieurs métamorphoses, qu'il est de l'intérêt du paléontologiste de bien connaître, afin d'éviter autant que possible les erreurs dans la détermination des espèces (1).

La surface de la plupart des *Productus* étant couverte de côtes, celles-ci s'amincissent de plus en plus, par l'enlèvement successif des diverses couches, tandis que les sillons qui les séparent, s'élargissent à leurs dépens. Arrivé au dernier feuillet, les côtes ont presque complètement disparu et l'on voit apparaître déjà en grande partie la forme intérieure de la coquille. Cet intérieur, très-remarquable sous plusieurs rapports, offre des différences beaucoup plus notables entre les deux valves, que la symétrie de leurs ornements extérieurs ne pourrait le faire supposer. La valve dorsale présente à l'intérieur du crochet, de légères ondulations, qui ne sont guère visibles que sur les espèces d'une assez forte taille; à une petite distance du sommet se trouve l'origine d'un sillon longitudinal et médian mais ordinairement très-peu prononcé. De chaque côté de ce sillon, on remarque un appendice allongé et ramifié dont la saillie est plus ou moins forte, suivant les espèces. Immédiatement en dessous, mais en dehors de ces appendices, se trouvent les impressions musculaires, qui sur les moules se traduisent par des saillies, dont les stries obliques accusent suffisamment la nature fibreuse des muscles auxquels elles ont servi de point d'attache.

---

(1) Il y a encore une autre cause d'erreur contre laquelle il est bon de se prémunir, la forme assez généralement concave de la valve ventrale fait que l'on pourrait prendre son moule intérieur pour la valve dorsale de la coquille; mais avec un peu d'attention et surtout un peu d'habitude il sera facile d'éviter cet écueil, car il est rare que le crochet de la valve supérieure n'ait point laissé subsister quelques traces. D'ailleurs, en brisant l'échantillon, la cassure ne montre jamais dans ce cas la moindre épaisseur de test.

Ces cavités sont d'autant plus profondes, que la callosité qui la domine est plus épaisse. Immédiatement en-dessous d'elles, et vers le milieu de la coquille, se voient les dépressions dans lesquelles M. de Buch place les bras spiraux et qui produisent sur certains moules, ces protubérances en forme d'épaules qui ont induit en erreur l'auteur de la Conchyliologie minéralogique et lui ont fait figurer sous les noms de *P. humerosus* et *personatus*, des espèces qu'il avait déjà décrites auparavant sous les noms de *P. horridus* et *giganteus*.

Toute la surface intérieure de la valve dorsale, sauf l'appendice ramifiée et les impressions musculaires, est criblée d'une quantité considérable de petites fossettes dont le nombre s'accroit rapidement du côté des oreillettes, à mesure que leur diamètre diminue. En dessous du crochet, il existe une légère échancrure munie de chaque côté d'une dent saillante en forme de bouton, qui s'insère dans une fossette correspondante, laquelle se trouve de chaque côté de la dent unique, médiane et ordinairement trifurquée de la valve ventrale. La dent de cette dernière valve est très-longue et se prolonge très-avant sous le crochet, en fermant hermétiquement l'échancrure de la valve opposée, dans laquelle elle s'insère. Je suis disposé à croire, que l'extrémité de cette dent, servait de point d'attache aux muscles dont j'ai indiqué les impressions sur la valve opposée et qui opérant par leur contraction, un mouvement de bascule, faisaient entrebailler les bords libres de la coquille et permettaient ainsi à l'animal de prendre sa nourriture. Une lame saillante, analogue à celle qui se trouve à l'intérieur de la valve ventrale des *Terebratula* et des *Spirifer*, part de la dent médiane et s'étend jusqu'au milieu de la valve et quelquefois même au delà. De chaque côté se trouvent des appendices ramifiées, analogues à celles de la valve opposée et vraisemblablement produites par la même cause et en dessous desquelles, mais un peu plus latéralement s'étendent deux callosités reniformes, à bords ordinairement relevés et tranchants et dont il serait d'autant plus difficile d'indiquer la destination, qu'elles n'existent que dans un certain nombre d'espèces. Peut-être étaient elles destinées à remplir les mêmes fonctions que l'appareil apophysaire des *Terebratula*. En tout cas, il est impossible de partager l'opinion de M. M'Coy, qui considère ces callosités comme des impressions musculaires (1). A partir des

(1) M'Coy. Syn. of the char. of the Mount. lim. foss. of Ireland, p. 106.

bords extérieurs de ces callosités, la surface interne se couvre de plusieurs rangées d'épines saillantes, non perforées, mais souvent allongées en forme de gouttelettes et d'autant plus fortes, qu'elles se trouvent plus rapprochées de la partie marginale de la coquille. Il est cependant à remarquer, que dans les espèces à prolongement antérieur, ces aspérités n'existent que sur leur partie viscérale et qu'elle s'arrêtent là où la coquille commence à changer de direction. M. de Verneuil pense que ces aspérités, qu'il faut bien se garder de confondre avec les tubes de la surface extérieure, ont été produites par les vaisseaux sanguins qui affluaient aux parois du manteau. Je me vois forcé d'exprimer de nouveau à mon savant ami, le regret de ne point être de son avis. Il me semble, que si les pointes intérieures avaient été produites de la manière qu'il le suppose, rien ne s'opposerait à ce qu'il y en eut aussi sur le prolongement ; en effet ce prolongement a dû garantir une partie de manteau dans laquelle la circulation a dû être beaucoup plus active que partout ailleurs, à cause de la présence d'un nombre plus considérable de vaisseaux sanguins et du contact plus immédiat avec les agents extérieurs. Je crois être plus près de la vérité, en supposant, d'aprés l'analogie que me présente l'anatomie des *Terebratula*, si bien faite par M. Owen, que ces aspérités étaient destinées à remplir les interlices des conduits ovariques, qui ont du être très-développés chez les *Productus* et qui probablement ont été logés au dehors du foie et très-près des vaisseaux branchiaux (1).

Jusqu'ici, on avait été assez généralement d'accord pour considérer les arborisations des apophyses ramifiées qui se voient sur l'une et sur l'autre valve, comme dépendant des lobes du foie, entre lesquels se serait déposé de la matière calcaire, qui, se moulant sur l'organe avec lequel elle se trouvait en contact, en a fidèlement reproduit et conservé la forme. M. M'Coy est le premier qui ait rejeté cette opinion, pour s'arrêter à une supposition qui me parait peu probable. Cet auteur croit que l'apophyse ramifiée de la valve ventrale a servi de support aux bras ciliés des *Productus* et qu'elle y a remplacé l'appareil apophysaire des *Terebratula ;* je conviens que cette idée eut pu être soutenue avec quelqu'avantage, sans l'existence d'une apophyse analogue sur la valve dorsale, sur la

(1) C'est du moins la disposition observée par l'illustre anatomiste Anglais que je viens de citer, dans la *Terebratula Sowerbii*, King (Ann. d. s sc. nat. 2me serie III, p. 63).

présence de laquelle M. M'Coy garde le silence le plus absolu (1).

Dans un fort beau travail, dans lequel M. de Keyserling vient de consigner le résultat des recherches paléontologiques auxquelles il s'est livré pendant son voyage sur les rives du Petschora, ce savant émet l'opinion que les ramifications sont dues aux impressions ovariques et testiculaires. Il se fonde sur la forme dendritique, qui, selon M. Owen, est commune chez les Brachiopodes aux organes mâle et femelle, et bien plus encore, me semble-t-il, sur la propriété que possède chacune des apophyses ramifiées de certaines espèces de *Productus*, de se diviser en deux rangées de feuillets minces, réunis entre eux à la façon d'une barbe de plume. M. de Keyserling croit reconnaître dans ces feuillets une partie de la substance même des organes génitaux, qui, dans ce cas, auraient dû être d'une consistance au moins aussi forte que la coquille elle-même, avec la substance de laquelle ces feuillets se confondent insensiblement (2). Outre que rien de semblable ne s'observe dans la nature vivante actuelle, il y a encore d'autres considérations qui ne me permettent pas de me rallier à l'opinion du savant auteur que je viens de citer.

« Le foie, dit M. Owen (3), en parlant de la *Terebratula psittacea*, est une glande volumineuse d'une couleur verdatre et d'une texture folliculaire; il forme deux masses principales situées de chaque côté du canal alimentaire. Dans cette *Terebratula*, les ramifications des follicules hépatiques ressemblent aux ramifications de la *Gorgonia flammea*. » Si de l'analogie qui existe entre l'organisation des divers genres de Brachiopodes vivants, il est permis de conclure celle des animaux des divers genres de cette classe de mollusques dont le type est actuellement éteint, il ne sera pas difficile de concevoir, d'après la citation que je viens d'emprunter à l'un des anatomistes les plus distingués et les plus expérimentés de l'époque, que les ramifications des apophyses arbusculaires sont dues à l'impression des follicules hépatiques. En effet, il est probable, qu'ainsi qu'on l'observe dans les *Terebratula*, le foie a été également très-développé chez les *Productus* et que les deux masses principales de cet organe se trouvaient situées sur les deux côtés du

(1) M'Coy. Synop. of the char. of the carb. lim. foss. of Ireland, p. 106.

(2) De Keyserling. Wissens. Beob. auf einer Reise in das Petschora-Land, in Jahre 1843. p. 196.

(3) Ann. des sc. nat. 2me série, III, p. 62.

canal alimentaire. Cette opinion me semble d'autant plus probable, que les apophyses ramifiées de la valve dorsale, sont toujours séparées par un sillon longitudinal, dont le creux a pu servir à loger une partie du tube digestif.

On a vu plus haut, que la plupart des *Productus* sont entièrement dénués d'area et parconséquent de l'ouverture médiane qui en est inséparable ; comme en outre leur crochet n'est point perforé, il s'ensuit évidemment, qu'en supposant qu'ils aient été fixés aux corps sous marins, ainsi que le sont encore tous les Brachiopodes vivants, et que l'ont été la plupart de ceux qui sont enfouis au sein des diverses couches fossilières, ce n'a pu être par un mode analogue à celui qu'on observe chez les *Terebratula* et les *Spirifer*.

Néanmoins, M. Bouchard-Chantereaux, ayant découvert aux environs de Boulogne, certains *Productus* dévoniens munis d'une area rudimentaire et d'une fente médiane audessous du crochet, s'est basé sur ce fait pour en conclure d'une manière générale que ces animaux étaient fixés par un muscle unique et médian. Mais, ainsi que le remarque fort judicieusement M. de Verneuil, l'opinion de M. Bouchard rencontre des impossibilités matérielles dans la structure même de la plupart des *Productus*. En effet, toutes les espèces de ce genre, à l'exception des *P. horrescens*, *subaculeatus* et *Murchisonianus*, ont les bords cardinaux tellement serrés et réunis sur toute la longueur de la charnière, qu'il n'y a place ni pour l'area, ni pour la fente triangulaire. « Quant aux espèces où cette fente existe, ajoute M. de Verneuil dont je partage entièrement l'opinion, nous avons encore beaucoup de peine à concevoir, avec M. Bouchard, qu'elle ait pu livrer passage à un muscle d'attache, car elle est fermée par une double porte : intérieurement, par la dent médiane de la valve ventrale qui s'enfonce sous le crochet, et extérieurement, par un bourrelet ou *deltidium* convexe qui l'obstrue complètement (1). » D'ailleurs, eu égard aux dents sériales que M. Bouchard dit avoir observées sur le bord cardinal de la valve dorsale de quelques-uns de ses échantillons (2), je suis porté à croire que ce savant a confondu avec les *Productus*, certaines espèces qui pourraient bien devoir être rangées parmi les *Leptæna* dont la charnière est en effet pourvue d'un grand nombre

(1) Russia and the Ural Mountains, II, p. 249.
(2) Ann. des sc. nat. 2me série, XVIII, p. 159.

de dents sériales (1) ; il n'est pas impossible qu'une semblable méprise, si elle a existé, ait contribué à lui faire énoncer d'une manière absolue, une opinion, qui, fut-elle admissible, ne s'appliquerait en tous cas, qu'à un nombre d'espèces extrêmement restreint.

Habitués à chercher le moyen d'attache des Brachiopodes du côté de la charnière, et ne le trouvant ni dans les tubes des *Productus* ni dans la présence accidentelle d'une petite fente située audessous de leur crochet, la plupart des naturalistes admettent avec M. Deshayes, que les espèces de ce genre ont dû se trouver libres et non adhérentes au sein des mers dans lesquelles elles ont vécu, quoique la seule observation de la présence du grand nombre de longs et frêles tubes sur la surface de la plupart des espèces, aurait du suffire pour faire rejeter cette opinion. Malgré la presqu'unanimité des auteurs à cet égard, je me suis permis d'émettre une opinion contraire, qui, loin d'avoir été ébranlée depuis que je l'ai publiée, a reçu l'appui d'un certain nombre de faits qui me serviront à la défendre de nouveau.

Penétré de la conviction la plus intime de l'adhérence des *Productus* et obligé, par les considérations que je viens d'exposer, de renoncer à l'opinion anciennement émise par M. de Buch, ainsi qu'à celle plus récente de M. Bouchard, j'ai du chercher ailleurs que dans les tubes de la charnière ou dans la fente deltoïdale de quelques espèces, les moyens d'attache dont ces animaux ont pu se servir ; j'avoue que j'eus été fort embarrassé de le trouver, si la singulière organisation du *P. proboscideus*, dont la valve dorsale est munie d'un prolongement en forme de tube, ne fut venu me mettre sur la voie. En effet, ce tube, qui a la forme d'un pédoncule dont la direction est très-variable, est terminé par une petite ouverture qui n'a du se trouver là, que pour livrer passage aux fibres du muscle d'attache. Ceci étant bien constaté, il m'a suffi d'admettre pour toutes les autres espèces une organisation semblable ; mais aucune espèce, à l'exception du *P. genuinus* récemment découvert en Russie par M. Kutorga, n'offrant un prolongement analogue à celle du *P. proboscideus*, j'ai été conduit à supposer que les fibres d'attache passaient entre les bords libres des deux valves. Le man-

(1) C'est une erreur analogue qui a fait dire à M. Defrance que *la charnière des* Productus *était garnie dans toute sa longueur de très-petites dents sériales et entrantes comme celles des Arches* (Dict. des sc. nat. T. XLIII, p. 349). Cette même erreur avait déjà été commise en 1776 par Da Costa.

que de symétrie sur ces bords, l'absence absolue de tubes sur la valve ventrale de presque toutes les espèces, la dépression constante de ses tubes et leur occlusion que j'ai observée chez les espèces qui en possèdent sur cette valve, sont autant de preuves que je puis invoquer en ma faveur. Mais celle à laquelle j'attache la plus grande importance, se trouve dans un fait observé par M. de Verneuil, et sur l'interprétation duquel nous ne sommes pas d'accord.

Ce savant paléontologiste a découvert dans le système permien de Russie une espèce de *Productus* à laquelle il a donné le nom de *P. horrescens*, à cause des rapports qu'elle a avec le *P. horridus* de Sowerby. Le crochet de la valve dorsale de certains échantillons de cette espèce, au lieu d'être pointu, comme l'est celui de tous les autres *Productus*, est terminé par une petite facette lisse, que M. de Verneuil pense avoir été le point d'attache. Quant à moi, je n'hésite pas à croire, que cette facette n'est que le résultat de l'usure déterminée par le frottement du crochet contre la roche à laquelle l'animal était attaché. Mais pour que ce frottement eut lieu, il a fallu un mouvement alternatif, que l'on aurait de la peine à concevoir, si l'on n'admettait l'adhérence de la coquille par la partie opposée au crochet. Dans cette hypothèse il est facile de concevoir la raison pour laquelle tous les échantillons ne sont point munis de cette facette, tandis qu'il n'en est pas de même, si l'on admet avec M. de Verneuil, qu'elle ait servi de point d'attache. En effet, on peut supposer que certains individus ont pu se trouver exposés soit à des courants, soit à des influences locales auxquelles d'autres échappaient; je rencontre au contraire une difficulté réelle à admettre que la nature ait laissé au hazard de décider, si des animaux d'une même espèce vivraient libres ou enchaînés, pendant toute la durée de leur existence, c'est-à-dire dans des conditions diamétralement opposées.

Enfin, je trouve un dernier argument en faveur de mon opinion, dans la forme même de la coquille. Les deux valves étant en général bombées dans le même sens, il en résulte que lorsqu'elles sont en place, et que la coquille est fermée, l'une paraît convexe et l'autre concave à l'extérieur. Si une coquille ainsi faite et remplie d'une matière dont le poids spécifique soit au moins égal à celui de l'eau, est projetée dans ce liquide, il est évident que quelle que soit la position dans laquelle son immersion aura eu lieu, elle ira toucher le fond par sa valve dorsale, sur laquelle elle continuera à reposer jusqu'à ce qu'on vienne la déranger forcément. Cette ex-

périence, que j'ai trouvée consignée dans l'ouvrage que vient de publier M. de Keyserling (1), et que l'on peut très facilement répéter sur des *Productus* entièrement dégagés de leur roche, prouve que s'ils ont été libres et non adhérents, ils ont du occuper pendant leur vie, une position parfaitement identique à celle qu'ils prennent dans les circonstances que je viens de signaler.

Mais comment concilier la présence des longs et frêles tubes dont la valve dorsale est ordinairement hérissée avec la conclusion logique qui se déduit de la forme même de la coquille, et comment admettre qu'un animal souvent renfermé dans une demeure d'un poids assez considérable, ait pu peser de tout ce poids, sur des organes d'une délicatesse extrême, sans les briser et même sans les faire dévier de leur direction normale ? Cette considération me semble suffire pour faire admettre que les *Productus* reposaient pendant leur vie sur la valve ventrale, mais comme il leur eût été impossible de se maintenir dans cette position, sans être attachés et que d'un autre côté, ni le crochet, ni aucune autre partie de la charnière n'indique que le point d'attache se soit trouvé de ce côté de la coquille, j'en conclus qu'il a du exister du côté opposé et que c'est la commissure des valves qui a dû lui livrer passage.

Je terminerai en faisant remarquer que pour admettre mon opinion, il ne faudrait point supposer aux *Productus* une organisation bien différente de celle que M. Owen a reconnue dans les *Terebratula*. Il suffirait d'admettre que les fibres musculaires, qui dans ces dernières passent à travers le crochet pour aller s'implanter sur les muscles adducteurs des valves, aient pris une direction opposée chez les *Productus ;* l'anatomie des *Orbicula*, dans lesquelles la direction des fibres du pédoncule est intermédiaire entre celle que possèdent les fibres du même organe dans les *Terebratula* et celle que je suppose avoir existé pour celui des *Productus*, est une preuve suffisante, que cette différence dans la direction des moyens d'attache des Brachiopodes, n'influe que très-faiblement sur les autres parties de leur organisme.

D'ailleurs, mon hypothèse complète la série déjà si nombreuse des moyens d'attache des Brachiopodes, dont quelques-uns se fixent directement par leur valve ventrale, d'autres par un pédoncule aboutissant au crochet des deux valves, d'autres encore par des filets mus-

(1) Wissensch. Beob. auf einer Reise in das Petschora-Land, p. 198.

culaires passant soit entre les bords cardinaux, soit à travers une ouverture ronde pratiquée au sommet du crochet de la valve ventrale, soit à travers une ouverture triangulaire situé au dessous du crochet de cette même valve, soit enfin, à travers une fente longitudinale pratiquée dans la valve ventrale, et cette considération me semble mériter quelque attention.

CLASSIFICATION DES PRODUCTUS.

Aucune des classifications proposées jusqu'ici pour la distribution des diverses espèces de *Productus* actuellement connues, n'étant de nature à me satisfaire complètement, sans en excepter même la classification que j'ai publiée en 1843, j'ai cherché à grouper ensemble les espèces qui se rapprochaient le plus par leurs caractères généraux. Ces caractères consistant principalement dans les ornements extérieurs des coquilles, qui sont toujours les plus faciles à saisir, on ne devra point s'étonner que ma classification se rapproche de celle de M. de Verneuil qui repose sur la même base et que je lui aie même emprunté certains termes pour les appliquer à quelques-uns des groupes que j'ai formés.

De même que je l'ai déjà fait en 1843, je divise les *Productus* en deux sections principales, selon que leur surface est ornée de côtes longitudinales, ou qu'elle en est privée.

La première section se subdivise en cinq groupes que j'ai désignés sous les noms de *Striati*, *Undati*, *Proboscidei*, *Semireticulati* et *Spinosi*.

Les trois premiers comprennent des espèces dont les côtes sont lisses dans toute leur étendue ou ne sont interrompues que par un nombre extrêmement limité de tubes.

Les *Striati* se composent des espèces non sinuées et entièrement privées de plis transversaux, ou tout au plus garnies de quelques plis irréguliers sur les oreillettes et sur les flancs.

Le groupe des *Undati* est formé d'espèces dont la surface est entièrement recouverte de plis concentriques, plus ou moins réguliers.

Les *Proboscidei* sont faciles à distinguer par le singulier prolongement de leur valve dorsale.

Le quatrième groupe se compose d'espèces dont les côtes sont rarement très-épineuses et traversées sur le disque viscéral seule-

ment, par des plis concentriques qui les rendent tuberculeuses : la plupart des espèces de ce groupe sont sinuées et géniculées.

Je range dans le dernier groupe, les espèces à côtes hérissées d'un grand nombre de tubes assez régulièrement espacés et dont le disque viscéral n'est point traversé de plis concentriques, comme l'est celui des espèces du groupe précédent.

La seconde section comprend également cinq groupes, les *Fimbriati*, les *Caperati*, les *Horridi*, les *Mesolobi* et les *Læves*.

Le premier groupe renferme les espèces dont la surface est couverte dans toute son étendue de plis concentriques applatis et garnis d'une ou de plusieurs rangées de tubes (1).

Le second et le troisième groupes sont formés d'espèces dont la surface est hérissée d'un assez grand nombre de tubes, sans être traversée par des plis réguliers ou apparents ; ces deux groupes ne se distinguent l'un de l'autre que parce que les espèces du second ont la valve dorsale régulièrement voutée, tandis que celles du troisième, ont cette même valve divisée en deux parties égales par un sinus médian.

Deux espèces seulement composent le quatrième groupe ; elles sont remarquables par un bourrelet étroit qui s'étend sur toute la longueur de leur valve ventrale, au milieu d'un sinus assez large, mais peu profond (2).

Enfin, le cinquième groupe a dû être créé pour une espèce douteuse, caractérisée par la surface entièrement lisse de ses valves.

Dans la classification que je viens de résumer et que l'on concevra encore mieux en jetant les yeux sur le tableau ci-joint, j'ai cherché à supprimer la section des *Productus anomaux*, dont le nombre tendait à s'augmenter. Je n'ai pas jugé nécessaire de tenir compte de la forme de la valve ventrale, quoique je la connusse pour toutes les espèces que je décris, à l'exception de deux. J'ai préféré m'en servir dans la détermination des espèces, où elle est souvent d'un très-grand secours.

---

(1) J'ai compris dans ce groupe les *P. Humboldti* et *pyxidiformis*, bien que leurs plis soient rarement bien prononcés, afin de ne pas les éloigner des espèces avec lesquelles elles ont le plus de rapport.

(2) Je n'ai pas cru devoir séparer le *P. Christiani*, du *P. mesolobus* avec lequel il a beaucoup de rapports, ni devoir l'introduire dans la première section, malgré les stries très-fines dont sa surface est couverte.

DISTRIBUTION GEOLOGIQUE DES PRODUCTUS.

L'existence de ce genre a été bien courte, comparativement à celle de plusieurs autres genres de Mollusques dont la création date de la période la plus reculée de la vie du globe et qui, malgré cela, ont échappé à toutes les causes destructrices auxquelles ils ont été soumis depuis, et ont conservé leurs représentants dans la période actuelle. Il est encore bien douteux que les *Productus* aient vécu avant le dépôt des diverses couches dont se compose le système silurien (1). Les dépouilles de ce genre paraissent pour la première fois d'une manière certaine dans les roches du système dévonien ; mais il n'y acquiert qu'un bien faible développement. Trois petites espèces dont la surface est hérissée de longs et frêles tubes et dont la charnière rappelle encore parfois la forme d'autres genres de Brachiopodes, sont ses uniques représentants dans ce système. En revanche, deux de ces espèces y sont très-abondantes et sont à coup sûr, les coquilles les plus caractéristiques de cette époque géologique. L'une, le *P. subaculeatus*, se trouve en Belgique, en France, dans le Devonshire, sur les bords du Rhin et en Russie ; l'autre, le *P. Murchisonianus*, souvent associée à la première, occupe une étendue bien plus considérable que celle-ci : non seulement elle se rencontre dans les pays que je viens de citer, mais elle se présente avec tous ses caractères dans l'Amérique Septentrionale, dans les couches que MM. Hall et Vanuxem désignent sous les noms de *Itaca*, de *Hamilton* et de *Chemung group* (2). Elle a été rapportée en outre de la terre de Van Diémen, par M. Leguillou, et là, comme ailleurs, elle sert à caractériser et à mettre en parallèle les dépôts qui la renferment avec ceux dans lesquels elle se trouve répandue en Europe.

C'est sans doute un phénomène bien remarquable et bien digne de fixer l'attention des paléontologistes et des géologues, qu'une espèce en apparence si délicate, ait pu vivre dans des conditions et sous des latitudes si différentes, sans subir des modifications bien

---

(1) M. de Verneuil a eu occasion de voir à Stockholm un échantillon d'un Brachiopode provenant du calcaire silurien de Suède, qui devra peut-être se rapporter à ce genre. Si cette supposition se confirme ce sera le premier et l'unique exemple de la présence des *Productus* dans ce terrain ancien.

(2) Landner Vanuxem, Geology of New York, part III, p. 174 et 179.

sensibles dans ses caractères. Ce fait constitue à mes yeux, un puissant argument en faveur de la différence spécifique de certains fossiles du terrain palæozoïque, dont les caractères se rapprochent fortement, sans toutefois s'identifier complètement, lorsque la différence se maintient d'une manière régulière et constante.

C'est dans le système carbonifère que les *Productus* ont acquis leur plus grand développement. Ainsi que le fait très-judicieusement observer M. de Verneuil, leur abondance y devient telle, non seulement en Europe, mais presque sur toute la surface de la terre, que le calcaire carbonifère pourrait, à juste titre, être appelé *calcaire à Productus* (1), si quelques espèces ne se trouvaient au-dessus et au-dessous (2). J'ajouterai, que certaines espèces y acquièrent une taille tellement gigantesque, qu'elle surpasse non seulement celle de tous les autres Brachiopodes, mais encore celle d'un grand nombre d'autres Mollusques acéphalés.

Leur nombre se réduit considérablement dans le système permien, dans lequel on ne trouve plus que huit ou neuf espèces qui lui sont propres. Ces espèces bien que séparées des espèces dévoniennes, par les puissants dépôts carbonifères, s'en rapprochent néanmoins beaucoup plus, par leurs caractères généraux, que de celles auxquelles elles ont succédé immédiatement, comme si avant de laisser éteindre ce genre si remarquable, la nature avait voulu le ramener à son type primitif. En effet les espèces permiennes sont en général si petites et leur surface est couverte d'un si grand nombre de tubes, qu'en les comparant aux espèces dévoniennes, on croirait avoir sous les yeux des coquilles appartenant à des couches voisines.

Audessus du système permien, on ne connait encore qu'un seul *Productus*; c'est celui qui a été découvert parmi les nombreuses espèces de Mollusques qui se trouvent dans les dépôts de Saint-Cassian. Ce fait, qui d'abord avait paru extraordinaire, a perdu beaucoup de son importance, par la découverte dans des dépôts analogues, d'espèces appartenant à des genres que l'on avait crus jusqu'ici exclusivement propres aux dépôts paléozoïques (3). Jusqu'ici il n'y a aucune espèce qui passe d'un système géologique

(1) C'est sous ce nom même qu'il a été désigné par quelques géologues Allemands.

(2) Russia and the Ural Mountains. II, p. 252.

(3) Telle est entre autres, la présence incontestable de plusieurs espèces d'*Orthoceras* dans le calcaire de Hallstadt.

dans un autre, en sorte que toutes sont caractéristiques pour le système auquel elles appartiennent.

Quelle que soit la cause de cet anéantissement complet et des créations nouvelles et presque entièrement différentes pour chaque époque géologique, il en résulte que les *Productus*, par leur grande abondance et leurs caractères bien tranchés, peuvent mieux que tout autre genre d'animaux servir de guide au géologue. C'est par leur secours, que l'on peut le plus surement déterminer, mettre en parallèle et considérer comme déposés à la même époque, les couches carbonifères de Visé, de Lives, de Namur, de Chokier, de Chanxe, de Mons, d'Ath, de Soignies, de Feluy, des Ecaussines en Belgique, de l'Angleterre, de l'Ecosse, de l'Irlande, du Bas-Boulonnais, de Sablé, de Regny près de Lyon, et d'Avesnes en France, de Pola de Lena et de Mieres del Camino en Espagne, de Ratingen près de Dusseldorf, de Trogenau et de Regnitzlosau près de Hof, de Falkenberg, d'Altwasser et de Neudorf en Silésie et de Bleiberg en Carinthie.

Enfin, c'est par les *Productus* que l'on est parvenu à déterminer d'une manière rigoureuse les calcaires horizontaux, tendres et blanchâtres qui en Russie occupent une étendue si considérable et qui, sans les nombreuses traces que ce genre y a laissées subsister, eussent pu facilement induire en erreur. Les *Productus* n'ont pas été moins utiles à MM. Murchison, de Verneuil et de Keyserling pour la distinction des couches dévoniennes et carbonifères dans la chaîne de l'Oural qu'ils ont parcourue en 1840 et en 1841, ainsi qu'à M. de Tchihatcheff pendant son excursion dans la chaîne de l'Altaï, dont il vient de visiter une partie vers le Haut Jenissei. C'est l'existence de plusieurs espèces de *Productus* dans le grès du Mount Misery de l'Ile aux Ours de la mer glaciale, dans lequel elles ont été recueillies par M. Keilhau, qui a permis à M. de Buch, de rapporter ce grès au système carbonifère (1).

Ils ont encore servi à MM. Pentland et A. d'Orbigny à déterminer l'âge relatif du calcaire dans lequel ils ont trouvé les espèces qu'ils ont rapportées des bords du Lac de Titicaca, situé au pied des plus hautes montagnes de l'Amérique méridionale. Ces savants naturalistes ont pu observer, que de même qu'en Europe, ces calcaires reposent sur des couches dévoniennes, suffisamment caractérisées

(1) Bericht der Königl. Akad. der Wissens. zu Berlin. Mai, 1846, S. 145.

par leurs fossiles. Tout récemment encore, les *Productus* ont servi de guide aux observations géologiques que M. de Verneuil a faites dans l'Amérique du Nord, où il a pu confirmer par des excursions nombreuses et lointaines que les assises carbonifères des États de l'Ohio, du Missouri et du Mississipi se trouvaient dans une position parfaitement analogue à celle de l'Europe et renfermaient souvent les espèces qui se rencontrent le plus communément dans le calcaire carbonifère de l'ancien continent (1).

De toutes ces données que la science possède aujourd'hui et qui sont en grande partie dues aux progrès récents de la paléontologie, il résulte, que l'on peut hardiment conclure, sans crainte de se tromper, que les couches qui ont fourni à MM. le Comte Strzelecki, Le Guillou et à l'intrépide voyageur M. Leichardt les *Productus* qu'ils ont rapportés ou expédiés de la terre de van Diemen et de la Nouvelle Hollande, appartiennent les unes au système dévonien, ainsi que je l'ai déjà établi plus haut, les autres au système carbonifère. Cette conclusion est d'autant plus logique, que l'espèce dévonienne est la même que celle qui se trouve en Europe et en Amérique et que parmi les espèces carbonifères, j'en ai reconnu au moins une, parfaitement identique avec une espèce Européenne.

Les *Productus* dont je viens de faire ressortir l'importance dans la détermination des assises moyennes du terrain paléozoïque, ne sont pas moins précieux et moins utiles pour arriver à la détermination des couches supérieures ou permiennes. Déjà quelques espèces avaient été utilisées avec le plus grand avantage par MM. Murchison, de Verneuil et de Keyserling pour l'établissement et la délimitation de leur système permien, lorsque je m'en suis servi moi-même (2) pour prouver que le calcaire de la rade de Bell-Sound au Spitzberg, loin d'être du calcaire carbonifère, ainsi que l'admettent la plupart des géologues, doit être réuni au système que les trois savants distingués que je viens de citer, ont créé principalement pour un dépôt très-puissant occupant tout l'espace compris entre la pointe méridionale de la chaîne de l'Oural qu'il longe sur une immense étendue et les côtes de la mer Blanche.

---

(1) Parmi ces espèces, je citerai particulièrement les *P. semireticulatus* et *punctatus*, que M. de Verneuil a recueillis abondamment sur les rives du Missouri dont il a remonté le cours pendant plus de 300 lieues.

(2) Bulletin de l'Acad. royale de Belgique, XIII, p. 592.

CLASSIFICATION DES PRODUCTUS.

- Surface ornée de côtes longitudinales. . .
  - Lisses ou presque lisses dans toute leur étendue.
    - Non réticulées. *Striati.* . . . .
      1. *striatus.* Fischer. sp.
      2. *giganteus.* Martin. sp.
      3. *latissimus.* J. Sow.
      4. *margaritaceus.* Phill.
      5. *flexistria.* M'Coy.
      6. *mammatus.* de Keyserl.
      7. *Cora.* A. d'Orb.
      8. *arcuarius.* de Kon.
    - Réticulées dans toute leur étendue par le croisement de plis concentriques. *Undati.* . .
      9. *Hemisphærium.* Kutorga.
      10. *undiferus.* de Kon.
      11. *undatus.* de France.
      12. *porrectus.* Kutorga.
    - Valve dorsale à prolongement tubiforme. *Proboscidei.* . .
      13. *proboscideus.* de Vern.
      14. *Nystianus.* de Kon.
      15. *genuinus.* Kutorga.
  - Faiblement épineuses, réticulées par des plis concentriques sur le disque viscéral seulement. *Semireticulati.* . . . . . .
    16. *Medusa.* de Kon.
    17. *plicatilis.* J. Sow.
    18. *sublævis.* de Kon.
    19. *Boliviensis.* A. d'Orb.
    20. *Leplayi.* de Vern.
    21. *expansus.* de Kon.
    22. *semireticulatus.* Martin. sp.
    23. *costatus.* J. Sow.
    24. *longispinus.* J. Sow.
    25. *carbonarius.* de Kon.
  - Fortement tuberculeuses ou épineuses, non réticulées. *Spinosi.* . . . . . .
    26. *subquadratus.* G. Sow.
    27. *spinulosus.* J. Sow.
    28. *Cancrini.* de Vern.
    29. *Villiersi.* A. d'Orb.
    30. *spiniferus.* King. (1).
    31. *tessellatus.* de Kon.
    32. *scabriculus.* Martin. sp.

(1) Les *Productus spiniferus* et *Morrisianus* ne me sont connus que par leurs noms qui se trouvent inscrits au tableau des *Productus* publié par M. de Verneuil.

- A surface privée de côtes longitudinales, mais garnie de tubes
  - Ornée de plis concentriques sur toute son étendue. *Fimbriati*, ...
    - 33. *Humboldti.* A. d'Orb.
    - 34. *pyxidiformis.* de Kon.
    - 35. *pustulosus.* Phill.
    - 36. *Leuchtenbergensis.* de Kon.
    - 37. *punctatus.* Martin. sp.
    - 38. *fimbriatus.* J. Sow.
    - 39. *Deshayesianus.* de Kon.
  - Privée de plis transverses apparents ou réguliers.
    - A dos voûté. *Caperati.* . .
      - 40. *marginalis.* de Kon.
      - 41. *Keyserlingianus.* de Kon.
      - 42. *brachythœrus.* G. Sow.
      - 43. *granulosus.* Phill.
      - 44. *Murchisonianus.* de Kon.
      - 45. *subaculeatus.* Murch.
      - 46. *aculeatus.* Martin. sp.
      - 47. *dissimilis.* de Kon.
      - 48. *Goldfussi.* Munster. sp.
    - A dos sinué. *Horridi.* . . .
      - 49. *horrescens.* de Vern.
      - 50. *Lewisianus.* de Kon.
      - 51. *Morrissianus.* King.
      - 52. *Geinitzianus.* de Kon.
      - 53. *horridus.* J. Sow.
  - Garnie d'un bourrelet médian. *Mesolobi.* - . .
    - 54. *mesolobus.* Phill.
    - 55. *Christiani.* de Kon.
- A surface entièrement lisse. *Læves.* . . . . . .
  - 56. *Leonhardi.* Wissemann.

A. *PRODUCTI STRIATI.*

1. PRODUCTUS STRIATUS.

Pl. 1, Fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*.

? Lister. 1688. *Hist. sive Synops. Conch.* pl. 468, fig. 27.

Productus comoïdes. Dillwyn. 1823. *An index to the Hist. Conch. of Lister*, p. 24, non Sow.

Mytilus striatus. Fischer. 1830 et 1837. *Oryct. du Gouv. de Moscou*, p. 181, pl. 19, fig. 4.

Pinna inflata. Phill. 1836. *Geol. of Yorks.* II, p. 211, pl. 6, f. 1.

Pecten tenuissimus. Eichw. 1840. *Bullet. scient. de l'Acad. de St.-Petersb.* VII, p. 86.

Lima Waldaïca. v. Buch. 1840. *Kersten's Archiv für Min. Geogn. etc.* XV, p. 60.

Leptæna anomala. J. D. C. Sow. 1841. *Min. conch.* VII, p. 9, pl. 615, fig. 1, *a*, *c*, *d* (fig. 1, *b*, exclusâ).

Productus limœformis. v. Buch. 1841. *Abhandl. der Königl. Akad. der Wissens. zu Berlin, aus dem Jahre* 1841. Theil I, p. 22, pl. 1, fig. 4, 5 et 6.

Productus striatus. de Kon. 1843. *Descr. des Anim. foss. du syst. carb. de Belg.* p. 169, pl. 6, fig. 10, *a*, *b*, *c*, *d* et pl. 8bis, fig. 4, *a*, *b*.

Producta striata. M'Coy. 1844. *Synops. of the carbon. limest. fossils of Ireland.* p. 115.

Leptæna — Fahrenkohl. 1844. *Bullet. de la Soc. impér. des nat. de Moscou*, XVII, p. 784.

Productus striatus. de Verneuil. 1845. *Russia and the Ural Mountains*, II, p. 254, pl. 17, fig. 1, *a*, *b*.

— — de Keyserl. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 212, pl. 4, fig. 8, 8 *a* et 8 *b*, et pl. 5, fig. 1.

— — v. Buch. 1846. *Bericht der Königl. Akad. der Wissens. zu Berlin*, p. 146.

La forme générale de cette espèce est très-variable. Son principal caractère consistant, ainsi que je l'ai déjà fait observer ailleurs, dans le faible développement de son bord cardinal, il en résulte le plus souvent, comme le dit fort bien M. de Verneuil, une forme triangulaire semblable à celle d'un cornet de papier, coupé longitudinalement par son milieu (Pl. I, fig. 1, *a*). Cependant il ne manque pas d'échantillons qui possèdent une forme presque circulaire ou ellipsoïdale (Pl. I, Fig. 1, *c*). A partir de son extrémité cardinale ce *Productus* s'élargit promptement, en suivant une marche assez peu régulière et presque toujours différente pour chaque individu en particulier. Le crochet de la valve dorsale est assez pointu et ne dépasse guère le bord cardinal. Les oreillettes sont applaties; leur longueur et leur largeur sont en rapport direct avec celles de chacun des échantillons; chez les individus courts et plus ou moins arrondis, ces oreillettes sont garnies de longs tubes, très-grêles, recourbés et groupés en masse, au nombre de dix à vingt de chaque côté; les oreillettes des échantillons allongés portent ordinairement une double rangée de tubes semblables aux précédents; dans ce cas ils sont beaucoup plus courts, mais en même temps beaucoup plus nombreux. Je possède dans ma collection un échantillon de cette variété, provenant du calcaire de Visé, sur lequel on ne compte pas moins de quatre-vingt tubes sur une seule oreillette. Si la présence des tubes sur les oreillettes est constante, elle est en revanche extrêmement rare sur le reste de la surface.

Les côtes sont en général assez étroites et conservent à peu près la même largeur sur toute leur étendue, par suite de leurs nombreuses bifurcations et de la fréquente interposition de côtes nouvelles. Elles sont nettement séparées les unes des autres, par des stries fines, mais assez profondes, ce qui fait qu'on les distingue parfaitement bien à la simple vue; leur direction n'est pas toujours très-normale; sur un grand nombre d'échantillons elles sont ondulées, quelquefois même complètement interrompues, comme si un accident était venu les arrêter dans leur développement (Pl. I, fig. 1, *b.*); elles sont *toujours* courbées sur les côtés, de manière à tomber presque perpendiculairement sur le bord où elles sont souvent plus minces que sur toute autre partie de la coquille. Les flancs sont ordinairement ondulés par des plis concentriques et irréguliers, mais peu prononcés; ces plis prennent naissance sur les oreillettes et vont s'éteindre vers le milieu des valves.

Le faible écartement des deux valves de ce *Productus*, est cause que

sa valve ventrale suit beaucoup plus encore, que celle de tout autre espèce, les moindres mouvements de la valve opposée et qu'il devient souvent difficile, pour celui qui n'en a pas une grande habitude, de distinguer l'une de l'empreinte de l'autre. Ce caractère est l'un des plus remarquables et des plus faciles à saisir parmi ceux qui servent à distinguer cette espèce. Il est en effet très-étonnant que des coquilles qui peuvent acquérir une longueur de 13 à 14 centimètres, ne conservent qu'un intervalle de 2 à 4 millimètres entre leurs valves. Le plus grand écartement des valves a lieu un peu en dessous des empreintes musculaires, c'est-à-dire, vers la partie viscéral ou environ au tiers supérieur de la coquille, à partir du crochet (1). Cette circonstance jointe à l'éloignement et au faible développement de la charnière et à l'extrême minceur de la coquille ainsi qu'à la grande taille qu'elle peut acquérir, explique suffisamment les irrégularités de la forme de ce *Productus*. Les agents extérieurs doivent nécessairement avoir eu plus d'influence sur des animaux aussi délicats, que sur ceux que protégeait une coquille épaisse ou une forme demi-sphérique, ainsi qu'une masse musculaire résistante. Ce serait à tort, je pense, que M. M'Coy se prévaudrait de cette irrégularité, ainsi que de l'absence accidentelle des oreillettes sur un grand nombre d'échantillons, pour en faire un nouveau genre, comme il semble y être disposé.

Quelques moules intérieurs de cette espèce que je suis parvenu à me procurer, m'ont prouvé que la surface interne des valves, offre, malgré la minceur de leur test, une conformation identique à celle de tous les autres *Productus*, mais que les diverses parties y sont moins nettement exprimées. Celles que l'on distingue le plus facilement, sont pour la valve dorsale les impressions musculaires qui sont très-larges, mais peu profondes, et pour la valve ventrale, l'arrête médiane qui sert à soutenir sa dent cardinale. Les impressions des follicules du foie sont à peine visibles. Les fossettes et les pointes qui ornent la surface interne des valves sont beaucoup mieux prononcées qu'on ne devait s'y attendre.

(1) C'est du moins la moyenne de mes observations sur les nombreux échantillons de Visé et sur quelques échantillons d'Angleterre et de Russie que j'ai eus à ma disposition. M. de Verneuil assure avoir souvent observé le contraire et posséder un échantillon de Russie, dans lequel l'intervalle entre les deux valves est de 4 millimètres vers le bord antérieur, tandis qu'il n'est que de deux vers la première moitié voisine du bord cardinal.

Dimensions. Le plus grand échantillon de ma collection a environ 140 millimètres de long, bien qu'il ne soit pas intact. La longueur moyenne est de 75 à 100 millimètres.—*Côtes.* Le nombre des côtes varie avec la forme de la coquille ; à 20 millimètres du crochet, on en compte moyennement 40 à 45. Quelques échantillons en offrent moins, d'autres plus, pour le même espace.

Rapports et différences. Il n'existe peut-être pas d'espèce qui s'écarte plus généralement des lois de symétrie qui régissent les Brachiopodes, que celle dont je viens de retracer les principaux caractères. Elle prend des formes tellement éloignées du type ordinaire des *Productus*, que des savants paléontologistes l'ont successivement placée dans cinq genres différents. Cependant, ainsi que le remarque M. de Verneuil, la nature des côtes et les tubes qui laissent presque toujours des traces sur les oreillettes, sont des caractères certains ; ils m'avaient suffi pour placer parmi les *Productus*, les premiers échantillons de cette espèce que je recueillis à Visé, à une époque où personne n'avait encore songé à la rapporter à ce genre.

Parmi les nombreuses variétés de cette espèce, il y en a une qui possède quelqu'anologie avec la variété du *P. giganteus*, plus particulièrement connue sous le nom de *P. hemisphæricus ;* mais elle s'en distingue facilement en ce que cette dernière est toujours beaucoup plus bombée et plus régulière, en ce que ses oreillettes sont moins applaties, ses côtes moins nombreuses et son têst beaucoup plus épais. C'est à cette variété que je rapporte, non sans conserver quelque doute, le fossile que Lister a figuré sur la planche 468 de son *Synopsis conchyliorum.*

Gisement et localités. De même qu'en Russie, cette espèce se trouve constamment associée en Belgique, en Angleterre et en Irlande, au *P. giganteus*, et, comme lui, doit être mise au nombre des coquilles les plus caractéristiques de l'étage inférieur du système carbonifère. Jusqu'ici, je ne connais en Belgique, que le calcaire carbonifère de Visé, dans lequel cette espèce se rencontre; on y remarquait autrefois, une partie de la roche, actuellement recouverte d'un remblai de la route de Liége, qui était presqu'exclusivement formée de coquilles de cette espèce enchassées les unes dans les autres. Des dépôts semblables existent aussi en Russie ; c'est dans les vallées de Stolobenka et de Prikcha (Valdaï) que MM. de Verneuil et de Keyserling et Sir Roderick Murchison ont trouvé cette espèce le plus abondamment. Ils l'ont rencontrée

encore à Loutchinskaia-Gorka près de Tichwin, Gouvernement de Novgorod ; à Andoma dans les environs de Vitegra ; au village de Berekowa, sur la rivière Ossetr et à Gourieva (Gouvernement de Toula). Dans l'Oural ces trois savants s'en sont utilement servi au milieu des dislocations des couches. Elle y existe sur la Tsousovaya, à quelques verstes audessus de Kalino, à Grobovo, route de Perm à Ekaterinbourg ; un peu à l'Ouest d'Ust-Kataf, entre ce point et Simsk et enfin, à quelques verstes à l'E. d'Andreiouski, sur la route de Preobajensk, un peu avant Tchamatzino (Oural méridional). J'en possède un échantillon de la rivière Isset, près des usines de Kamensk, à l'Est d'Ekaterinbourg. M. de Keyserling l'a trouvée dans le calcaire carbonifère du Schleifsteinberg sur la Soiwa ainsi que sur les bords de la Sopyousa, affluent de la Petschora. Selon M. Fischer, elle se rencontrerait encore dans les sables d'Archangelsky, selon M. Fahrenkohl sur les bords de la Luscha et selon M. de Buch, sur les bords de la Moschinka, près de Zvenigorod (Moscou) ainsi que dans l'Ile-aux-Ours (Cherrie-Island des Anglais), d'où elle a été rapportée par le savant naturaliste Norwegien Keilhau, avec plusieurs autres espèces et notamment avec le *P. giganteus*. Cette espèce se trouve en outre dans le calcaire carbonifère de Kendal, de Bolland (Yorkshire) et de Kirby-Lonsdale en Angleterre, ainsi que dans celui de l'Irlande (M'Coy).

Explication des figures (1). Pl. I, Fig. 1, *a*. Individu adulte (variété allongée) du calcaire carbonifère de Visé, vu en dessus ; de ma collection.

Fig. 1, *b*. Individu adulte (variété triangulaire) de la même localité, vu en dessus ; de ma collection.

Fig. 1, *c*. Individu adulte (variété ovale) de la même localité, vu en dessus ; de ma collection.

Fig. 1, *d*. Le même en partie restauré, vu de profil du côté du crochet, pour montrer la direction des tubes.

(1) Toutes les figures de mes planches sont de grandeur naturelle, à moins que le contraire ne soit indiqué dans l'explication.

2. PRODUCTUS GIGANTEUS.

PL. I, FIG. 2, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; PL. II, FIG. 1, *a*, *b*, *c*; PL. III, FIG. I, *a*, *b*, *c*; PL. IV, FIG. *a*, *b*, *c*, *d* et PL. XI, FIG. 8.

LISTER. 1688. *Hist. sive Synops. Conchyl.* pl. 465, fig. 25, *b*. et pl. 467, fig. 26, *b*.

Anomites giganteus. MARTIN. 1809. *Petrif. Derb.* p. 6, pl. 15, fig. 1.

— *crassus.* ID. Ibid. p. 7, pl. 16, fig. 2.

Tridacna pustulosa. LAMK. 1820. *Anim. s. vert.* vol. 6, p. 107.

Productus Scoticus. J. SOW. 1813. *Min. Conch.* vol. I, p. 158, pl. 69, fig. 3, non DE KON.

— *giganteus.* J. SOW. 1823. Ibid. vol. IV, p. 19, pl. 320.

— *personatus.* ID. Ibid. p. 20, pl. 321 (moule intérieur).

— *hemisphæricus.* ID. Ibid. p. 31, pl. 328.

— *giganteus.* DILLWYN. 1823. *An index to the Hist. Conch. of Lister.* p. 24.

— *Scoticus.* KRUEGER. 1825. *Urweltl. Naturg.* vol. II, p. 216,

— — DEFR. 1826. *Dict. des sc. nat.*, vol. XLIII, p. 352.

— *hemisphæricus.* ID. Ibid. p. 353.

— *Scoticus.* ID. Ibid. p. 350.

— *giganteus.* FLEM. 1828. *Brit. Anim.* p. 379.

— *crassus.* ID. Ibid. p. 379.

— *personatus.* ID. Ibid. p. 379.

— *hemisphæricus.* ID. Ibid. p. 379.

— *Scoticus.* ID. Ibid. p. 378.

Producta hemisphærica. J. D. C. SOW. 1829. *Min. Conch.* vol. VI, p. 117, p. 561.

Productus hemisphæricus. DUMONT. 1832. *Const. géol. de la prov. de Liége*, p. 354.

— *personatus.* ID. Ibid. p. 354.

— *Scoticus.* ID. Ibid. p. 354.

— *hemisphæricus.* DAVREUX. 1833. *Const. géogn. de la prov. de Liége.* p. 272.

— *personatus.* ID. Ibid. p. 272.

— *Scoticus.* ID. Ibid. p. 272.

Producta gigantea. PHILL. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 215, pl. 8, fig. 5.

Producta pugilis. Id. Ibid. pl. 8, fig. 6.
— *aurita.* Id. Ibid. p. 214, pl. 7, fig. 6 et 7.
— *Edelburgensis.* I. Ibid. p. 214, pl. 7, fig. 5.
Productus giganteus. Desh. 1836. *Nouv. édit. des Anim. s. vert. de* Lamk. vol. VII, p. 385.
— *hemisphæricus.* Id. Ibid. p. 386.
— *Scoticus.* Id. Ibid. p. 383.
Leptæna variabilis. Fischer. 1837. *Oryct. du Gouv. de Moscou*, p. 144, pl. 21.
— *comoïdes?* Id. Ibid. p. 143, pl. 22, fig. 1.
Productus gigas u. *hemisphæricus.* Eichw. 1840. *Bullet. de l'Acad. imp. des sc. de St.-Petersb.* VII, p. 86.
— *Gigas* oder *giganteus.* v. Buch. 1841. *Abhandl. der Königl. Akad. der Wissens. zu Berlin, aus dem Jahre* 1841, Erster Theil, p. 19.
— *comoïdes.* Id. Ibid. p. 21, pl. 1, fig. 1, 2, 3, non Sow.
— *Scoticus.* Id. Ibid. p. 24.
Producta hemisphærica. d'Arch. and de Vern. 1842. *Trans. of the geol. soc. of London*, 2nd ser. vol. VI, part II, p. 397.
Productus giganteus. de Kon. 1843. *Anim. foss. du terr. carb. de Belgique*, p. 174, pl. 7, fig. 1, *a*, *b* et pl. 11, fig. 1, *a*, *b*, *c*.
— *comoïdes.* Id. Ibid. pl. 7bis, fig. 1, *a* et *b*, non Sow.
— *giganteus.* Morris. 1843. *Catal. of Brit. foss.* p. 126.
— *crassus.* Id. Ibid. p. 126.
— *hemisphæricus.* Id. Ibid. p. 126.
— *auritus.* Id. Ibid. p. 125.
— *Edelburgensis.* Id. Ibid. p. 126.
Leptæna gigantea. Fahrenkohl. 1844. *Bullet. de la Soc. imp. des nat. de Moscou*, vol. XVII, p. 783.
— *comoïdes.* Id. Ibid. p. 783.
Producta gigantea. M'Coy. 1844. *Synops. of the carb. limest foss. of Ireland*, p. 109.
— *aurita.* Id. Ibid. p. 107.
— *Edelburgensis.* Id. Ibid. p. 108.
— *hemisphærica.* Id. Ibid. p. 110.
Productus giganteus. Desor. 1845. *Traduction de la Min. conch.* p. 353, pl. 212-320.
— *personatus.* Id. Ibid. p. 354, pl. 213-321.

Productus hemisphæricus. Id. Ibid. p. 358 et 578, pl. 218-328, fig. 1 à 4 et 366-561.

— *striatus.* E. Robert. 1845. *Atlas géologique des voyages en Scandivavie etc. de la Commission scientifique du Nord.* pl. 20, fig. K, non Fischer.

— *giganteus.* de Vern. 1845. *Russia and the Ural Mount.* vol. II, p. 255, pl. 16, fig. 12, *a*, *b* et pl. 17, fig. 2, *a*, *b*, *c*, *d*.

— *Edelburgensis.* Id. Ibid. p. 259, pl. 18, fig. 2.

— *comoïdes.* Geinitz. 1846. *Grundr. der Versteinerungsk.* p. 519.

— *hemisphæricus.* de Keyserl. 1846. *Reise in das Petchora-Land*, p. 211, pl. 5, fig. 2, 2 *a*, 2 *b*.

Cette espèce étant la plus grande de tous les *Productus* connus, c'est avec raison que Martin lui a appliqué le nom qu'elle porte. Elle est ordinairement transverse, très-gibbeuse et assez fortement dilatée sur les côtés. Son bord cardinal, est très-développé et son étendue dépasse de beaucoup celle de l'axe transversal de la coquille. Les oreillettes sont en général assez nettement séparées de la partie médiane de la valve dorsale ; au lieu d'être applaties comme elles le sont chez la plupart des autres espèces, et de former un angle aigu avec le plan qui passe par les bords libres de la coquille, elles sont bombées dans leur milieu et se contournent de manière à faire tomber leur bord supérieur au moins perpendiculairement sur ce plan et souvent même de manière à former avec lui un angle obtus. Cette conformation est surtout développée chez les adultes et devient pour eux, l'un des caractères les plus distinctifs de l'espèce.

La surface est garnie d'un grand nombre de côtes, dont la dimension est assez variable selon les individus et dont la marche est rarement régulière ; elles sont en général un peu plus applaties et un peu plus fortes que celles du *P. striatus* ; elles se bifurquent, puis se rejoignent pour se diviser de nouveau, se croisent ou se recouvrent mutuellement dans leur direction tortueuse. Lorsque les échantillons sont d'une bonne conservation, elles sont traversées par des stries concentriques d'accroissement très-visibles à l'œil nu; chez quelques individus de petite taille, mais décrépits sans doute, ces stries deviennent tellement dominantes sur le prolongement antérieur, qu'elles parviennent à effacer presque complétement les

côtes longitudinales, qui dans tous les cas y sont moins prononcées que vers le milieu de la valve. Ces côtes sont interrompues çà et là par des petits tubercules qui ont servi de base à des tubes assez grêles, ainsi que l'attestent les fragments qu'ils ont laissé subsister dans la roche et sur la coquille même. Lister a fort bien figuré ces tubercules et Martin les a très-bien décrits et les a en outre parfaitement distingués d'avec les pointes qui hérissent la surface interne de la valve ventrale. C'est sur les côtes des oreillettes qui sont toujours un peu plus larges que celles du reste de la surface, que les traces de leur origine sont surtout visibles et nombreuses; les côtes les plus rapprochées du bord cardinal sont les plus remarquables sous ce rapport : en partant du crochet, ces côtes décrivent un arc de cercle avant d'atteindre le bord, tout en donnant naissance pendant leur trajet à des tubes dont le nombre et l'épaisseur sont rarement identiques chez tous les individus (Pl. IV, Fig. 1, *b* et Fig. 1, *c*).

La surface de la plupart des échantillons adultes de cette espèce, à l'exception de ceux qui proviennent du calcaire carbonifère de Visé, est chargée d'un nombre variable de plis longitudinaux irréguliers et inégaux, qui ne sont pas toujours parallèles entre eux et bien moins encore parallèles aux côtes. Ces plis prennent en général naissance vers le premier quart de la longueur totale de la coquille; ils partent rarement du crochet, mais il arrive assez souvent que la coquille atteigne plus de la moitié de sa longueur avant qu'ils ne se déclarent (Pl. IV, fig. 1, *a*). M. de Buch les compare aux plis d'un tapis pendu contre un mur et cette comparaison est assez exacte. Les individus sur lesquels ces plis longitudinaux sont moins prononcés, ont leurs oreillettes et leurs flancs traversés par quelques ondulations irrégulières et concentriques très-peu sensibles, et semblables à celles qui se trouvent sur les mêmes parties de l'espèce précédente.

Le crochet ne dépasse en général que faiblement le bord cardinal. Cependant sa forme est assez variable : chez certains individus il est très-bombé et se recourbe assez fortement sur lui-même, en rendant la valve dorsale très-gibbeuse (Pl. III, Fig. 1, *b* et Fig. 1, *c*); chez d'autres au contraire, il est beaucoup plus déprimé et sa dépression influe jusque sur la forme des oreillettes, qui dans ce cas sont toujours beaucoup moins enroulées (Pl. IV, Fig. 1, *a*). C'est sur cette dernière variété que Sowerby a créé son *P. hemisphæricus*, dont M. Phillips a fait son *P. Edelburgensis*, maintenu par M. de

Verneuil et que M. de Buch a confondue, je pense, avec le *P. comoïdes* Sow., qui est un véritable *Chonetes*, ainsi qu'on le verra par la suite.

La charnière quoiqu'ordinairement dépourvue d'area, peut cependant dans quelques cas exceptionnels, en posséder les rudiments, ainsi que le démontre l'échantillon que je suis parvenu à dégager heureusement et que j'ai fait figurer Pl. II, fig. 1, *b* (1). Cette figure peut servir en même temps à démontrer la forme de la valve ventrale. Cette valve est très-concave et suit de si près le contour de la valve opposée, qu'il ne reste qu'un intervalle extrêmement étroit entre les parties qui forment leur prolongement antérieur. La partie viscérale de ce même échantillon, possède une épaisseur totale de 12 millimètres, ce qui, vu l'épaisseur du test de cette espèce, réduit nécessairement l'espace qui sépare la surface intérieure des deux valves dans cette partie, à environ 5 à 6 millimètres, espace bien étroit, comparativement à la taille de l'animal. Ce test qui dans certaines parties peut atteindre 5 à 6 millimètres d'épaisseur, est composé de plusieurs couches superposées, qui dans des circonstances particulières s'exfolient facilement. Si j'en juge par quelques fragments bien conservés, sa structure m'a paru avoir quelqu'analogie avec celle du test des grands *Inoceramus* de la craie.

Je regrette de n'avoir pu étudier l'intérieur de chacune des deux valves de cette coquille, que sur des moules. Plus heureux que moi, M. de Verneuil est parvenu à s'en procurer une valve ventrale dont la surface interne est entièrement dégagée (Pl. I, Fig. 2, *d* et Fig. 2, *e*). Cette valve a une forte dent médiane trifurquée, dont chaque partie est composée de la réunion d'un assez grand nombre de petites lamelles infundibuliformes, s'emboîtant les unes dans les autres; l'arête longitudinale qui s'y rattache, est peu saillante et s'avance jusqu'au milieu de la valve. De chaque côté de cette arête s'étendent des callosités allongées et étroites d'une forme légèrement sygmoidale, dont la partie courbe inférieure ceint à moitié les

(1) Bien que je n'osasse affirmer que la construction de cette area rudimentaire, dont les bords sont parfaitement parallèles sur toute son étendue, soit en tout point identique avec celle de l'area des *Spirifer*, ou même des *P. subaculeatus* et *horrescens*, son existence suffit néanmoins pour démontrer que l'on ne peut s'appuyer sur ce seul caractère pour créer un genre nouveau. C'est probablement une area semblable à celle dont je viens de parler que M. de Buch a observée sur son *P. comoïdes*

éminences qui correspondent aux creux de la valve opposée; la moitié antérieure est couverte d'un grand nombre de pointes inclinées en avant, distribuées d'une manière assez régulière, mais dont la taille est différente selon qu'elles sont plus ou moins rapprochées des bords.

Je donnerai la description de la surface interne de la valve dorsale d'après un moule magnifique, que M. Valenciennes a eu l'obligeance de me confier (Pl. XI, Fig. 8). A une petite distance du crochet se trouvent les deux apophyses hépatiques d'une forme allongée, à ramifications très-nombreuses, mais peu marquées. A côté de chacune de ces apophyses, qui ne sont séparées que par un sillon longitudinal peu prononcé s'élèvent des callosités triangulaires, en dessous des quelles se trouvent les impressions musculaires qui sont assez profondes et dont les stries obliques sont si fortement marquées, qu'elles ressemblent à des hachures; entre ces deux impressions qui sont d'une forme ovalaire transversale, se trouve compris un petit espace à peu près quarré dont le centre est déprimé. Enfin, immédiatement en dessous des impressions musculaires on remarque les deux cavités que Martin et M. de Buch croient avoir servi à recevoir les bras spiraux, et qui donnent aux moules les formes bizarres dont Sowerby a fait son *P. personatus*. Toute la surface, sauf celle des impressions musculaires et des apophyses hépatiques, est criblée d'un nombre considérable de fossettes, dont les plus petites, qui, sont en même temps les plus rapprochées des bords, ressemblent à des piqures d'épingles et dont les autres, principalement celles qui ornent la surface des cavités et des parties adjacentes, sont plus espacées et ont une forme faiblement allongée.

Dimensions. Des échantillons du calcaire carbonifère de Visé offrent une longueur de 150 à 160 millimètres, bien que la longueur moyenne soit de 100 à 120 millimètres. Les rapports entre la longueur, la largeur, la hauteur et l'épaisseur, sont=100 : 136 : 15. — *Côtes.* A 20 millimètres du crochet on en compte 35 à 40 dans un espace de 20 millimètres.

Rapports et différences. Ainsi qu'il est facile de s'en assurer par la synonymie que j'ai donnée plus haut, je rapporte à une seule espèce les *Productus* que Sowerby et M. Phillips ont décrits sous les noms de *P. Scoticus*, *hemisphæricus*, *Edelburgensis* et *auritus*. Une étude bien approfondie d'un nombre considérable d'échantillons de tous les âges et de localités très-diverses, m'a convaincu que le premier de ces noms a été appliqué à des échantillons d'un âge peu avancé et

qui, bien que n'ayant pas encore acquis tous les caractères qui distinguent les adultes, se font reconnaître par la nature de leurs côtes, par la forme des tubercules dont quelques-unes de ces côtes sont hérissées, ainsi que par la similitude parfaite du moule intérieur de leur valve ventrale.

Le nom de *Productus hemisphæricus* est assez généralement appliqué à une variété un peu plus applatie et à test un peu moins épais, mais dont le moule intérieur est identiquement le même que celui du *P. giganteus* ordinaire. Je suis porté à croire que cette variété dont il est impossible de distinguer les *P. Edelburgensis* et *auritus*, a vécu dans des endroits peu profonds, où, n'ayant point à lutter contre le poids d'une colonne d'eau aussi élevée que les autres, l'animal n'a pas senti la nécessité de donner à sa coquille une forme aussi bombée, ni une épaisseur aussi considérable, que s'il eut vécu dans des bas fonds où il eut eu à supporter une pression énorme. L'épaisseur des côtes, qui est ordinairement un peu plus considérable dans cette variété, vient encore à l'appui de cette supposition, les organes sécréteurs éprouvant nécessairement moins de difficulté à remplir leurs fonctions dans les circonstances dans lesquelles l'animal est supposé s'être trouvé (1).

Le *P. comoïdes* de M. de Buch me semble aussi devoir être rapporté à cette variété, par le motif que ce savant Paléontologiste déclare lui-même qu'il est très difficile de le distinguer du *P. giganteus* et que l'intérieur des valves qu'il a figuré, ne se rapporte aucunement à celui de l'espèce que Sowerby a désignée sous ce nom.

J'ai longtemps hésité avant de séparer le *P. latissimus*, du *P. giganteus* auquel il est toujours associé et avec lequel il a les plus grands rapports. On trouvera les motifs qui m'y ont décidé à l'article suivant consacré à sa description.

Lorsque la partie antérieure du *Chonetes comoïdes* est engagée dans la roche, on pourrait le confondre avec le *P. giganteus*, si, ainsi que je l'indiquerai par la suite, on négligeait d'observer le nombre et la forme des côtes qui recouvrent sa surface. Ces côtes sont toujours plus nombreuses et beaucoup plus régulières sur le

(1) S'il était vrai, ainsi que le prétend M. de Verneuil, que la variété *hemisphæricus* appartient en Angleterre aux étages moyen et supérieur du système carbonifère, je trouverais dans ce fait une preuve convaincante en faveur de mon opinion sur la cause qui a produit cette variété.

Chonetes que sur le *Productus;* elles sont en outre dépourvues de tubes ou de renflements tuberculeux ; enfin, sa surface n'est jamais plissée comme l'est celle du *P. giganteus.*

Gis. et loc. Visé, Chokier et Templeux sont les seules localités où le *P. giganteus* se soit rencontré en Belgique. C'est dans la première de ces localités qu'il se trouve le plus fréquemment et qu'il atteint sa plus forte taille. De même qu'en Russie, où il est très-abondant et souvent d'une conservation parfaite, en Angleterre, en Irlande, en Allemagne et à l'Ile-aux-Ours, il caractérise chez nous les assises inférieures du système carbonifère, et ne s'y trouve jamais associé au *Spirifer Sowerbyi (mosquensis)* Fischer, qui appartient exclusivement à l'étage moyen (1).

Cette observation, qui, si je ne me trompe, a été faite en premier lieu par M. von Helmersen, n'est pas sans importance dans les recherches pratiques du mineur et Sir Roderick Murchison et MM. de Verneuil et de Keyserling ont fait ressortir les avantages que l'on peut retirer dans ce cas, de la connaissance de la position normale et stratigraphique des fossiles, en expliquant les relations du *P. giganteus* avec les couches de houille qui sont à la base du système carbonifère de la Russie centrale. C'est surtout dans les pays tourmentés, comme le Donetz ou l'Oural, que cette connaissance, d'après ces savants géologues, est véritablement utile et indispensable (2).

Les localités où l'on rencontre le *P. giganteus* sont très-nombreuses en Russie. Je le possède de Karova, de Jerovskoi sur l'Oka, de Mydynsk, des bords de la Draegitchi, affluent de l'Oka, de l'Igra, de la Serena, des ravins Orlova et Nikoulin et de la Dougna (Gouvernement de Kalouga); de l'Usine de Saraninsk dans l'Oural. M. de Verneuil le cite dans le Valdaï, à Peredki, dans les vallées de la Kamenka et de la Bielaïa et à Ostaschkof, sur le Volga. Dans le bassin du Donetz à Roubejnoi et à Stila d'après M. Leplay et à Kara-

(1) Jusqu'ici on n'a pas encore rencontré le *P. giganteus* en Espagne, mais M. Paillette y a trouvé le *S. Sowerbyi* à Pola de Lena etc., associé aux mêmes espèces de *Productus* qui l'accompagnent en Belgique et en Russie. Il est donc probable que là aussi ce *Spirifer* caractérise l'étage moyen. Cependant M. de Verneuil fait observer que M. Leplay prétend avoir trouvé ces deux espèces ensemble à Roubejnoi, dans le Donetz, localité où il a longtemps séjourné (Russia and the Ural Mountains, II, p. 258).

(2) Elle ne serait probablement pas d'un moindre secours en Espagne où le système carbonifère est aussi très-tourmenté.

kouba, selon M. Olivieri. Dans l'Oural à Kamensk et à Bielobar sur la rivière Isset. M. de Keyserling cite la variété *hemisphæricus* du calcaire dolomitique du Wol, affluent de la Wytschegda, du calcaire carbonifère de Podtscher sur la Petschora et des couches moyennes et inférieures de l'Ylytsch. D'après M. de Buch il se trouve encore à Borowitchie sur le Msta, sur les bords de la Kamenka et de la Balaja près de Podborje (Gouvernement de Nowgorod).

En Silésie cette espèce caractérise les couches carbonifères inférieures d'Altwasser, de Hausdorf et de Falkenberg (comté de Glatz), en Carinthie celles des environs de Bleiberg et sur les bords du Rhin celles de Ratingen. En Angleterre je la connais dans les couches inférieures de Lowick, de Sunderland et de Northumberland. On le trouve en outre dans le Derbyshire à Kendal-Buxton et à Fairfeld; dans l'Yorkshire à Bolland, à Aldstone-Moor, à Hawes, à Askrigg, à Kirby-Lonsdale, à Addlebourgh, à Fountains-Fell, et à Ulverston; dans le Caermartenshire à Wallington près de Wolverhampton, à Mynidd-Careg près de Kidwelly, et en Irlande. M. de Buch a recemment reconnu le *P. giganteus* parmi les fossiles recueillis par M. Keilhau au sommet du Mount Misery de l'Ile-aux-Ours, où il est accompagné des *P. striatus* et *punctatus*.

Explication des figures. Pl. I, Fig. 2, *a*. Jeune individu vu du côté de la valve dorsale, provenant du calcaire carbonifère de Visé. De ma collection.

Fig. 2, *b*. Le même vu du côté opposé.

Fig. 2, *c*. Le même vu de profil.

Fig. 2, *d*. Intérieur de la valve ventrale d'un grand individu provenant du Valdaï. Les pointes ne sont bien prononcés que sur la partie antérieure. D'après M. de Verneuil.

Fig. 2, *e*. Portion de la même valve vue du côté du crochet, pour montrer la tripartition de la dent. D'après le même.

Pl. II, Fig. 1, *a*. Individu adulte vu du côté de la valve dorsale, montrant à gauche une partie du moule intérieur de cette valve hérissée de pointes, provenant du calcaire carbonifère de Karova, gouvernement de Kalouga. De ma collection.

Fig. 1, *b*. Autre échantillon adulte provenant de la même localité, vu du côté de la valve ventrale. Il est remarquable par son area rudimentaire. De ma collection.

Fig. 1, *c*. Le même vu du côté du crochet.

Pl. III, Fig. 1, *a*. Moule intérieur de la valve ventrale d'un échan-

tillon adulte provenant du calcaire carbonifère de Visé, montrant sur l'oreillette gauche les traces de l'ouverture des tubes et à droite l'épaisseur de la valve. De ma collection.

Fig. 1, *b*. Individu très-gibbeux, de moyenne taille, provenant du calcaire carbonifère du ravin Nikaulin (Gouvernement de Kalouga), vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 1, *c*. Le même vu du côté du crochet.

Pl. IV, Fig. 1, *a*. Individu de moyenne taille, très-déprimé, appartenant à la variété *hemisphæricus*, provenant du calcaire carbonifère du ravin Orlova, aboutissant à la rivière Serena, dans le district de Koselsk (Gouv. de Kalouga), vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 1, *b*. Jeune individu appartenant à la variété *Edelburgensis*, à côtes larges et plates, montrant des traces de tubes sur chacune de ses oreillettes. Cet échantillon vu du côté de la valve dorsale, provient du calcaire carbonifère de Visé. De ma collection.

Fig. 1, *c*. Fragment de la valve dorsale d'un échantillon provenant de la couche carbonifère d'Altwasser en Silésie, pour montrer une partie des tubes situés à la charnière. De ma collection.

Fig. 1, *d*. Moule intérieur de la valve dorsale d'un jeune individu de la variété *hemisphæricus*, provenant du calcaire carbonifère de Visé, pour montrer son identité avec le moule du *P. giganteus*. De ma collection.

Pl. XI, Fig. 8. Moule intérieur d'une parfaite conservation d'un grand individu provenant probablement du calcaire carbonifère de l'Angleterre. De la collection des galeries d'Histoire naturelle du Muséum de Paris.

3. PRODUCTUS LATISSIMUS.

Pl. II, Fig. 2 et Pl. III, Fig. 2, *a*, *b*.

Productus latissimus. J. Sow. 1823. *Min. Conch.* vol. IV, p. 32, pl. 330.

— — Defr. 1826. *Dict. des sc. nat.* vol. XLIII, p. 350.

— — Flem. 1828. *Brit. anim.* p. 379.

— — Desh. 1832. *Encyc. méth. Art.* Vers, vol. II, p. 849.

Productus latissimus. DUMONT. 1832. *Const. géol. de la Prov. de Liége*, p. 354.

— — DAVREUX. 1833. *Const. géogn. de la Prov. de Liége.* p. 272.

— — DESH. 1836. 2^me^ *édit. des Anim. sans vert.* de LAMARCK. vol. VII, p. 382.

Producta latissima. PHILL. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 214, pl. 8, fig. 1.

Leptæna variabilis (partim). FISCHER. 1837. *Oryct. du Gouv. de Moscou.* p. 144.

Productus latissimus. v. BUCH. 1841. *Abhandl. der Königl. Akad. der Wissens. zu Berl. aus dem Jahre* 1841, Erster Theil, p. 23.

Producta latissima. D'ARCH. et DE VERN. 1842. *Trans. of the geol. Soc. of London*, 2^nd^ ser. vol. VI, part II, p. 397.

Productus latissimus. DE KON. 1843. *Descript. des anim. fossiles du terr. carb. de Belg.* p. 178, pl. 12, fig. 1.

Producta latissima. M'COY. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 110.

Leptæna — FAHRENKOHL. 1844. *Bullet. de la soc. imp. des natur. de Moscou*, vol. XVII, p. 784.

Productus latissimus. DESOR. 1845. *Trad. de la Min. Conch. de* SOW. p. 359, pl. 220-330.

Coquille très-transverse, renflée dans son milieu et assez effilée de chaque côté pour paraître fusiforme, lorsqu'elle est placée dans sa position normale (PL. III, FIG. 2, *b.*). Elle doit principalement cette apparence à la largeur considérable de ses oreillettes qui ne sont point, comme dans l'espèce précédente, nettement séparées de la partie viscérale de la coquille, mais s'y réunissant par une pente tellement peu sensible, qu'il serait bien difficile d'en tracer les limites. Leur bord cardinal est si fortement contourné, qu'il vient tomber à angle droit sur le plan qui passe par les bords libres de la coquille; ce caractère m'a paru être constant, et se remarque jusque sur les plus petits échantillons.

La valve ventrale est très-concave et suit de si près tous les mouvements de la valve supérieure, que la distance entre les parois

internes de chacune des deux valves n'est que d'environ 3 millimètres pour un échantillon ayant une largeur de 70 millimètres.

Le test est mince et fragile ; sa surface est couverte de côtes longitudinales un peu plus épaisses et plus régulières que celles qui ornent la surface de l'espèce précédente ; elles sont aussi en général plus épineuses. Leur nombre s'augmente ordinairement par implantation de nouvelles côtes, rarement par simple bifurcation ; chez les adultes, les côtes comprises dans un même espace, sont plus nombreuses sur les bords libres de la coquille que partout ailleurs. Celles qui couvrent le bord cardinal des oreillettes, sont courbées en arc de cercle et se terminent ordinairement en un tube à une très-faible distance de ce bord (Pl. III, Fig. 1, *a*) et rarement sur le bord même.

Il est rare que la surface soit plissée ; les plis, lorsqu'il en existe, sont toujours en très-petit nombre et très-peu marqués. L'extrême minceur du test est cause que les diverses parties qui en général sont bien dessinées à la surface interne des valves de la plupart des *Productus*, sont presque complètement effacées sur celles de cette espèce. Aucun des moules internes que j'en possède, n'offre des traces de pointes ou d'apophyses hépatiques. Tous sont couverts de côtes ; les sillons qui séparent celles-ci les unes des autres, sont criblés d'une foule de petites fossettes semblables à des piqures d'épingle. Un seul de ces moules (Pl. II, Fig. 2) possède à l'endroit où se trouvent ordinairement les impressions des apophyses hépatiques, deux petites dépressions au fond desquelles les côtes se recourbent en forme de S, mais de manière à ce que la courbure des unes soit en sens inverse de celle des autres.

Dimensions. Certains échantillons ont près de 20 centimètres de largeur. La largeur moyenne est de 10 à 12 centimètres. Le rapport de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur (1) est = 100 : 220 : 55 : 8,7. — *Côtes.* A 20 millimètres du crochet ou de compte 25 à 28 dans un espace de 20 millimètres.

Rapports et différences. Dans le jeune âge et lorsque les oreillettes sont engagées dans la roche, il est bien difficile de distinguer cette espèce de la précédente. C'est probablement cette difficulté augmen-

(1) Par hauteur j'entends la plus courte distance comprise entre le plan qui passe par les bords libres de la coquille placée dans sa position normale et le point culminant de la valve dorsale ; je désigne par épaisseur le plus grand diamètre vertical des deux valves.

tée encore par la présence dans la même roche, d'individus qui par leur forme intermédiaire semblent servir de passage de l'une à l'autre de ces deux espèces, a engagé M. Fischer à les confondre ensemble et à les comprendre sous la désignation commune de *Leptæna variabilis*. J'eus volontiers partagé l'opinion de l'auteur de l'*Oryctologie du Gouvernement de Moscou*, si les deux espèces se fussent toujours rencontrées dans les mêmes conditions. Mais dès qu'il a été démontré que l'une des formes se trouve dans certaines localités en grande abondance, à l'exclusion complète de l'autre, ainsi que M. de Verneuil l'a remarqué sur les côtes du Northumberland et à Kirby Lonsdale, où le calcaire carbonifère ne renferme que le *P. latissimus*, la légère différence qui existe entre elles, bien que d'un faible intérêt pour le zoologiste, acquiert une importance réelle pour le géologue et le paléontologiste.

D'ailleurs, cette observation n'eut-elle pas été faite, je crois qu'il existe des caractères suffisants pour distinguer le *P. latissimus*, du *P. giganteus*. Ainsi que je l'ai fait observer plus haut, le test de ce dernier est toujours assez épais, pour que chez des individus même très-jeunes, les impressions musculaires et autres soient toujours nettement exprimées à l'intérieur et que les côtes y soient complètement effacées. Chez le *P. latissimus* le test est tellement mince, que chez les individus de la plus grande taille, les côtes subsistent à leur surface interne, et qu'en outre on n'y remarque aucune trace des impressions musculaires et des apophyses hépatiques. L'épaisseur des côtes, que les stries d'accroissement ne parviennent jamais à effacer, le nombre plus considérable de tubes, l'absence complète des gros plis si caractéristiques pour le *P. giganteus* adulte, sont encore autant de caractères qui peuvent servir à faire reconnaître le *P. latissimus*, bien qu'à mes yeux, le premier soit le seul sur lequel on puisse se baser pour le distinguer avec certitude.

Gis et loc. Le *P. latissimus* est une des coquilles les plus caractéristiques de l'étage inférieur du système carbonifère. Il s'y trouve souvent associé aux *P. giganteus* et *striatus*, mais en général il est moins abondant que ceux-ci. En Belgique je ne l'ai trouvé que dans le calcaire carbonifère de Visé, dans lequel il est assez rare. Je le possède du calcaire carbonifère des bords de la Touda, affluent du Volga (Gouvernement de Twer) et de l'Oka (Gouvernement de Kalouga). M. de Verneuil l'a trouvé sur les bords de la rivière Kamenka dans le Valdaï et dans le district de Rjef sur le Volga. M.

de Buch le cite de Czerna au Nord-Est de Cracovie, des environs de Nowa Gora et de Taruza. En Irlande à Killymeal près de Dungannon; en Angleterre à Tydmaur Farm dans l'Anglesea, a Fountains-Fell, à Kirby Lonsdale, à Otterburn, à Howick, à Sunderland dans le Northumberland et dans le Cumberland.

Explication des figures. Pl. II, Fig. 2. Moule intérieur de la valve dorsale d'un individu adulte, provenant du calcaire de Visé, montrant la direction courbe de ses côtes à l'endroit des apophyses du foie. De ma collection.

Pl. III, Fig. 2, *a*. Individu provenant des bords de l'Oka, vu du côté du crochet, pour montrer l'origine des tubes sur le bord cardinal. De ma collection.

Fig. 2, *b*. Le même vu du côté de la valve dorsale.

4. PRODUCTUS MARGARITACEUS.

Pl. IV, fig. 3, *a*, *b*.

Producta margaritacea. Phill. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 215, pl. 8, fig. 8.

— *pectinoïdes.* Id. *Ibid.* p. 215, pl. 7, fig. 11.

Productus Scoticus (partim). v. Buch. 1841. *Abhandl. der K. Akad. der Wissens. zu Berlin, für dem Jahre* 1841, Erster Theil, p. 25, non Sow.

Producta margaritacea. d'Arch. et de Vern. 1842. *Trans. of the geol. Soc. of London*, 2nd ser. vol. VI, part II, p. 396.

Productus margaritaceus. de Kon. 1843. *Desc. des anim. foss. du terr. carb. de Belgique*, p. 168, pl. VII, fig. 3, *a*, *b* et pl. VIII^{bis}, fig. 5, *a*, *b*.

Producta margaritacea. M'Coy. 1844. *Syn. of the charact. of the carb. limest. foss. of Ireland.* p. 111.

— *pectinoïdes.* Id. *Ibid.* p. 113.

Productus margaritaceus. Keyserl. 1846. *Wissensch. Beobacht. auf einer Reise in das Petschora-Land.* p. 210, pl. 4, fig. 7.

Cette espèce est remarquable par sa forme déprimée et presque complètement circulaire. Sa valve dorsale étant assez régulièrement

bombée, il en résulte qu'elle ressemble à une section de sphère lorsqu'elle est placée dans sa position normale; cette comparaison est exacte surtout, lorsqu'elle est privée de ses oreillettes, ce qui lui arrive fréquemment, à cause de leur grande tenuité et de leur extrême fragilité.

La surface extérieure de ses valves est couverte de côtes larges et plates, séparées par des sillons peu profonds; leur largeur augmente en même temps que leur longueur, jusqu'à ce qu'arrivées à une certaine distance du bord, chacune d'elles se subdivise par simple bifurcation en deux, trois ou quatre côtes plus minces, séparées entre elles par des sillons beaucoup moins larges et moins profonds que ceux qui se trouvent entre les côtes primitives. Chez les individus d'une parfaite conservation, ces côtes, sur lesquelles je n'ai jamais remarqué des traces de tubes, sont souvent traversées par des lamelles concentriques d'accroissement, extrêmement minces et très-fugaces; ces lamelles sont imbriquées et ordinairement beaucoup mieux prononcées sur la valve ventrale que sur la valve dorsale; leur présence est cause que la coquille s'exfolie avec la plus grande facilité. Mais si les tubes sont rares sur la surface, ils ne manquent presque jamais sur les oreillettes, et chacune d'elles en porte ordinairement trois ou quatre. Ces oreillettes sont minces, petites, étroites et ne sont pas très-nettement séparées du milieu de la coquille, auquel elles se rattachent par une pente peu sensible, mais les côtes y sont bien moins fortement exprimées. La distance entre les deux valves est très-faible; je l'ai trouvée de 4 millimètres pour un échantillon ayant plus de 40 millimètres de long.

A en juger par les traces que j'en ai remarqués sur quelques moules intérieurs, les apophyses hépatiques ont dû être extrêmement petites et les impressions musculaires très-superficielles; elles étaient comprises dans la courbure antérieure du crochet et se trouvaient par conséquent très-rapprochée de son extrémité qui dépasse de bien peu le bord cardinal.

Dimensions. Il est rare que cette coquille atteigne plus de 40 millimètres de longueur, et quoique j'en possède un échantillon de 60 millimètres, le plus grand nombre n'en mesure que 20 à 25. Sa largeur dépasse de bien peu sa longueur. Les rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur, sont=100 : 115 : 32 : 10. — *Côtes.* A 10 millimètres du crochet on compte 14 ou 15 côtes dans un espace de 10 millimètres; à une distance double, on n'en compte plus que 9 ou 10 dans ce même espace.

Rapports et différences. Déjà en 1843 j'avais rapporté à la même espèce les *Productus* que M. Phillips a désignés sous les noms de *P. margaritaceus* et *pectinoïdes*. Plusieurs échantillons provenant du calcaire carbonifère de l'Angleterre et de l'Irlande et déterminés tantôt sous l'un et tantôt sous l'autre de ces deux noms, par les meilleurs paléontologistes de ces pays, sont venus confirmer mon opinion.

Le *P. margaritaceus* adulte ne peut être confondu avec aucune autre espèce également adulte; mais dans son jeune âge elle a quelqu'analogie avec le jeune âge du *P. flexistria*, qu'il sera toujours facile d'en distinguer par la forme beaucoup plus transverse que celui-ci possède alors, par le nombre et la nature de ses côtes qui sont plus arrondies et qui s'élargissent beaucoup moins rapidement, ainsi que par la différence de l'espace qui sépare les deux valves l'une de l'autre. Des caractères analogues ne permettent pas de la confondre avec le *P. Scoticus* (*giganteus* jeune) auquel M. de Buch l'a rapportée, ainsi qu'avec le *P. striatus* dont quelques variétés s'en rapprochent par la forme.

Gis et loc. En Belgique le *P. margaritaceus* se trouve dans les couches de l'étage inférieur et moyen du système carbonifère, mais il y est toujours rare. C'est cependant dans l'étage inférieur qu'il semble avoir acquis son plus grand développement. Je l'ai rencontré dans le calcaire carbonifère de Visé et dans l'argile carbonifère de Tournay. Je le possède en outre de Ratingen, d'Altwasser en Silésie, de Kildare, de Millicent Clane, de Finner et de Salmon Man-of-War en Irlande. D'après M. Phillips il existe encore dans le calcaire de l'Yorkshire à Bolland et à Florence-Court, et d'après M. de Keyserling, dans celui de l'étage moyen des bords de l'Ylytsch.

Explication des figures. Pl. IV, Fig. 3, *a*. Echantillon de moyenne taille, provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 3, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

5. PRODUCTUS FLEXISTRIA.

PL. XVII, FIG. 1, *a*, *b*, *c*.

Producta flexistria. M'COY. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 109, pl. 20, fig. 16.

Coquille de taille moyenne, très gibbeuse, plus longue que large, à dos souvent un peu déprimé, à crochet tellement recourbé sur lui-même, que la partie viscérale se trouve presqu'entièrement soustraite à la vue, lorsque la coquille occupe sa position normale. Elle est un peu plus étroite à sa charnière que vers le milieu de sa longueur. Valve dorsale assez régulièrement voûtée, à côtés fortement repliés et presque verticaux. La surface est couverte de côtes assez épaisses, qui, à partir d'une petite distance du crochet, conservent à-peu-près la même largeur sur toute leur étendue; leur nombre n'augmente guère que sur les flancs, sur la surface desquels elles décrivent des demi-cercles, dont l'oreillette semble être le centre; cette augmentation a lieu par simple division. Chez les individus âgés, quelques côtes médianes subissent la même transformation. Ces côtes sont bien rarement interrompues par des tubes; c'est ordinairement sur les côtés et près des oreillettes qu'on en distingue une ou deux traces; elles sont suffisantes pour démontrer que ces tubes ont dû être assez épais. Les oreillettes sont très-étroites et un peu enroulées.

La valve ventrale est très-concave et sa forme intérieure se rapproche beaucoup de celle de la valve dorsale, seulement sa partie viscérale, qui occupe à peu près le tiers de sa longueur totale, est plus applatie que celle de la valve opposée et laisse ainsi un espace assez considérable pour loger l'animal (1); le prolongement antérieur de cette valve est aussi un peu plus déprimé que celui de la valve dorsale, ce qui fait que lors-même que les bords latéraux de la

(1) M. M'Coy, à en juger par la figure par laquelle il a représenté cette espèce ne semble en avoir connu que le moule de la valve ventrale. Il en résulte qu'il n'a pu en indiquer les véritables caractères, bien qu'il l'ait parfaitement distinguée de toutes ses congénères.

coquille sont parfaitement clos ,les bords médians restent entre-baillés (1).

Le test est mince et s'exfolie facilement. Après qu'il est tombé, il reste un moule sur lequel les traces des apophyses hépatiques sont assez fortement exprimées, tandis que celles des impressions musculaires, quoique très-visibles à l'œil nue, ne sont que bien superficielles. Ces traces situées sur une même ligne transverse sont assez rapprochées du crochet, pour ne pouvoir être aperçues, qu'autant que la coquille soit dressée verticalement sur son front antérieur. Le reste du moule est orné de légers sillons dont le fond est occupée par des séries de très-petites fossettes d'une forme allongée. Ce moule donne en outre la preuve que l'ouverture des tubes était garnie d'un bourrelet circulaire faisant saillie à l'intérieur.

Dimensions. La longueur de ce *Productus* varie de 40 à 50 millimètres. Le rapport de cette longueur à la largeur et à la hauteur absolue est = 100 : 80 : 75. L'épaisseur de la partie viscérale n'est exprimée que par 27,5 dans ce même rapport.—*Côtes.* Elles sont au nombre de 23 à 25 à une distance de 20 millimètres du crochet, dans un espace de 20 millimètres.

Rapports et différences. Le *Productus flexistria* adulte ne pourrait guère être confondu qu'avec le *P. aculeatus*, Martin, également adulte. Mais l'absence de côtes sur la partie viscérale de ce dernier et la présence d'un assez grand nombre de tubes, jointes à une moindre courbure de la valve dorsale, le feront immédiatement distinguer. Il offre encore quelqu'analogie avec certains échantillons du *P. Flemingii* et surtout avec la variété à laquelle M. de Keyserling a donné le nom de *P. tubarius*, dont il diffère par l'absence complète de sinus. Dans son jeune âge, il se rapproche de l'espèce précédente, mais alors il possède une forme beaucoup plus transverse et plus elliptique que celle-ci, une épaisseur comparativement beaucoup plus forte et des côtes plus arrondies et plus nombreuses.

Gis. et loc. Le *P. flexistria* semble caractériser les couches de l'étage inférieur du système carbonifère. Il n'est pas très-rare dans le calcaire de Visé et ne semble pas l'être non plus dans celui de Kildare en Irlande ; j'en possède un échantillon du calcaire carbo-

(1) C'est une preuve de plus en faveur de mon opinion sur la manière dont les *Productus* ont été fixés pendant la vie de l'animal.

nifère de Kosatchi Datchi, sur le versant Oriental de l'Oural, où il se trouve associé à plusieurs autres espèces identiques avec celles de Visé et entre autres avec le petit *Productus* que j'ai dédié à M. le comte de Keyserling.

Explication des figures. PL. XVII, fig. 1, *a*. Échantillon adulte, provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 1, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 1, *c*. Le même vu de profil pour montrer la direction des côtes latérales.

6. PRODUCTUS MAMMATUS.

PL. VII, FIG. 4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Productus mammatus. DE KEYSERL. 1846. *Beob. auf einer Reise in das Petschora-Land*. p. 206, pl. 4, fig. 5, 5 *a*, et 5 *b*.

Coquille d'une forme transverse subtrapezoïdale. Valve dorsale géniculée, divisée dans son milieu par un sinus étroit, mais assez profond; elle est déprimée dans la première moitié de sa longueur, qui correspond à peu près à son disque viscéral, puis se recourbe brusquement de manière à former un angle droit avec son prolongement antérieur; toute sa surface est couverte d'un grand nombre de côtes longitudinales, assez minces, peu élevées et s'effaçant en partie sur le prolongement; leur nombre augmente par implantation de côtes nouvelles. Des deux côtés du crochet s'étendent de larges oreillettes qui en sont séparés par une faible dépression et forment avec le bord latéral un angle d'environ 85°; chacune d'elles est garnie vers le bord cardinal de deux ou de trois tubes dont les traces sont bien constantes et bien visibles; semblables traces, au nombre de 6 à 10, se trouvent ordinairement dispersés d'une manière moins régulière sur le reste de la valve. Le crochet est très-petit, pointu et déprimé. Il est à peine visible lorsqu'on regarde la coquille du côte de sa valve ventrale (PL. V, FIG. 4, *b*). Cette valve est presque plane dans sa partie viscérale et se recourbe plus brusquement encore que la valve opposée, ainsi que le démontre

la section longitudinale que j'ai figurée Pl. V, Fig. 4, *e*; ses ornements sont les mêmes que ceux de cette dernière. L'espace qui sépare les deux valves est petit : il est diminué encore par le sinus médian de la valve dorsale.

Dimensions. Les échantillons que je dois à la bienveillance de M. de Keyserling, ont 14 millimètres de long. Les rapports de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur sont = 100 : 143 : 57 : 35.—*Côtes.* On en compte environ 25 dans un espace de 10 millimètres pris sur le bord antérieur.

Rapports et différences. Ainsi que le fait très-justement observer M. de Keyserling, le *P. mammatus* a tout à fait la forme du *P. plicatilis*, avec lequel il est impossible de le confondre, à cause des nombreux plis concentriques qui ornent le disque viscéral de ce dernier et qui sont remplacés chez le *P. mammatus* par quelques légères stries d'accroissement. C'est par la présence de plis semblables sur le disque viscéral que le *P. mammatus* se distingue d'une variété du jeune âge du *P. semireticulatus* qui se trouve dans le calcaire carbonifère de Visé et qui a toute la forme du *P. mammatus*. La dépression de son disque viscéral jointe à la forme géniculée de sa valve dorsale l'éloignent trop du *P. Flemingii* pour qu'il soit possible de l'y réunir.

Gis. et loc. Ce joli *Productus* dont la découverte est due à M. le comte de Keyserling, n'a encore été rencontré que dans le calcaire carbonifère des bords de la Petschora.

Explication des figures. Pl. VII, Fig. 4, *a*. Individu adulte vu du côté de la valve dorsale, pour montrer les tubes de la surface. De ma collection.

Fig. 4, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 4, *c*. Le même vu du côté du crochet (les côtés de cette figure sont un peu trop inclinés et arrondis).

Fig. 4, *d*. Le même vu de profil.

Fig. 4, *e*. Section longitudinale du même.

7. PRODUCTUS CORA.

PL. IV, FIG. 4, *a*, *b* et et PL. V, FIG. 2, *a*, *b*, *c*, *d*.

Das schwarze Schiff. WALCH. 1780. *Naturforscher*, Stück XIV, p. 33, pl. 1, fig. 2.

Productus Cora. A. D'ORB. 1842. *Paléont. du voyage dans l'Amér. mérid.* p. 55, pl. 5, fig. 8, 9 et 10 (mauvaises).

— *comoïdes.* DE KON. 1843. *Descript. des Anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 172, pl. 11, fig. 2, *a*, *b* et fig. 5, *a*, *b*, non Sow.

— *Scoticus.* ID. *Ibid.* pp. 207 et 628, non Sow.

Producta corrugata. M'COY. 1844. *Synops. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 107, pl. 26, fig. 13.

Productus tenuistriatus. DE VERN. 1845. *Russia and the Ural Mountains*, vol. II, p. 260, pl. 16, fig. 6.

— *Neffedievi.* ID. *Ibid.* p. 259, pl. 18, fig. 11.

Coquille pouvant acquérir une assez forte taille, allongée, à charnière plus étroite que son axe tranversal et à bords souvent irréguliers. Valve dorsale très-élevée, mais généralement un peu déprimée dans son milieu, à côtés verticaux ou fortement inclinés. Oreillettes très-petites, fortement plissées et quelquefois ornées d'une ou de deux rangées de petits tubercules qui ont servi de base à autant de tubes longs et minces. Crochet pointu; partie viscérale renflée, inclinée en avant sous un angle d'environ 45°. Valve ventrale très-concave, suivant de près, par son prolongement antérieur les mouvements de cette même partie de la valve opposée; sa partie viscérale est fortement applatie et presque plane; elle est ordinairement traversée par un assez grand nombre de plis concentriques, irréguliers, onduleux ou interrompus (PL. IV, FIG. 4, *b*). Ces plis qui ne sont bien prononcés que chez les adultes, n'existent que sur les oreillettes et les flancs de la valve dorsale, mais ils y sont beaucoup plus épais. La surface des deux valves est couverte de côtes longitudinales très-minces, filiformes, conservant une largeur à peu près égale sur toute leur étendue, à partir d'une petite distance de leur origine. La rapidité avec laquelle la coquille s'élargit nécessitant la création d'un nombre considérable de nouvelles côtes

qui s'interposent entre les anciennes, mais qui n'acquièrent pas immédiatement l'épaisseur de celles à côté desquelles elles continuent à cheminer, il en résulte que la surface parait ornée de côtes d'inégale grosseur, alternant les unes avec les autres. Cette différence n'est cependant pas sensible au même dégré sur tous les échantillons indistinctement ; on conçoit aisément qu'elle dépend en grande partie de l'accroissement plus ou moins rapide de la largeur de la coquille. Ces côtes ne sont séparées les unes des autres que par des stries très-fines ; elles se recourbent fortement sur les flancs et y prennent une directio n semicirculaire, direction qui est commune à presque toutes les espèces dont les côtés sont fortement ou brusquement repliés ; elles sont en outre très régulières dans toute leur étendue si l'on en excepte une bande assez mince qui longe les bords des individus adultes, où elles s e croisent et s'absorbent mutuellement de la même manière que celles des autres espèces à prolongement antérieur très-développé (1) ; enfin, elles se distinguent par le petit nombre de tubes, auxquels elles donnent naissance et dont les traces sont tellement rares sur la plupart des échantillons que l'existence en a été niée. La direction des bords latéraux est sinueuse et telle, que le profil, de la coquille représente la forme d'un S. Le test étant très-mince, une partie des ornements extérieurs fait une saillie assez forte à l'intérieur des valves, pour que le moule interne ressemble parfaitement à la coquille même ; seulement les côtes dont sa surface est couverte, sont un peu moins élevées et en même temps un peu plus tranchantes et les stries qui les séparent un peu plus larges que celles qui ornent extérieurement le test. Un seul moule interne de la valve ventrale, m'a montré la crête médiane qui sert à soutenir la dent cardinale ; sur un fragment d'un autre, j'ai trouvé des traces très-superficielles des apophyses hépatiques et des impressions musculaires (Pl. V, Fig. 2, *c*). Ces apophyses sont petites, mais très-ramifiées. Les impressions musculaires sont oblongues, ovales

(1) C'est sans doute, par erreur que M. de Verneuil a indiqué parmi les caractères principaux de cette espèce l'irrégularité de ses côtes (qu'il désigne sous le nom de *stries*), qui d'après lui, seraient remarquables par la manière dont elles se recouvrent et s'absorbent mutuellement. Je dois avouer que je n'ai rien vu de semblable sur le grand nombre d'échantillons que je possède et que le *P. Cora*, est même une des espèces dont les côtes m'ont toujours parues les plus régulières malgré leur extrême délicatesse.

et placées en dessous des apophyses et un peu plus latéralement qu'elles.

Dimensions. Cette espèce peut atteindre une longueur de 90 à 95 millimètres. Cependant la plupart des échantillons ne possèdent que la moitié ou les deux tiers de cette longueur. Le rapport de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur sont en moyenne = 100 : 67 : 40 : 26. — *Côtes.* A 20 millimètres du crochet, on en compte 50 à 55, dans un espace de de 20 millimètres.

Rapports et différences. C'est à tort qu'en 1843 j'ai confondu cette espèce avec le *P. Scoticus*, Sow., que je considère aujourd'hui comme synonyme du *P. giganteus*. La comparaison que j'ai pu en faire avec l'échantillon type qui a servi à M. A. d'Orbigny pour la création de son *P. Cora*, m'a convaincu de son identité avec cette espèce, identité qu'il eut été bien difficile d'établir d'une manière positive, d'après la figure que ce savant en a publiée. La seule différence consiste en ce que la surface de l'échantillon Bolivien est un peu plus épineuse que l'est celle de la plupart des échantillons Européens, mais cette différence est d'autant moins importante que je possède un échantillon provenant du calcaire de Ratingen, qui, bien que beaucoup plus petit, est hérissé d'un plus grand nombre de tubes. A en juger par quelques individus dont je suis redevable à la munificence de l'Etat-major du corps impérial des mines de Russie, le *P. Neffedievi* de Vern. ne serait autre que le moule siliceux du *P. Cora*, auquel je le réunis, avec le *P. corrugatus*, M'Coy. En vain m'objectera-t-on que la valve dorsale du *P. Neffedievi* est un peu plus déprimée que l'est ordinairement celle du *P. Cora* et que ses côtes sont plus minces et plus distantes; l'un de ces caractères qui se retrouve sur certaines variétés provenant du calcaire de Visé n'est pas assez constant pour pouvoir l'invoquer; l'autre me paraît être l'effet de la disparition du test. Par ses côtes minces, ce *Productus* rappelle le *Chonetes comoïdes* auquel je l'avais d'abord rapporté, mais il s'en distingue par l'absence de toute trace d'area, par le faible développement de son bord cardinal et par la forme de ses côtes. Il est singulier que cette espèce dont Walch a publié une bonne figure en 1780, ait été oubliée pendant plus d'un demi siècle avant de recevoir un nom qui fut en rapport avec les progrès de la science.

Gis et loc. Cette espèce appartient aux divers étages du système carbonifère. Je l'ai trouvée dans le calcaire carbonifère inférieur de Visé, de Chokier et de Ratingen; dans l'argile de l'étage moyen des

environs de Tournay et dans le schiste carbonifère supérieur d'Epinoy près de Binche (Hainaut). Je le possède en outre du calcaire gris et rougeâtre des bords du Missouri, de Kendal dans le Westmoreland, de Lowick, de l'Yorkshire, du Derbyshire, de l'Irlande, ainsi que du calcaire carbonifère des bords de la Wilji, affluent de la Taroussa et des silex des bords de la Louja, dans le district de Medynsk, gouvernement de Kalouga. M. de Verneuil le cite en outre de Cosatchi-Datchi, sur le versant Oriental de l'Oural, des environs de Sterlitamak, entre Perm et Serebriansk ; sur le versant occidental de la même chaîne, de Kachira sur l'Oka et d'Unja près de Kosimof. Le même savant l'a trouvé pendant son voyage dans l'Amérique du Nord, dans le terrain houiller à Flintridge, à Zanesville, à Guernsey Co (Ohio) et entre New-Harmony et M^t^. Vernon (Indiana), ainsi que dans le calcaire carbonifère à Windsor (Nouv. Ecosse) et à Leavensworth (Indiana). M. Leplay l'a rapporté de Vlaçof, sur la Kamenka (Donetz). M. A. d'Orbigny l'a recueilli sur le plateau Bolivien dans un calcaire bleu compacte avec rognons de silex au dessus de Patapatani, dans une des Iles du lac de Titicaca et dans un calcaire gris à Yarbichambi (Amérique méridionale). C'est un des *Productus* dont la distribution horizontale occupe la plus grande étendue.

Explication des figures. Pl. IV, Fig. 4, *a*. Echantillon provenant du calcaire de Visé, vu de profil, pour montrer la direction des bords et des plis latéraux. De ma collection.

Fig. *b*. 4, Autre échantillon de la même localité, privé de sa partie viscérale et montrant les plis concentriques de la valve ventrale. De ma collection.

Pl. V, Fig. 2, *a*. Grand individu provenant du calcaire carbonifère de Visé, vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

Fig. 2, *b*. Jeune individu provenant de la même localité, à oreillettes garnies de tubes. De ma collection.

Fig. 2, *c*. Fragment de moule intérieur de la valve dorsale provenant du calcaire de Visé et montrant les arborisations hépatiques et les impressions musculaires. De ma collection.

Fig. 2, *d*. Moule siliceux intérieur de la valve ventrale (*P. Neffedievi*, de Vern.) provenant du terrain carbonifère des bords de la Louja (Russie). De ma collection.

Fig. 2, *e*. Le même vu du côté du crochet, afin de montrer les traces des tubes dont son bord cardinal est garni.

8. PRODUCTUS ARCUARIUS.

Pl. IV, Fig. 2, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Productus arcuarius. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 171, pl. 12, fig. 10, *a*, *b*.

Petite coquille fortement bombée, légèrement transverse, d'une forme presque parfaitement hémisphérique. Valve supérieure divisée vers le milieu de sa longueur par un sillon transversal, profond et arqué dans sa partie moyenne. Ce sillon qui en se recourbant sur lui-même de chaque côté de la coquille, va rejoindre le crochet, est bordé du côté antérieur d'un bourrelet assez épais. Chez les individus bien conservés, les bords libres de la valve dorsale sont repliés à angle droit et garnis sur toute leur étendue d'une bordure horizontale sur laquelle se prolongent les côtes longitudinales qui ornent la surface extérieure de cette valve (Pl. IV, Fig. 2 *a* et *b*). Ces côtes sont extraordinairement minces et filiformes, ressemblent par leur disposition et la manière dont leur nombre s'accroit, à celles de l'espèce précédente, en sorte que l'implantation de nouvelles côtes les fait aussi paraître alternativement un peu plus grosses les unes que les autres. Le bord cardinal étant très-court et sa longueur ne dépassant pas la moitié de celle de l'axe transversal de la coquille, il en résulte que les oreillettes sont très-peu développées ; il est rare même qu'elles subsistent. Le crochet est pointu et un peu déprimé. La surface de la valve ventrale est ornée de côtes identiques à celles de la valve dorsale ; son prolongement antérieur est presqu'en contact avec celui de cette même valve et possède parconséquent identiquement la même forme, mais sa partie viscérale dont les limites sont placées un peu au-dessus du sillon transversal (Pl. IV, Fig. 2, *c*.), est presque plane et de même que celle de la valve opposée, dépourvue de toute trace de pli transversal.

La surface interne m'est inconnue, mais ses ornements doivent être bien faiblement exprimés, à cause de l'extrême minceur du test.

Dimensions. La longueur de ce *Productus* dépasse rarement 10 à 12 millimètres. Je ne possède qu'un seul échantillon qui en ait 18. Rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épais-

seur = 100 : 115 : 70 : 20. *Côtes.* — On en compte près du sillon transversal, environ 30 dans un espace de 5 millimètres.

Rapports et différences. Par la forme de ses côtes cette espèce se rapproche du *P. Cora*, mais elle s'en distingue par sa taille, par son sillon transversal et par l'absence de plis latéraux.

Gis. et loc. Ce petit *Productus* n'a encore été trouvé que dans le calcaire carbonifère de Visé. Il y est très-rare.

Explication des figures. Pl. IV, Fig. 2, *a*. Echantillon du calcaire de Visé, vu du côté de la valve ventrale, montrant le sillon transversal et une partie de la bordure marginale. De ma collection.

Fig. 2, *b*. Le même vu de profil.

Fig. 2, *c*. Autre échantillon de la même localité, séparé de sa partie viscérale, vu de profil, afin de montrer l'épaisseur de cette partie. De ma collection.

Fig. 2, *d*. Partie viscérale du même, vue du côté dorsal.

Fig. 2, *e*. La même vue du côté ventral.

B. *PRODUCTI UNDATI.*

9. PRODUCTUS HEMISPHÆRIUM (1).

Pl. VI, Fig. 1, *a*, *b*, *c*.

Productus Hemisphœrium. Kutorga, 1844. *Verhandl. d. K. rüss. miner. Gesells. zu St-Petersb.* p. 96, pl. 10, fig. 2, *a*, *b*, *c*.

— — de Keyserl. 1846. *Beob. auf einer Reise in das Petschora-Land*, p. 210.

Coquille gibbeuse, semiglobuleuse, aussi longue que large, à prolongement court et à surface ornée de plis minces et onduleux.

---

(1) Comme il m'a été impossible de me procurer cette espèce, ainsi que les *P. porrectus* et *genuinus*, je me suis vu forcé de les décrire et de les figurer d'après les descriptions et les figures qu'en a données M. Kutorga.

Valve dorsale mince, régulièrement voutée, couverte d'un grand nombre de côtes longitudinales extrêmement étroites dont le nombre augmente par interposition de côtes nouvelles; ces côtes sont interrompues par des plis concentriques dont l'épaisseur s'accroît avec l'âge. Les bords antérieurs et latéraux sont faiblement, mais régulièrement prolongés. Le bord cardinal n'offre pas la moindre trace d'area; son étendue égale celle de l'axe transversal de la valve dorsale. Les oreillettes sont petites, mais très-bien limitées. Le crochet est bombé et très-court.

D'après M. de Keyserling, les deux valves ne sont séparées l'une de l'autre que par une distance de 4 millimètres.

M. Kutorga assure n'avoir pu découvrir aucune trace de tube sur la surface extérieure de cette espèce. M. de Keyserling dit que son bord cardinal est muni de chaque côté du crochet, de 7 tubes très-grêles, dirigés en arrière et faiblement recourbés en dedans. D'après ce même savant, il est rare que quelques tubes se montrent sur le prolongement antérieur; lorsqu'elles existent, leur distribution n'a rien de régulier.

Dimensions. Longueur environ 23 millimètres. Rapports de celle-ci à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur=100 : 87 : 58,5 : 17,5. — *Côtes.* A à une distance de 10 millimètres du crochet, on compte 36 côtes dans un espace de 10 millimètres et sur le bord antérieur seulement 27 dans ce même espace (de Keyserling).

Gis. et loc. Cette espèce, qui paraît être caractéristique pour l'étage supérieur du système permien, se trouve dans un grès dur, d'une couleur gris-foncée, à grain très-fin, des bords du ruisseau Isäk, affluent de la Dioma, à 10 verstes de l'usine Durassow, gouvernement d'Orenbourg (Kutorga). M. Schrenk l'a découverte dans le calcaire argileux permien des bords de la Pinega, près du village Ust-Joschuga (de Keyserling).

Explications des figures. PL. VI, FIG. 1, *a*. Individu vu du côté de la valve dorsale (d'après M. Kutorga).

FIG. 1, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale (d'après le même).

FIG. 1, *c*. Le même vu de profil (d'après le même).

10. PRODUCTUS UNDIFERUS.

Pl. V, Fig. 4, *a*, *b*, *c* et Pl. XI, fig. 5, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Productus spinulosus. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 183 (partim), pl. 10, fig. 4, *a*, *b*, *c*, non Sow.

Coquille dont la taille se rapproche de celle du *P. arcuarius*. Lorsqu'elle est très-adulte, elle est gibbeuse, un peu plus longue que large et d'une forme ovalaire ; cependant la plupart des échantillons sont presque circulaires et assez régulièrement voûtés pour paraître demi-sphériques. Crochet pointu, renflé à une petite distance de son extrémité, à courbure régulière et couvert de petits plis transversaux et concentriques, qui s'étendent assez souvent sur toute la surface. Valve inférieure régulièrement concave dans toute son étendue. Oreillettes très-peu développées, très-minces et rarement entières. Surface des deux valves ornée de côtes assez épaisses comparativement à la taille de la coquille et se multipliant par interposition de côtes nouvelles ; elles sont garnies d'un certain nombre de tubes minces et effilés, irrégulièrement distribués sur la surface de chacune des deux valves ; les côtes qui couvrent les oreilettes et les flancs sont ordinairement les plus épineuses ; elles ne sont pas également épaisses dans toute leur étendue et un peu plus renflées vers la partie où le tube s'insère. Il est souvent difficile de constater l'existence des tubes sur la surface de la valve ventrale, parce qu'ils n'y laissent pas la moindre trace ; on ne peut bien se convaincre de leur présence que par les moules extérieurs de cette valve.

Je n'ai pas encore pu réussir à me procurer un moule intérieur de cette coquille.

Dimensions. Je ne possède qu'un seul échantillon de cette espèce qui ait une longueur de 14 millimètres ; tous les autres en ont environ dix. Les divers rapports de longueur, de largeur, de hauteur et d'épaisseur sont pour l'échantillon oblong (Pl. XI, Fig. 5, *a*, *b*, *c*.) de 100 : 71,5 : 50 : 25, et pour les autres de 100 :

95 : 50 : 25. — *Côtes.* Sur le bord antérieur on en compte 10 à 12 dans un espace de cinq millimètres.

Rapports et différences. Je ne connais aucune espèce avec laquelle on puisse confondre ce *Productus*. Il a de légers rapports avec le jeune âge du *P. Flemingii*, qui s'en distingue facilement par sa forme transverse et par le nombre de ses côtes. Le *P. undatus* est bien certainement l'espèce dont il se rapproche le plus; il s'en éloigne par sa petite taille, ainsi que par le nombre et la forme de ses plis et de ses côtes. C'est à tort qu'en 1843 j'en ai rapporté au *P. spinulosus*, la variété dont les plis sont un peu moins visibles (PL. XI, FIG. 5, *d*, *e*.); elle en diffère par l'épaisseur de ses côtes et par le petit nombre et la distribution irrégulière de ses tubes.

Gis. et loc. Je n'ai encore rencontré ce petit *Productus* que dans le calcaire carbonifère de Visé et dans l'argile de même formation de Tournay. Il est donc commun aux étages inférieur et moyen du système carbonifère.

Explication des figures PL. V, FIG. 4, *a*. Individu adulte de grandeur naturelle, provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 4, *b*. Le même, vu de profil.

FIG. 4, *c*. Le même vu du côté de la valve dorsale, grossi du double pour montrer la forme des côtes et des plis.

PL. XI, FIG. 5, *a*. Individu adulte d'une variété moins plissée, provenant de l'argile carbonifère de Tournay, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. *b*. Le même vu du côté opposé.

FIG. *c*. Section longitudinale du même.

FIG. *d*. Autre échantillon de la même variété et de la même localité que le précédent, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. *e*. Le même vu du côté opposé.

11. PRODUCTUS UNDATUS.

PL. V, FIG. 3, *a*, *b*, *c*

Productus undatus. DEFR. 1826. *Dict. des sc. nat.*, vol. XLIII, p. 354.

Productus undatus. DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 156, pl. 12, fig. 2, *a*, *b*, *c*.

— — DE VERNEUIL. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 261, pl. 15, fig. 15.

Coquille de taille moyenne, régulièrement voutée, suborbiculaire, très reconnaissable par les plis transverses et épais dont sa surface entière est couverte. Ces plis sont anguleux et disposés en terrasses les uns audessous des autres ; mais comme le côté antérieur de ces plis est un peu plus large que le côté opposé, il en résulte que leur saillie étant tournée vers le crochet, chaque pli nouveau domine celui qui le précède et semble lui donner naissance. La direction de ces plis, dont la hauteur s'accroît avec l'âge, n'a rien de bien régulier ; ils sont en général sinueux et quelquefois interrompus ; il est rare qu'un pli traverse isolément toute la surface : ordinairement il est rejoint par un, deux ou trois autres plis qu'il absorbe partiellement avant d'atteindre les bords latéraux de la coquille. La surface est en outre garnie de côtes minces, filiformes, en tout semblables à celles du *P. Cora*. De même que celles-ci, elles se multiplient par implantation de nouvelles côtes, qui étant plus minces à leur origine, font ressortir les anciennes. Jusqu'en 1843 je n'avais pas réussi à rencontrer un échantillon sur lequel il existât des traces de tubes ; depuis lors, j'ai été plus heureux et je possède actuellement quelques individus sur le prolongement desquels se montrent 10 à 12 tubercules allongés, qui, généralement formés de la réunion de deux côtes, semblent avoir servi de base à autant de tubes. La valve ventrale n'est pas profondément, mais régulièrement concave ; ses plis sont beaucoup plus étroits et beaucoup moins élevés que ceux de la valve dorsale, auxquels ils ne ressemblent que par leur forme et leur direction peu régulière. Chez les individus bien conservés, l'axe transversal indique la plus grande largeur de la coquille. Les oreillettes sont petites, mais fortement plissées. Le crochet, bien que fortement recourbé, dépasse à peine le bord cardinal. Le prolongement antérieur est très-court et ne se distingue en rien du reste de la coquille.

Dimensions. Longueur, 15 à 33 millimètres. Rapports de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur=100 : 88 : 51,5 : 35. — *Côtes.* A dix millimètres du crochet on en compte 28 à 30 dans un espace de dix millimètres.

Rapports et différences. Cette espèce se distingue du *P. undiferus* par sa taille et par la forme et l'épaisseur de ses plis transverses, et du *P. porrectus* par l'absence de sinus sur sa valve dorsale, par la concavité de sa valve ventrale et la finesse de ses côtes. L'existence de plis transverses sur toute sa surface suffit pour la séparer de toutes ses autres congénères.

Gis. et loc. Ce joli *Productus* n'est pas très-rare dans le calcaire carbonifère de Visé. Sir Roderick Murchison et MM. de Verneuil et de Keyserling l'ont découvert dans le calcaire carbonifère jaune d'Unja près de Kosimof. J'en possède un échantillon dans un calcaire gris jaunâtre de Nikoulin, affluent de la Nachabna et un autre dans un calcaire argileux d'un gris cendré de Karova (gouv. de Kalouga). Je l'ai reconnu en outre sur un échantillon de grès carbonifère envoyé au Muséum de Paris par M. Leichart et recueilli par lui à l'Ile de Van Diémen près de la route conduisant de Palerson à Allan-River. Il paraît appartenir exclusivement à l'étage inférieur du système carbonifère.

Explication des figures. PL. V, FIG. 3, *a*. Individu adulte restauré, provenant du calcaire carbonifère de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 3, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 3, *c*. Le même vu de profil.

12. PRODUCTUS PORRECTUS.

PL. VI, FIG. 2, *a*, *b*.

Productus porrectus. KUTORGA. 1844. *Verh. der K. russ. miner. Gesels. zu St-Petersb.* p. 96, pl. 10, fig. 3, *a*, *b*.

Coquille déprimée, d'une forme ovale massive et allongée, à surface reticulée, à bord cardinal court. Valve dorsale déprimée, rétrécie vers le bord cardinal, à côtés assez fortement repliés et à pente assez rapide. Les oreillettes manquent complètement (?) Crochet renflé, proéminent, donnant naissance au sinus peu profond, mais très-large qui occupe le milieu de la valve.

La valve ventrale, dont les deux axes sont à peu près de même longueur, bien que son bord cardinal n'ait que les deux tiers de la longueur de ces axes, est presque plane dans toute son étendue, sauf une légère dépression qui s'observe vers le bord cardinal et une faible élévation qui se remarque dans sa partie moyenne et qui correspond au sinus de la valve opposée.

Le grand nombre de larges côtes dont la surface de cette coquille est garnie, sont traversées par un nombre non moins considérable de plis concentriques. Ces plis sont plus prononcées, mais plus irréguliers sur la valve dorsale que sur la valve opposée, à cause de son accroissement plus rapide.

Dimensions. Longueur 75 millimètres, largeur 64 millimètres, d'après les figures.

Rapports et différences. Si les figures de cette espèce que M. Kutorga a publiées sont exactes, ce qui me paraît probable, il est impossible qu'on la confonde avec aucune de ses congénères. Elle se distingue de la précédente par sa forme allongée et déprimée, ainsi que par la présence du sinus sur sa valve dorsale. Sa forme allongée l'éloigne du *P. semireticulatus*, dont la surface est aussi réticulée dans toute son étendue avant qu'il se recourbe pour former son prolongement antérieur.

Gis. et loc. M. Kutorga a découvert ce *Productus* dans le calcaire carbonifère de Sterlitamak.

Explication des figures. Pl. VI, Fig. 2, *a*. Echantillon vu du côté de la valve dorsale. D'après M. Kutorga.

Fig. 2, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale. D'après le même.

C. *PRODUCTI PROBOSCIDEI.*

13. PRODUCTUS PROBOSCIDEUS.

PL. VI, FIG. 4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *n*, *o*.

Productus proboscideus. DE VERN. 1840. *Bullet. de la Soc. géol. de France*, vol. XI, p. 259, pl. 3, fig. 3, *a*, *b*, *c*, *d*.

Clavagella prisca. GOLDF. 1841. *Petref. Germ.* vol. II, p. 285, 160, fig. 17.

Productus proboscideus. V. BUCH. 1841. *Abhandl. der K. Akad. der Wissens. zu Berlin.* Erster Theil, p. 40[a].

— — DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 203, pl. 11, fig. 4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, et pl.

Ce *Productus* est l'une des espèces les plus remarquables et les plus intéressantes du genre. Il se distingue au premier coup d'œil par le singulier prolongement dont il est garni et qui semble lui avoir servi de pédoncule. Sa valve dorsale est composée de deux parties bien distinctes : la première nettement circonscrite par un léger sillon, ou à son défaut par une bande blanchâtre (1), correspond exactement au disque viscéral des autres espèces ; elle est régulièrement voûtée, ordinairement un peu transverse, quelquefois circulaire et couverte dans toute son étendue de plis concentriques d'accroissement assez réguliers et assez bien marqués. La seconde partie qui occupe la place du prolongement ordinaire des *Productus*, s'étend et se replie sur les côtés, en écartant progressivement la valve ventrale. Dès que les côtés se sont rencontrées vers le milieu du bord antérieur de cette valve, et qu'il en est résulté un cylindre complet, l'extrémité antérieure se retrécit assez brusque-

(1) C'est la chute de cette bande formée d'un renflement ou bourrelet intérieur qui produit le sillon.

ment, puis se prolonge sous forme d'un tube, dont le diamètre sensiblement égal dans toute son étendue, acquiert chez certains individus, une longueur égale à trois ou quatre fois celle de la partie viscérale. Ce tube qui est ordinairement unique et qui se trouve placé dans la direction de l'axe longitudinal de la coquille, se bifurque quelquefois et se transforme en deux tubes parfaitement indépendants l'un de l'autre, ayant leur origine de chaque côté de la valve dorsale (Pl. VI, Fig. 4, *g*, *h*, *i*). Jamais je n'ai pu réussir à me procurer ce tube en entier, malgré le nombre considérable d'échantillons que j'en ai recueillis. Aussi suis-je convaincu que son extrémité était ouverte et que cette ouverture servait de passage aux fibres musculaires ou tendineux par lesquels l'animal s'attachait aux corps sous-marins. Ce qui me confirme dans cette idée, c'est que la direction du tube est rarement régulière et n'est presque jamais la même pour tous les individus indistinctement, comme cela devrait être, si l'animal avait été abandonné à lui-même et avait pu toujours se développer librement. En effet, certains échantillons, que je considère comme normaux, sont droits ou à peu près (Pl. VI, Fig. 4, *a*, et Fig. 4, *e*.), et ont probablement été fixés sur une surface horizontale; d'autres sont recourbés, tantôt en avant (Pl. VI, Fig. 4, *b*.), tantôt en arrière (Pl. 4, *c*, *d* et *f*.) et semblent avoir vécu sur une surface verticale ou fortement inclinée. Les plis de la partie viscérale se continuent sur le prolongement, mais en perdant un peu de leur régularité et de leur épaisseur, en même temps que leur direction subit aussi quelques modifications. Ceux qui suivent immédiatement le bord antérieur de la partie viscérale, prennent une direction à peu près horizontale sur le dos, mais se redressent à angle droit sur les flancs et vont se perdre sur les bords latéraux de la valve ventrale. Après la jonction des deux côtés, ces plis se transforment en des anneaux un peu onduleux et irréguliers qui se continuent jusqu'à l'extrémite du tube. Tous ces plis sont coupés à angle droit par des côtes très-minces, filiformes, conservant à peu près la même largeur sur toute leur étendue, et ne se multipliant par interposition que sur les flancs rabattus en forme d'aile. Ces côtes sont continues sur toute la surface et passent de la partie viscérale sur le prolongement, sans éprouver la moindre interruption.

La valve ventrale est très-petite, le plus souvent un peu allongée et de forme ovale. Elle est faiblement, mais régulièrement concave. Ses bords sont tellement tranchants et rapprochés des bords de la

valve opposée, qu'ils y paraissent soudés ; sa partie viscérale, est ordinairement limitée par un léger sillon ou par une faible bande blanchâtre, qui se dessine à une petite distance de son bord antérieur, en sorte que son prolongement est très-court et en forme de croissant. Le crochet est très-petit et assez pointu. Les oreillettes sont plissées, très-étroites et très-minces ; elles manquent très-souvent. Le bord cardinal est plus court que le diamètre transversal de la valve ventrale. On remarque rarement des traces de tubes à la surface de ce *Productus*, si ce n'est à l'extrémité des plis des oreillettes et un peu en dessous de celles-ci, sur les bords latéraux de la valve dorsale, où il s'en trouve assez souvent un petit groupe de 4 à 6 de chaque côté (PL. VI, FIG. 4, *a* et *d.*), quelquefois de 10 à 12. Ces tubes sont assez épais et assez longs comparativement à la taille de l'espèce. Ils sont légèrement courbés et dirigés en sens inverse du prolongement. Le test est extrêmement mince et presque partout d'une épaisseur uniforme.

Dimensions. La longueur totale du plus grand individu que je possède est de 55 millimètres. Celle de sa partie ventrale n'est que de 11 millimètres ; sa largeur absolue est de 13,5 millimètres et son épaisseur de 9 millimètres. Ces diverses dimensions sont dans le rapport de 100 : 20 : 24,5 : 16,3. — *Côtes.* On compte environ 25 côtes dans un espace de 5 millimètres pris sur le bord antérieur de la partie viscérale.

Rapports et différences. Les jeunes individus du *P. proboscideus* ont beaucoup de rapports avec les jeunes individus du *P. arcuarius*, dont il sera toujours facile de les distinguer par la concavité de sa valve ventrale. A un âge plus avancé, il en diffère par son prolongement cylindrique et par l'écartement considérable de ses deux valves. Le *P. proboscideus* se rapproche beaucoup plus du *P. Nystianus*, dont la valve dorsale se prolonge à peu près de la même manière, mais diffère de celle du premier par l'absence de plis et de côtes réguliers à sa surface et par la singulière faculté dont semblent avoir joui ses bords libres de s'allonger irrégulièrement dans un sens perpendiculaire à celui dans lequel se dirige le prolongement antérieur. Il est impossible de le confondre avec le *P. genuinus*, dont la taille est beaucoup plus grande et dont les côtes ne se continuent pas régulièrement sur le prolongement, qui en outre, bien qu'enroulé dans le sens de sa longueur, n'est pas entièrement fermé.

Gis. et loc. Jusqu'ici le *P. proboscideus* n'est connu que dans le calcaire carbonifère de Visé. Il y est assez rare. Je n'en connais encore que trois échantillons à double tube.

Explication des figures. Pl. VI, Fig. 4, *a*. Grand individu muni de ses tubes cadinaux, vu de profil.

Fig. 4, *b*. Autre individu plus petit dont l'extrémité viscérale est recourbée en avant, vu de profil.

Fig. 4, *c*. Individu récourbé en arrière, vu de profil.

Fig. 4, *d*. Autre individu, également recourbé en arrière, muni de ses tubes, vu de profil.

Fig. 4, *e*. Individu droit, privé de ses oreillettes, vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 4, *f*. Individu recourbé en arrière, garni de ses oreillettes, vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 4, *g*. Echantillon à double tube, vu du côté de la valve dorsale.

Fig. 4, *h*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 4, *i*. Autre échantillon à double tube, plus petit, vu du côté de la valve dorsale.

Fig. 4, *n*, Echantillon du *P. ermineus* que j'ai considéré comme une variété du *P. proboscideus*, mais qui devra probablement être conservé comme espèce distincte; vu du côté de la valve dorsale.

Fig. 4, *o*. Le même vu de profil pour montrer que les bords latéraux ne se rejoignent pas, malgré l'accroissement rapide des diverses parties de la coquille.

Tous ces échantillons se trouvent dans ma collection.

14. PRODUCTUS NYSTIANUS.

Pl. VI, Fig. 4, *k*, *l*, *m* et Pl. XIV, Fig. 5, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Productus Nystianus. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 202, pl. 7bis, fig. 3, *a*, *b*; pl. 9, fig. 7, *a*, *b*, *c* et pl. 10, fig. 9, *a*, *b*, *c*, *d*.

Cette coquille n'est pas moins singulière que la précédente. Un prolongement cylindrique semblable à celui qui garnit la valve dorsale de ce *Productus*, termine aussi la même valve de celui-ci, mais la faculté que possèdent en même temps ses bords libres, y compris le bord cardinal, de s'allonger en un tube comprimé

d'avant en arrière et à parois très-irrégulières, rend cette espèce plus remarquable encore. Afin de rendre sa description plus facile et plus intelligible je donnerai d'abord les caractères qui la distinguent dans un âge peu avancé et avant que l'animal ait commencé la construction de ses deux prolongements.

A cet âge, la coquille est petite, déprimée, cunéiforme (PL. XIV, FIG. 5, *c*.). Sa valve ventrale possède une forme transverse subtetragone ; elle est composée d'une partie déprimée, à peine voutée, limitée par un sillon aboutissant de chaque côté à l'angle latéral des oreillettes ; cette partie, qui correspond au disque viscéral, est couverte d'un grand nombre de petits plis concentriques onduleux, très-irréguliers et interrompus de distance en distance par des tubercules assez proéminents, d'épaisseur variable mais généralement oblitérés et à base transversale. En deça du sillon, la valve se replie brusquement sur elle-même et forme un prolongement dont la direction est presque perpendiculaire à la direction primitive ; la surface de cette dernière partie est ornée d'un certain nombre de côtes longitudinales très-épaisses, eu égard à la taille de l'espèce, mais dont le diamètre n'a rien de régulier et dont celles qui garnissent les flancs sont un peu courbées en avant. La partie médiane de ce prolongement est interrompue par une ouverture à peu près semicirculaire, qui sert d'origine au tube antérieur. Le crochet est très-petit, non proéminent. Les oreillettes sont larges, mais à peine distinctes du corps de la coquille ; leur bord cardinal est garni de 8 à 10 petits tubes recourbés en dedans et d'autant plus longs qu'ils sont plus éloignés du crochet (PL. XIV, FIG. 5, *a* et 5 *e*). La valve ventrale est presque plane ; elle ne participe presqu'en rien au prolongement de la valve dorsale, ce qui explique le brusque changement de direction que l'animal est obligé de donner aux bords de cette dernière, après avoir achevé son disque viscéral, ainsi que la distance assez considérable qui sépare les deux valves au bord antérieur. Les mêmes ornements qui se trouvent en relief à la surface de la valve dorsale, sont reproduits en creux sur celle de la valve ventrale. Le test est si mince, que le moule intérieur de la valve dorsale offre à peine de différence avec la surface extérieure de cette valve. Malgré cela, on distingue cependant fort bien sur le moule de la valve opposée le sillon longitudinal correspondant à l'arête médiane qui sert de soutien à la dent cardinale, et en outre, l'impression des callosités réniformes qui se trouvent ordinairement placées de chaque côté de cette arête (PL. XIV, FIG. 5, *d*).

Lorsque cette coquille atteint un âge plus avancé, elle subit une transformation si complète, que j'ai eu de la peine à la reconnaître et que pendant longtemps je l'ai confondue avec la précédente, dont je la croyais une simple variété tombée dans la décrépitude. Une partie du prolongement de la valve dorsale se modifie et se dilate sur les côtés avant de s'allonger et de se transformer en un tube cylindrique. En même temps que cette modification a lieu, tout le bord inférieur de la coquille, y compris le bord cardinal, s'allonge dans une direction perpendiculaire à celle du tube antérieur, mais d'une manière très-irrégulière ; il se produit ainsi un second tube à parois très-difformes et fortement ondulées et plissées. Ces plis et ces ondulations sont surtout remarquables sur la partie du tube produite par le prolongement du bord cardinal (Pl. VI, Fig. 4, *k*, et 4, *l*). Il ne serait pas impossible que ce fut par ce prolongement informe que la coquille eut été fixée et que ce fut par le tube supérieur que l'animal eut reçu sa nourriture. J'ai été conduit à faire cette supposition, par la découverte d'un échantillon dont le prolongement inférieur embrasse un fragment de *Caryophyllia* sur lequel il s'est évidemment moulé pendant sa vie (Pl. VI, Fig. 4, *m*).

Ces changements, quelque considérables qu'ils soient déjà, ne sont pas encore les seuls que subit la valve dorsale : les côtes longitudinales de son prolongement primitif, si fortement accusées dans le jeune âge, disparaissent presque complètement ; l'animal en rendant le test de sa coquille plus épais, parvient souvent aussi à faire disparaître la trace des plis concentriques à l'intérieur du disque viscéral (Pl. VI, Fig. 4, *l.*), en sorte que le moule intérieur de cette partie paraît entièrement lisse ; en revanche quelques stries longitudinales se montrent sur les côtés du prolongement et du tube inférieur, mais elles sont très-superficielles et très-fugaces. Le tube antérieur paraît avoir été ondulé sur toute son étendue, par des anneaux irréguliers semblables à ceux qui ornent le tube de l'espèce précédente.

Dimensions. Avant que l'animal commence la construction de son tube, la coquille possède généralement une longueur de 6 à 7 millimètres. La longeur est alors à sa largeur, à sa hauteur et à son épaisseur, comme 100 : 140 : 57 : 57. Je ne possède pas d'échantillon adulte assez parfait pour qu'il puisse être utile d'en indiquer les dimensions.

Rapports et différences. Cette espèce lorsqu'elle est adulte, est suffisamment caractérisée par son double prolongement en forme de

tube, pour qu'il soit impossible de le confondre avec aucune autre de ses congénères. Dans son jeune âge, elle a quelqu'analogie avec le *P. marginalis*, dont elle diffère par sa petite taille, par sa forme plus transverse et plus déprimée, par les rides concentriques de son disque viscéral, ainsi que par l'ouverture qui existe dans la partie médiane de son prolongement.

Gis et loc. Le *P. Nystianus* n'est encore connu que dans le calcaire carbonifère de Visé. On le trouve très-rarement garni de ses deux tubes.

Explication des figures. PL. VI, FIG. 4, *k.* Echantillon vu de profil, pour montrer la direction opposée des deux tubes. De ma collection.

FIG. 4, *l.* Le même vu du côté de la valve dorsale.

FIG. 4, *m.* Autre échantillon, vu du côté du prolongement inférieur, pour montrer ses ondulations irrégulières et la manière dont il a en partie enveloppé un fragment de *Caryophyllia*. De ma collection.

PL. XIV, 5, *a.* Jeune individu muni de ses tubes cardinaux, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 5, *b.* Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 5, *c.* Le même vu de profil, pour montrer la direction des côtes du prolongement.

FIG. 5, *d.* Moule intérieur vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 5, *e.* Même individu que celui représenté FIG. 5, *a*, mais porté à un grossissement de 2 ½ fois sa grandeur naturelle.

15. PRODUCTUS GENUINUS.

PL. VI, FIG. 3, *a*, *b*, *c*, *d*.

Productus genuinus. KUTORGA. 1844. *Verhandl. der K. russis. miner. Gesell. zu St.-Pétersb.* p. 93, pl. 10, fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*.

Cette magnifique coquille est d'une conservation si parfaite dans toutes ses parties, que, selon M. Kutorga, elle peut servir de type à la description de toutes les autres espèces de *Productus*; sa valve

dorsale est formée de trois parties bien distinctes, savoir : 1° la partie dorsale, 2° les parties latérales et 3° le prolongement cylindrique.

La partie dorsale est très-voûtée et garnie d'un sinus médian bien prononcé, dont la largeur s'accroît avec l'âge ; sa surface est couverte de sillons profonds et nettement dessinés. Son crochet très-petit et déprimé dépasse à peine le bord cardinal ; par suite du renflement considérable de la voûte dorsale, il se trouve dans une direction presque perpendiculaire à celle-ci. Les côtes rayonnantes qui ornent cette partie, sont assez épaisses et au nombre de 30 environ. A partir du crochet jusqu'à la partie culminante du dos, ces côtes sont traversées par des plis réguliers et concentriques d'accroissement qui produisent une espèce de treillissage avec elles et les rendent tuberculeuses. Sur la partie antérieure elles sont lisses et divisées par simple bifurcation. Le bord frontal est divisé en trois parties égales, dont celle du milieu seule se prolonge et s'enroule de manière à former un tube cylindrique.

Les oreillettes sont larges, et s'étendent dans une direction horizontale ; leur surface est couverte de côtes semblables à celles qui ornent la surface de la partie médiane.

La longueur du prolongement dépasse de beaucoup celle du restant de la valve dorsale ; ses bords latéraux ne se rejoignant pas, mais s'arrêtant à une petite distance l'un de l'autre, il en résulte qu'il ne forme pas un tube complet. Sa surface est couverte d'un grand nombre de stries longitudinales peu prononcées, traversées par des bourrelets très-prononcés, qui semblent dénoter un accroissement très-rapide de cette partie. Sa partie inférieure est ouverte et ses côtés ne sont pas entièrement symétriques.

La valve ventrale est plane ; son bord cardinal est plus court que celui de la valve opposée ; cette différence provient de ce que le bord postérieur des oreillettes de cette dernière, concourt au développement de son bord cardinal. Le bord frontal de la valve ventrale est semicirculaire, sauf une légère sinuosité servant à recevoir le sinus de la valve dorsale ; il est garni d'un rebord assez large, constituant son prolongement. Ce rebord, ainsi que sa surface sont reticulés. La valve ventrale ferme si hermétiquement la valve dorsale, qu'elle a dû empêcher toute communication de l'animal avec la partie antérieure de celle-ci, ainsi que le démontrent surtout d'une manière parfaite, les moules internes (Pl. VI, Fig. 3, *d.*) que l'on trouve assez fréquemment, à cause de la minceur du

test (1). Aucune trace de tube ne se fait remarquer ni sur les oreillettes, ni sur le restant de la surface.

Dimensions. Longueur totale 56 millimètres; non compris le prolongement 22 millimètres; largeur 46 millimètres (2).

Rapports et différences. Des échantillons imparfaits, ceux surtout qui sont privés de leur prolongement et de leurs parties latérales, pourraient être confondus avec le *P. semireticulatus*, à cause du treillissage de leur partie viscérale. Cependant ils s'en distinguent par la forme régulière, l'épaisseur et la différence dans le nombre de leur côte ; en outre, la surface treillissée offre cette particularité constante, que les plis transverses sont assez superficiels pour ne pas interrompre la direction des côtes, tandis que chez le *P. semireticulatus* ces plis sont si épais et séparés par des sillons si profonds qu'ils coupent entièrement les côtes longitudinales et les transforment en des séries de tubercules plus ou moins saillants (3).

Le prolongement en forme de tube rapproche cette espèce du *P. proboscideus*, dont elle se distingue par sa taille, par l'épaisseur de ses côtes, par la forme plane de sa valve ventrale et surtout par la fente qui divise son tube.

Gis. et loc. M. Kutorga a découvert ce *Productus* dans le calcaire carbonifère des environs de Sterlitamak.

Explication des figures. PL. VI, FIG. 3, *a*. Echantillon restauré, vu du côté de la valve dorsale. D'après M. Kutorga.

FIG. 3, *b*. Le même fracturé, vu du côté de la valve ventrale. D'après le même.

FIG. 3, *c*. Le même vu de profil. D'après le même.

---

(1) Je me permettrai de faire observer au savant paléontologiste auquel on doit la découverte du *P. genuinus*, que si la valve ventrale eut fermé hermétiquement la valve opposée pendant la vie de l'animal, celui-ci n'eut pas pu construire la partie antérieure de cette dernière valve. Je suis porté à croire que toutes les parties de la valve ventrale, livrant passage à un même nombre de fibres musculaires, celle-ci devait rester entrebaillée partout également et parconséquent aussi s'appliquer exactement contre les parois de la valve dorsale, lorsqu'après la mort de l'animal, les parties molles qui empêchaient leur occlusion venaient à disparaître.

(2) Ces dimensions ont été prises sur les figures.

(3) Cette disposition indiquée par M. Kutorga est exacte pour un grand nombre d'échantillons bien conservés du *P. semireticulatus*, mais il n'en manque pas sur lesquels on aurait de la peine à la constater.

Fig. 3, *d*. Moule intérieur vu du côté de la valve dorsale. D'après le même (1).

D. *PRODUCTI SEMIRETICULATI.*

16. PRODUCTUS MEDUSA.

Pl. V, Fig. 5, *a*, *b*, *c*, *d*.

Productus Medusa. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 166, pl. 7, fig. 5, *a*, *b*, *c* et pl. 13bis, fig. 3, *a*, *b*.

— — de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 270, pl. 18, fig. 6, *a*, *b*.

Cette petite coquille, dont les plus grands échantillons ne dépassent pas 12 millimètres de longueur sur 17 millimètres de largeur, est assez gibbeuse, d'une forme à peu près ovale et possède sa plus grande largeur sur son axe transversal. Sa valve dorsale est garnie d'un sinus médian, souvent assez peu sensible, mais constant, dont l'origine est située à une petite distance du crochet. Les côtes dont sa surface est ornée, sont épaisses ; leur nombre varie de 30 à 40, selon l'âge et la taille de l'individu ; elles sont plus larges à leur extrémité marginale que vers le milieu de leur longueur, aussi ne se bifurquent-elles qu'une seule fois pendant leur trajet ; elles sont traversées dans la première moitié de leur étendue par des plis concentriques assez prononcés pour les faire paraître tuberculeuses. En même temps trois ou quatre stries profondes et assez distantes entre elles, divisent cette même partie en autant de bandes concentriques bien distinctes (Pl. V, Fig. 5, *a*.) et paraissent être produites par autant de points d'arrêt dans la croissance de la coquille. Mais ce qui rend cette valve et l'espèce à laquelle elle appartient surtout remarquables, c'est l'existence tout le long de ses bords libres, d'une série de longs

(1) Il ne serait pas impossible que ce moule appartint à une autre espèce très-voisine du *P. proboscideus*, si j'en juge par la forme des côtes qui sont aussi épaisses sur son prolongement que sur sa partie viscérale, tandis qu'elles sont bien plus minces et bien plus nombreuses sur le prolongement du *P. genuinus* que sur le reste de sa coquille. C'est un point que les paléontologistes Russes auront à éclaircir.

tubes pointus dont l'origine correspond à l'extrémité des sillons qui séparent les côtes longitudinales et dont la direction est perpendiculaire au plan de la valve ventrale (Pl. V, Fig. 5, *d*.). Cette série de tubes remplace dans cette espèce, le prolongement ordinaire de la valve dorsale de ses congénères et elle n'est bien conservée que chez les individus dont les valves se sont trouvées fortement entrebaillées au moment de la fossilisation. Ces tubes marginaux ne sont cependant pas les seuls dont la valve dorsale ait été garnie : on trouve quelquefois des traces d'autres tubes sur la surface même, mais elles sont peu nombreuses et consistent en quelques petits tubercules qui interrompent la marche régulière des côtes. Lorsque les tubes marginaux ont été détruits ou sont cachés dans la roche, leur place est indiquée par des dépressions ou des petits entonnoirs que l'on distingue à l'extérieur des sillons. Le crochet est très-petit, pointu et un peu déprimé. Les oreillettes sont très-étroites et manquent très-souvent.

La valve ventrale est presque parfaitement plane, il existe dans sa partie moyenne un bourrelet à peine sensible, quoique correspondant assez souvent à une dépression très-prononcée de la valve opposée. Sa surface est ornée de côtes rayonnantes semblables à celles qui garnissent la surface de la valve dorsale; ses plis transverses sont peu visibles, mais en revanche les trois ou quatre larges bandes formées par des stries distantes, y sont mieux dessinées que sur la valve dorsale. Ses bords, au lieu d'être hérissés de tubes, sont marginés; ils se terminent en une bande lisse dont la direction est parallèle à celle des tubes.

Dimensions. Longueur, 10 à 12 millimètres. Rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur : 100 : 142 : 50 : 50 : — *Côtes*. On en compte ordinairement sur le bord antérieur 12 à 14 dans un espace compris entre 10 millimètres. Selon M. de Verneuil ces côtes sont moins nombreuses sur les échantillons de Russie.

Rapports et différences. Lorsque les échantillons sont bien conservés, il est impossible de confondre le *P. Medusa* avec aucune autre espèce, à cause de ses tubes marginaux. Lorsque ceux-ci n'existent pas, il a quelque ressemblance avec les jeunes individus du *P. semireticulatus* et *costatus*, dont il se distingue tant par sa hauteur relativement plus considérable, et par sa forme plus transverse que par le petit nombre de ses plis concentriques.

Gis. et loc. J'ai découvert ce petit *Productus* dans le calcaire

carbonifère de Visé. M. de Verneuil l'a recueilli en Russie dans le calcaire de même formation, d'abord à 8 verstes au SO. de Vitegra et ensuite à Tcheketau près de Sterlitamak (Gouvernement d'Orenbourg). Il est probable que de même qu'en Belgique il caractérise en Russie l'étage inférieur du système carbonifère.

Explication des figures. Pl. V, fig. 5, *a*. Individu provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale, montrant quelques tubercules distribués irrégulièrement sur sa surface. De ma collection.

Fig. 5, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 5, *c*. Le même vu de profil.

Fig. 5, *d*. Autre individu, provenant de la même localité, garni de ses tubes marginaux, vu du côté antérieur.

17. PRODUCTUS PLICATILIS.

Pl. V, Fig. 6, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Productus plicatilis. J. Sow. 1824. *Min. Conch.* vol. V, p. 85, pl. 459, fig. 2.

— — Defr. 1826. *Dict. des sc. nat.* vol. XLIII, p. 353.

Producta — Phill. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 215, pl. 8, fig. 4.

Leptæna polymorpha. Muenster. 1840. *Verzeichniss der in der Kreis-Natur. Samml. zu Bayr. befindl. Petref.* p. 45.

Productus plicatilis. v. Buch. 1841. *Abhandl. der K. Akadem. der Wissens. zu Berlin.* Erster Theil, p. 31

— — de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 158, pl. 12, fig. 7, *a*, *b*.

— — Desor. 1845. *Trad. de la Min. Conch. de* Sow. p. 472, pl. 297–459, fig. 2.

Cette coquille est transverse et remarquable par la forme déprimée de son disque viscéral et la hauteur des plis concentriques qui le garnissent, non moins que par la forte courbure de son prolongement antérieur et par la finesse des côtes longitudinales qui recou-

vrent sa surface. Sa valve dorsale est faiblement sinuée dans son milieu ; le sinus ne commence à devenir perceptible qu'à une petite distance du crochet. Chez les individus adultes la longueur de son prolongement est un peu plus forte que celle de sa partie viscérale et très-souvent les côtes de la surface sont entièrement effacées. Les plis concentriques du disque viscéral ressemblent à ceux du *P. undatus ;* de même que ceux-ci, ils sont très-élevés et disposés en terrasses, mais ils sont en général plus réguliers et s'absorbent plus rarement sur les côtés. La direction du prolongement antérieur forme ordinairement un angle droit avec celle de son disque viscéral ; quelquefois même cet angle est plus petit qu'un droit. Les oreillettes sont applaties et assez nettement séparées du reste de la coquille ; elles sont très larges, mais en même temps très-courtes ; on y remarque souvent des traces de tubes dont l'insertion, se trouve généralement située à une petite distance du bord ; on en remarque aussi souvent quelques unes sur les côtés. (PL. V, FIG. 6, *a* et *b*.). Le crochet est très-petit, pointu et dépasse à peine le bord cardinal. C'est sur ce bord que la coquille offre sa plus grande largeur. Le disque viscéral de la valve ventrale est presque parfaitement plane ; son bourrelet médian n'est que très-faiblement indiqué ; son prolongement suit à une petite distance celui de la valve opposée. Dans le jeune âge de cette coquille, l'espace qui est compris entre la surface interne des deux valves, est très-étroit ; mais dès que l'animal a commencé la construction de son prolongement antérieur, cet espace s'agrandit très-sensiblement et les deux valves s'écartent assez l'une de l'autre pour que la distance qui les sépare équivaille au quart de leur largeur.

Le test est assez mince pour que les plis se reproduisent sur le moule intérieur. Un semblable moule, m'a permis de constater que les apophyses hépatiques de la valve dorsale de ce *Productus*, consistent en deux rameaux simples, très-étroits et très-longs, sur les côtés desquels s'étendent obliquement les impressions musculaires ; ces impressions d'une forme allongée et subtriangulaire ont leur surface ornée de 4 ou 5 petites crêtes obliques, rayonnant vers le crochet. Les apophyses hépatiques de la valve ventrale sont plus courtes que celles de la valve opposée, mais elles possèdent une forme triangulaire. La surface de ces moules est souvent garnie de stries longitudinales ; c'est surtout sur le bord antérieur qu'elles sont le plus visibles.

Dimensions. Les échantillons provenant du calcaire carbonifère

de Belgique et d'Angleterre ont rarement plus de 35 millimètres de longueur ; mais le calcaire de même formation des environs de Hof en renferme dont la taille atteint une longueur de 50 millimètres. Le rapport de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur d'un individu adulte sont = 100 : 183 : 82 : 52.

Rapports et différences. La forme transverse de ce *Productus*, jointe à l'absence totale de côtes sur sa surface, ou à leur grande finesse lorsqu'elles existent, suffit pour le distinguer de tous ses congénères. C'est ainsi qu'il ne pourra pas être confondu avec certaines variétés du *P. semireticulatus* dont il se rapproche par sa forme générale, ni avec le *P. sublævis* qui lui ressemble par les ornements de sa surface, mais qui s'en éloigne par l'épaisseur et la longueur de sa coquille et par la forme beaucoup plus bombée de son disque viscéral. Dans son jeune âge le *P. plicatilis* possède aussi quelque ressemblance avec la *Leptæna analoga*, que non seulement la double area, mais encore le nombre et l'épaisseur des plis concentriques et des côtes longitudinales, ainsi que l'absence de toute trace de tubes ne permettent pas de lui assimiler. Des échantillons bien conservés du *P. polymorphus* Muenster, que je dois à la bienveillance de M. le Professeur Germar à Halle, m'ont donné la certitude que cette espèce n'a été créée que sur une variété gigantesque du *P. plicatilis* auquel elle devra désormais être réunie (Pl. V, Fig. 6, *f*).

Gis. et loc. Le *P. plicatilis* semble appartenir exclusivement à l'étage inférieur du système carbonifère. Il se trouve dans le calcaire carbonifère de Visé, dans lequel il n'est pas très-commun. Cependant il paraît être plus rare encore dans celui de Castleton (Yorkshire), de Manorhamilton et du Derbyshire, tandis qu'il est beaucoup plus abondant dans le calcaire noirâtre des environs de Hof en Bavière et de Falkenberg en Silésie. D'après M. de Buch il se rencontre encore à Ratingen, près de Dusseldorf, aux environs de Moscou à Miatschkowa, à Drogomilow et à Podolsk : à Alexin sur l'Okka, à Zissisanskoi sur le Donetz ; sur le ruisseau Stolobenka, (gouvernement de Novogorod) et à Kriviakin près d'Iwanov (gouv. d'Orel) ; mais il faut qu'il y soit bien rare, car Sir Roderick Murchison et MM. de Verneuil et de Keyserling ne l'ont jamais vu pendant leur voyage en Russie (1).

(1) Russia and the Ural Mountains, vol. II, p. 271.

Explication des figures. PL. V, FIG. 6, *a*. Jeune individu en partie restauré, provenant du calcaire de Visé et garni de ses tubes cardinaux, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 6, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 6, *c*. Individu adulte provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

FIG. 6, *d*. Le même vu du côté de la valve dorsale.

FIG. 6, *e*. Le même vu de profil, pour montrer la direction du prolongement antérieur.

FIG. 6, *f*. Individu adulte provenant du calcaire carbonifère de Hof, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

18. PRODUCTUS SUBLÆVIS.

PL. VII, FIG. 1 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Productus sublævis. DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg*, p. 157, pl. 10, fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Strophomena antiquata. POTIEZ *et* MICH. 1844. *Galer. des moll. de Douai.* vol. II, p. 29, pl. 42, fig. 5, non SOW.

Productus sublævis. DE KEYSERL. 1846. *Reise in das Petschora-Land.* p. 207, pl. 5, fig. 3 et 3, *a*.

Coquille de forme transverse et ovalaire ou subquadrangulaire et allongée, selon qu'elle est plus ou moins avancée en âge, à dos sinué et à surface ornée d'un grand nombre de côtes longitudinales très-minces et très-peu apparentes. Chez les individus adultes le prolongement antérieur prend un développement considérable et en fait une des plus grandes espèces du genre. Avant que l'animal ait commencé la construction de ce prolongement, toute la surface de la valve dorsale, ne comprenant alors que la partie viscérale, est garnie de plis concentriques assez réguliers, mais peu prononcés ; c'est aussi sur cette partie que l'on distingue le mieux les fines côtes longitudinales qui coupent à angle droit les plis transverses et qui souvent n'existent pas sur le reste de la coquille ; la valve elle-même n'est que faiblement bombée ; ses oreillettes à peine renflées dans leur milieu, sont larges et séparées de la partie dorsale par une rangée

semicirculaire de petits tubercules ayant servi de base à autant de tubes cardinaux (Pl. VII, Fig. 1. *e, f.*). A mesure que la coquille grandit, la forme de la valve dorsale devient de plus en plus convexe ; ses oreillettes se contournent sur elles-mêmes et se détachent mieux de la partie dorsale par l'élévation rapide et progressive des côtés ; en même temps le crochet se recourbe davantage et dépasse de plus en plus le bord cardinal (Pl. VII, Fig. 1, *d.*). Le sinus médian qui a son origine vers le tiers supérieur du disque viscéral, n'est jamais très-profond ; il s'élargit promptement sur la partie supérieure du prolongement et s'efface presque complètement sur sa partie inférieure (Pl. VII, Fig. 1, *a.*). Le test de ce *Productus* étant épais, il arrive fréquemment que son prolongement antérieur est dépouillé de son épiderme et que les côtes qui ornent sa surface sont remplacées par un même nombre de stries interrompues à de très-faibles distances, par un nombre considérable de très-petites fossettes allongées, ressemblant à des piqûres d'épingles et évidemment produites par les cils vibratils de l'animal (Pl. VII, Fig. 1, *a.*). Chez les individus adultes et bien conservés, le bord cardinal donne la mesure de leur plus grande largeur.

La valve dorsale est très-concave chez les adultes ; cependant sa partie viscérale est un peu applatie et assez nettement séparée du prolongement par un changement assez marqué dans la direction, mais qu'il est difficile de faire ressortir par le dessin. Sa surface parait être plus lisse. Deux rangées obliques de fossettes, partant du crochet et se dirigeant vers chacun des bords latéraux, correspondent aux rangées circulaires de tubercules de la valve dorsale (Pl. VII, Fig. 1, *c.*). Le prolongement de chacune des deux valves est traversé vers son bord antérieur de quelques stries d'accroissement, très-visibles à l'œil nu, lorsque le test est bien intact.

Dimensions. Le plus grand échantillon de cette espèce qui soit en ma possession, a une longueur de 85 millimètres. La taille moyenne est de 60 millimètres. La longueur est dans les rapports suivants, avec la largeur, la hauteur et l'épaisseur : 100 : 100 : 67 : 15.— *Côtes.* A vingt millimètres du crochet, on en compte 18 à 20 dans un espace de dix millimètres.

Rapports et différences. Le *P. sublœvis* avant d'être garni de son prolongement antérieur, a quelque ressemblance avec le *P. plicatilis ;* il sera toujours facile de séparer ces deux espèces en ayant égard à la forme plus déprimée de la dernière et à la hauteur, ainsi qu'à la régularité des plis de son disque viscéral. En outre, lorsque

les deux espèces sont adultes, la valve dorsale du *P. sublævis* présente une courbure régulière, tandis que la valve correspondante du *P. plicatilis* est fortement coudée ; ce caractère suffit à lui seul alors pour rendre toute confusion impossible. Certaine variété du *P. plicatilis* (PL. VII, FIG. 1, *b*, *c*, *d*.) se rapproche du *P. horridus ;* il sera facile de distinguer ces deux espèces, si l'on fait attention que le disque viscéral de la dernière n'est pas plissé et que ses tubes sont beaucoup plus épais. MM. Potiez et Michaud ont rapporté le *P. sublævis* au *P. semireticulatus* auquel il ressemble en effet par sa forme générale, mais dont il diffère par la nature de ses côtes, par la forme de ses oreillettes et de sa valve ventrale, ainsi que par l'épaisseur de son test.

Gis. et loc. Cette espèce qui parait appartenir à l'étage inférieur du système carbonifère, n'a encore été constatée avec certitude que dans le calcaire carbonifère de Visé et de Glageon près d'Avesnes (France). Je doute fort que l'échantillon figuré par M. de Keyserling puisse s'y rapporter. Ce *Productus* est devenu très-rare en Belgique, parce que la partie de la roche qui le renferme avec le *Euomphalus pugilis*, PHILL. et la *Terebratula acuminata*, MARTIN. *sp.* n'est plus exploitée en ce moment.

Explication des figures. PL. VII, FIG. 1, *a*. Grand individu adulte, fracturé des deux côtés, provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale, afin de montrer les stries pointillés du prolongement. De ma collection.

FIG. 1, *b*. Autre individu plus petit, en partie restauré, provenant de la même localité, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 1, *c*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 1, *d*. Le même vu de profil, afin de montrer la forme des oreillettes et la direction de la rangée de tubes qui les borde.

FIG. 1, *e*. Jeune individu provenant de la même localité, en partie restauré, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

19. PRODUCTUS BOLIVIENSIS.

Pl. VIII, fig. 2, *a*, *b*, *c*.

Productus Boliviensis. A. d'Orb. 1842. *Paléont. du voyage dans l'Amér. mérid.* p. 52, pl. 4, fig. 5–9.

— *Gaudryi.* de Keyserl. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 203.

Je ne connais pas de *Productus* dont la coquille soit si fortement recourbée sur elle-même et dont les oreillettes soient plus nettement séparées de la voûte dorsale. Cette espèce est très-transverse et très-gibbeuse. La valve dorsale est divisée dans son milieu par un sinus profond, dont l'origine est située à une petite distance du crochet et dont la largeur ne varie guère avec l'âge ; les côtés de cette valve ont une pente très-rapide et se dirigent presque perpendiculairement sur les oreillettes ; sa surface est entièrement couverte de côtes longitudinales dont l'épaisseur est un peu variable, mais dont la direction est assez régulière ; elles se multiplient par simple bifurcation. Cette bifurcation s'opère principalement sur les côtés et sur la partie viscérale ; elle n'a lieu sur le prolongement antérieur, qu'après l'interruption des côtes par les tubes qui se trouvent irrégulièrement dispersés sur la surface, et qui sont au nombre de 15 à 20. La partie viscérale est ornée de plis concentriques dont l'épaisseur est ordinairement un peu plus forte que celle des côtes, qu'ils rendent tuberculeuses sur cette partie. Les oreillettes ressemblent par leur forme à celles du *P. giganteus ;* elles sont fortement repliées en forme de cornet et obtuses à leurs extrémités latérales ; à une petite distance de leur bord cardinal s'élèvent perpendiculairement trois ou quatre tubes, qui, à en juger par la largeur de leur base, ont du être assez longs et tout à fait semblables à ceux qui se trouvent sur le reste de la surface. Le crochet est petit, mais renflé et tellement recourbé sur lui-même, qu'il dépasse de beaucoup le bord cardinal.

La valve ventrale parait être très-concave, avoir une courbure régulière et suivre de près les mouvements de la valve opposée.

Dimensions. La longueur moyenne est d'environ 30 millimètres. Les rapports entre elle et la largeur et la hauteur sont=100: 170: 85.

Côtes. A une distance de 20 millimètres du crochet, on en compte environ 30 dans un espace de 20 millimètres.

Rapports et différences. Par les ornements de sa surface, cette espèce ressemble aux *P. semireticulatus*, *costatus* et *Flemingii;* néanmoins elle s'en éloigne par la forte courbure de sa valve dorsale et bien plus encore par la forme de ses oreillettes et par l'épaisseur et la distribution de ses tubes. Les côtes bien prononcées et les tubes épars dont sa surface est garnie, ne permettent pas de la confondre avec le *P. sublœvis*, dont elle ne se rapproche que par la forme de ses oreillettes. M. d'Orbigny avait d'abord désigné sous le nom de *P. Gaudryi*, une variété du *P. Boliviensis* mais ayant reconnu ensuite qu'elle ne possédait pas des caractères suffisants pour être maintenue comme espèce distincte, il l'a réunie et décrite sous le même nom.

Gis et loc. Le *P. Boliviensis* a été découvert et recueilli par M. A. d'Orbigny dans le calcaire carbonifère des Andes, à Yarbichambi sur le plateau Bolivien, non loin du lac de Titicaca. Il y est très-commun. M. de Keyserling rapporte à cette espèce un fragment de *Productus* qu'il a trouvé dans le calcaire carbonifère des bords de l'Indiga. Il serait à désirer que cette détermination put être confirmée sur des échantillons complets.

Explication des figures. PL. VIII, FIG. 2, *a*. Individu garni de ses tubes cardinaux en partie restauré, vu du côté de la valve dorsale; de la collection de M. A. d'Orbigny.

FIG. 2, *b*. Le même vu du côté du crochet, afin de montrer l'insertion des tubes.

FIG. 2, *c*. Le même vu de profil, afin de montrer la forte courbure du crochet et du prolongement de la valve dorsale.

20. PRODUCTUS LEPLAYI.

PL. VII, FIG. 2, *a*, *b*.

Productus Leplayi. DE VERN. 1845. *Russia and the Ural Mountains.* vol. II, p. 267, pl. 16, fig. 4, *a*, *b*.

— *Martini.* E. ROBERT. 1845. *Atlas Géologique des voyages de la commiss. sc. du Nord.* pl. 19, fig. F et G, non Sow.

D'après M. de Verneuil, auquel j'ai emprunté la plus grande partie de cette description, le *P. Leplayi* est surtout remarquable par sa forme transverse et par la double rangée de tubes dont ses oreillettes sont garnies (1). L'une de ces rangées suit le bord cardinal et descend même sur les arêtes latérales ; elle se compose de six tubes placés à gauche et à droite du crochet ; quatre sont près de la charnière et deux sur les côtés. Ces tubes sont couchés en arrière et inclinés vers les angles latéraux de la coquille. La seconde série, composée de quatre tubes, est oblique par rapport à la première et longe la légère dépression qui sépare les oreillettes de la voûte dorsale. Enfin, on distingue encore sur cette dernière partie quatre ou cinq tubes placés sans ordre.

La valve dorsale fortement transverse et peu gibbeuse est divisée par un sinus assez bien prononcé. Son bord cardinal est plus long que son axe transversal. Sa surface est garnie de côtes longitudinales arrondies, assez épaisses et distinctes, entre lesquelles naissent vers les bords des côtes plus minces. Elles sont traversées dans leur première moitié, correspondant au disque viscéral, par des plis concentriques de même épaisseur, qui les rendent tuberculeuses. Les oreillettes sont faiblement renflées dans leur milieu et distinctes de la voûte dorsale. Le crochet est petit, peu recourbé et dépasse à peine le bord cardinal.

Valve ventrale inconnue.

Dimensions. Longueur 28 millimètres ; la largeur et la hauteur sont à la longueur dans les rapports de 100 : 160 : 50. —*Côtes.* A 10 millimètres du crochet on en compte douze dans un espace de 10 millimètres ; à 20 millimètres il y en a treize à seize dans un espace de 20 millimètres.

Rapports et différences. Les deux rangées de tubes qui garnissent les oreillettes ont ici la même disposition que chez le *P. horridus ;* mais, comme le fait très-bien observer M. de Verneuil, c'est à peu près la seule analogie qui rattache ensemble ces deux espèces appartenant à la même formation. Par sa forme générale et par la nature de ses côtes, le *P. Leplayi* se rapproche beaucoup du

(1) Je doute que ce dernier caractère soit aussi constant que paraît le croire le savant paléontologiste que je viens de citer. Il existe trop d'espèces chez lesquelles le nombre et l'arrangement des tubes des oreillettes est très-variable pour pouvoir admettre que leur disposition est constante chez celle-ci.

P. semireticulatus avec lequel M. E. Robert me semble l'avoir confondu, mais auquel il ne saurait être réuni. En effet, il ne possède point ce grand prolongement antérieur qui caractérise le *P. semireticulatus;* il est moins recourbé ; ses côtes sont en général plus larges et plus distantes; ses côtés sont moins rapides et rattachés au dos par une pente plus douce et enfin, la disposition de ses tubes cardinaux est plus régulière.

Gis. et loc. M. de Verneuil qui le premier a distingué cette espèce du *P. semireticulatus*, l'a trouvée à Bielagorskaia, vingt verstes au nord-est de Backmout, sur la route de Lissischansk, dans des marnes et des calcaires de l'époque permienne, qui renferment de puissants dépôts de gypse. M. E. Robert l'a rapportée de la rade de Bell-Sound, où elle se trouve dans un calcaire magnésien d'un gris noirâtre qui, contrairement à l'opinion généralement reçue jusqu'ici, doit être placé dans le système permien. Elle y est associée aux *P. horridus* et *Cancrini*, ainsi que j'ai pu m'en assurer par l'inspection des échantillons déposés au Muséum de Paris. Je crois devoir réunir encore au *P. Leplayi*, un échantillon qui m'a été envoyé par l'Etat-major du corps impérial des Mines de St-Pétersbourg sous le nom de *P. sublævis*, quoique ses oreillettes ne soient garnies que d'une seule rangée de tubes. Cet échantillon d'une très-bonne conservation, possède tous les autres caractères du *P. Leplayi;* il provient d'un calcaire marneux de Nijnei Irginsk, situé sur le flanc ouest de l'Oural ; si ma détermination est exacte, comme je suis porté à le croire, bien que je n'ose pas l'assurer positivement d'après l'inspection d'un seul échantillon, elle aura pour conséquence de faire ranger ce calcaire dans le système permien. C'est un fait sur lequel j'appelle l'attention des géologues Russes.

Explication des figures. Pl. VII, Fig. 2, *a*. Individu provenant des marnes de Backmout, vu du côté de la valve dorsale. D'après M. de Verneuil.

Fig. 2, *b*. Le même vu de profil.

21. PRODUCTUS EXPANSUS.

Pl. VII, Fig. 3, *a*, *b*, *c*.

Productus expansus. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belgique.* p. 159, pl. 7, fig. 4, *a*, *b*.

Cette coquille d'une taille médiocre et d'une forme encore plus transverse mais en même temps beaucoup plus gibbeuse que l'espèce précédente, se distingue surtout par la largeur considérable de ses oreillettes et par l'étendue de son bord cardinal. Valve dorsale fortement recourbée, géniculée, divisée dans son milieu par un sinus peu profond quoiqu'assez étroit; une bande blanchâtre transverse, ayant son origine de chaque côté du crochet, la sépare en deux parties d'une longueur à peu près égale. Cette bande, produite par un léger épaississement du test, indique la limite intérieure de la partie viscérale et par suite de l'usure ou de la disparition complète de la coquille, elle donne lieu à une saillie d'autant plus forte de la partie supérieure du prolongement, que l'individu est plus adulte. Toute la surface de cette valve est couverte de côtes longitudinales arrondies, assez larges, très-rapprochées, mais nettement séparées par des sillons étroits; leur direction est toujours très-régulière; leur multiplication se fait par simple bifurcation; elle s'opère principalement sur les côtés et presque toujours avant que les côtes aient atteint le prolongement antérieur; dès qu'elles y sont arrivées, elles conservent la même épaisseur sur le reste de leur étendue. La moitié supérieure de la partie viscérale est déprimée et garnie de plis transverses dont l'épaisseur est à peu près égale à celle des côtes. C'est à partir des derniers plis transverses que la valve se recourbe le plus fortement et qu'elle commence à prendre la forme géniculée qui la distingue. Chaque côté de la valve porte ordinairement les traces d'un ou de deux tubes situés dans l'espace compris entre le dernier pli et le bord supérieur du prolongement (Pl. VI, Fig. 3, *a*). Les oreillettes sont très-larges, applaties et toujours séparées de la voûte du dos, par une petite crête saillante et oblique, même lorsque la coquille est parfaitement intacte; les côtes qui garnissent leur partie la plus rapprochée du bord cardinal,

sont très-minces et disparaissent facilement ; on n'y remarque pas la moindre trace de tubes. Le crochet est pointu, très-petit et ne dépasse pas le bord cardinal. La valve ventrale est d'une forme subtrapezoïdale, et aplatie ou légèrement concave dans sa partie viscérale. Cette partie est située à peu près dans le même plan que les oreillettes et forme avec le prolongement antérieur un angle voisin d'un angle droit. Cette conformation est plus facile à comprendre par l'inspection de la section longitudinale des deux valves réunies (Pl. VII, Fig. 3, *e*). Le test étant très-mince partout ailleurs que sur le bord antérieur de la partie viscérale, la plus grande partie des ornements extérieurs se reproduit sur le moule interne. C'est par un moule semblable d'une bonne conservation, que j'ai pu connaître la structure intérieure des valves, qui a beaucoup d'analogie avec celle des *Leptæna*. En effet, les apophyses hépatiques de la valve dorsale sont très-étroites et très-peu saillantes ; mais en revanche les impressions musculaires sont très-grandes, allongées et en forme d'éventail étalé à droite et à gauche des apophyses ; la surface interne des oreillettes et des parties voisines est criblée d'un grand nombre de petites fossettes ressemblant à des piqûres d'épingles ; le reste est garni de pointes très-fines.

La valve dorsale est munie d'une crête médiane occupant les deux tiers de la longueur de la partie viscérale. Immédiatement en dessous du crochet se trouvent deux larges apophyses, hépatiques semicirculaires peu saillantes et composées de trois ramifications principales ; en dessous et un peu en dehors de chacune de ces apophyses s'étendent obliquement les deux callosités réniformes que l'on rencontre chez un grand nombre de *Productus*, mais qui sont fortement caractérisées chez celui-ci. Le reste de la surface est rendu rugueux par la présence d'un nombre très-considérable de petites fossettes très-serrés et assez profondes.

Dimensions. Longueur : 20 millimètres. Les rapports de la largeur, de la hauteur et de l'épaisseur à la longueur, sont = 100 : 190 : 70 : 40. — *Côtes.* On en compte 12 à 15 dans un espace de 40 millimètres pris sur le bord antérieur de la partie viscérale ; un même espace pris sur le bord antérieur du prolongement en comprend exactement le même nombre.

Rapports et différences. Avant que cette espèce soit pourvue de son prolongement antérieur, il est assez facile de la confondre avec le jeune âge des *P. semireticulatus* et *Flemingii*. Néanmoins par une comparaison attentive on reconnaîtra bientôt que le *P. expansus*

proportionellement à sa taille, est beaucoup plus gibbeux que le *P. semireticulatus*, et que la surface de ce dernier est entièrement reticulée, tandis que celle de l'autre ne l'est qu'en partie. Il diffère du *P. Flemingii* par sa forme beaucoup plus transverse, par l'épaisseur de ses côtes et par l'absence de toute trace de tubes sur sa partie médiane; enfin il s'en éloigne encore par la profondeur de son sinus et par la surface presque complètement plane de sa valve ventrale. Lorsque le *P. expansus* a acquis son entier développement il se distingue de l'une et de l'autre espèce que je viens de citer, par la forme applatie et la largeur considérable de ses oreillettes, ainsi que par la régularité des côtes qui ornent la surface de son prolongement antérieur. En outre, il n'acquiert jamais la taille du *P. semireticulatus*.

Gis. et loc. J'ai recueilli cette espèce dans le calcaire carbonifère de Visé. Pendant longtemps j'ai cru que c'était la seule localité où elle eut été rencontrée; mais j'ai pu me convaincre par quelques échantillons qui m'ont été expédiés par l'Etat-major du Corps impérial des Mines de Russie, sous le nom de *P. semireticulatus*, var. nana? qu'elle se trouve aussi dans les couches carbonifères de ce vaste Empire. Je la possède du calcaire noir de Sérébrjakowa, village situé dans le pays des Cosaques du Don et du grès grisâtre des environs de l'Usine de Saraninsk dans l'Oural.

22. PRODUCTUS SEMIRETICULATUS.

Pl. VIII, Fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*; Pl. IX, Fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m* et Pl. X, Fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*.

Polyginglymon or multarticulate Anomia. Da Costa. 1776. *Elem. of Conch.* p. 293, pl. 6, fig. 10.

Gryphita. Baumer. 1780. *Hist. nat. regni mineral.* p. 402, pl. 4, fig. 29.

Anomites semireticulatus. Martin. 1809. *Petrif. Derb.* p. 7, pl. 32, fig. 1 et 2 et pl. 33, fig. 4.

— *productus.* Id. *Ibid.* p. 9, pl. 22, fig. 1, 2, 3.

Productus Martini. Sow. 1823. *Min. conch.* vol. IV, p. 15, pl. 317, fig. 2, 3 et 4.

— *antiquatus.* Id. *Ibid.* fig. 1, 5 et 6.

Productus concinnus. SOW. 1823. *Min. conch.* vol. IV, p. 16, pl. 318, fig. 1.

— *sulcatus.* ID. *Ibid.* p. 17, pl. 319, fig. 2.

— *Martini.* DEFR. 1826. *Dict. des sc. nat.*, vol. XLIII, p. 350.

— *antiquatus.* ID. *Ibid.* p. 351.

— *concinnus.* ID. *Ibid.* p. 351.

— *sulcatus.* ID. *Ibid.* p. 352.

— *semireticulatus.* FLEM. 1828. *Brit. anim.* p. 379.

— *Martini.* ID. *Ibid.* p. 379.

— *lobatus.* DESH. 1831. *Coq. carac. d. terr.* p. 118, pl. 9, fig. 6 et 7, non SOW.

Producta Martini. SOW. 1829. *Genera of shells.* fig. 1.

— *antiquata.* ID. *Ibid.* fig. 3.

— *Martini.* DESH. 1832. *Encycl. méth. Vers*, vol. III, p. 848.

— *sulcatus.* ID. *Ibid.* p. 848.

— *antiquatus.* DUMONT. 1832. *Const. géol. de la prov. de Liége*, p. 354.

— *concinnus.* ID. *Ibid.* p. 354.

— *Martini.* ID. *Ibid.* p. 354.

— *sulcatus.* ID. *Ibid.* p. 354.

— *antiquatus.* DAVREUX. 1833. *Const. géogn. de la prov. de Liége.* p. 272.

— *Martini.* ID. *Ibid.* p. 272.

— *concinnus.* ID. *Ibid.* p. 272.

— *sulcatus.* ID. *Ibid.* p. 272.

Strophomena antiquata. BRONN. 1835. *Leth. geogn.* vol. I, p. 86, pl. 3, fig. 6, *a*, *b*.

Productus Martini. DESH. 1836. *Anim. sans vert. de* LAMK. 2^me^ *édit.* vol. VII, p. 383.

— *antiquatus.* ID. *Ibid.* p. 384.

— *sulcatus.* ID. *Ibid.* p. 384.

Producta Martini. PHILL. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 213, pl. 7, fig. 1, et pl. 8, fig. 19.

— *antiquata.* ID. *Ibid.* p. 213, pl. 7, fig. 3.

— *concinna.* ID. *Ibid.* p. 214, pl. 7, fig. 9.

— *costata.* ID. *Ibid.* p. 213, pl. 7, fig. 2.

Leptæna antiquata. FISCHER. 1837. *Oryct. du gouv. de Moscou.* p. 142, pl. 26, fig. 4 et 5.

— *tubulifera.* ID. *Ibid.* pl. 26, fig. 1, non DESH.

Productus antiquatus. v. Buch. 1841. *Abhandl. der K. Akad. der Wissens. zu Berlin*, Theil I, p. 29, pl. 2, fig. 7, 8, 9 et 12.

— *Martini.* Id. *Ibid.* p. 30.

— *concinnus.* Id. *Ibid.* p. 33.

Producta antiquata. G. B. Sow. 1842. *Conch. manual*, p. 300, fig. 206.

Productus Martini. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 160, pl. 7, fig. 2, *a*, *b*, *c*, *d* et fig. 6, *a*, *b*; pl. 8, fig. 2, *a*, *b* et pl. 8bis, fig. 1 et 2.

— *costatus.* Id. *Ibid.* p. 164, pl. 8, fig. 2, *c* et fig. 3, *a*, *b*, *c*, *d* et pl. 8bis, fig. 3, non Sow.

— *Inca.* A. d'Orb. 1844. *Paléont. du voyage dans l'Amér. mér.* p. 51, pl. 4, fig. 1, 2, 3.

— *Peruvianus.* Id. *Ibid.* p. 52, pl. 4, fig. 4.

Leptæna Martini. Fahrenk. 1844. *Bullet. de la soc. imp. des nat. de Moscou*, vol. XVII, p. 785.

— *concinna.* Id. *Ibid.* p. 786.

Producta antiquata. M'Coy. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 106.

— *concinna.* Id. *Ibid.* p. 107.

— *Martini.* Id. *Ibid.* p. 111.

— *sulcata.* Id. *Ibid.* p. 116.

— *costellata.* Id. *Ibid.* p. 108, pl. 20, fig. 16.

Productus antiquatus. Desor. 1845. *Trad. de la Min. conch. de* Sow. p. 351, pl. 210–317, fig. 1, 5 et 6.

— *Martini.* Id. *Ibid.* p. 350, pl. 210–317, fig. 2, 3, 4.

— *concinnus.* Id. *Ibid.* p. 351, pl. 211-318, fig. 1, 2, 3.

— *sulcatus.* Id. *Ibid.* p. 353, pl. 211–319, fig. 3.

— *punctatus.* E. Robert. 1845. *Géol. des voyag. de la commiss. scient. du Nord.* pl. 20, fig. L, non Mart.

— *semireticulatus.* de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 262, pl. 16, fig. 1, et pl. 18, fig. 9 et 10, *a*, *b*.

— *Martini.* Geinitz. 1846. *Grundr. der Versteinerungsk.* p. 520.

— *semireticulatus.* de Keyserl. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 208.

Si on ne possédait qu'un petit nombre d'échantillons on serait très-disposé à admettre comme espèces distinctes, les diverses variétés de ce *Productus*, connues sous les noms de *P. antiquatus*, *Martini*, *concinnus et sulcatus;* mais lors qu'on est en présence de plusieurs centaines d'échantillons de ces variétés, on s'aperçoit facilement qu'elles se lient entre elles par des nuances tellement insensibles qu'il est de toute impossibilité de ne pas les considérer comme dérivant d'un seul et même type. Je crois cependant avec M. de Verneuil que ces variétés sont assez importantes pour mériter qu'on les décrive séparement, ainsi que je vais essayer de le faire.

Le *P. antiquatus* est la variété que Martin a spécialement désignée sous le nom de *P. semireticulatus*, nom que j'ai eu tort de ne pas lui conserver en 1843. C'est une coquille gibbeuse, transverse, pouvant acquérir une assez forte taille. Un sinus plus ou moins profond selon l'âge des individus, occupe la partie médiane de la valve dorsale; ce sinus s'élargit fortement sur le prolongement antérieur, y disparait même quelquefois en entier, et ne remonte que très-rarement jusqu'à l'extrémité du crochet. Les côtés de la valve même sont ordinairement comprimés et à pente très-rapide. Les oreillettes sont applaties, très-larges et forment avec la partie dorsale de la coquille un angle très-prononcé. Le crochet est recourbé et dépasse plus ou moins le bord cardinal; ce bord est égal au plus grand diamètre transverse de la coquille. La surface est garnie de côtes longitudinales d'épaisseur moyenne et intermédiaires entre celles des *P. costatus et Cora;* elles sont arrondies et régulières; leur multiplication ne s'opère que sur la partie viscérale et principalement sur les côtés; elle a lieu soit par simple bifurcation, soit par implantation de côtes nouvelles. Dans leur première moitié, elles sont traversées par des plis concentriques, qui étant à peu près de la même épaisseur qu'elles, les relèvent et les rendent tuberculeuses, en produisant une sorte de treillissage qui a valu à ce *Productus*, le nom de *P. semireticulatus*, sous lequel Martin l'a décrit. Ces côtes sont quelquefois légèrement granulées; mais ces granulations auxquelles j'ai attaché anciennement beaucoup trop d'importance, dépendent uniquement de l'enlèvement de la couche extérieure du test.

La valve ventrale ressemble par ses ornements à la valve opposée, mais sa partie réticulée est sub-plane et divisée dans son milieu par un bourrelet longitudinal, dont la saillie est en rapport avec la

profondeur du sinus de la valve dorsale. Dans sa partie antérieure elle se recourbe perpendiculairement sur elle-même et se rapproche tellement de l'autre valve, que l'on a pu croire que c'était par cette dernière seule que le prolongement était formé. Le test de cette espèce, quoique mince déjà dans ses diverses parties, l'est bien plus encore sur son bord antérieur ; aussi ce bord est-il rarement intact. C'est probablement cette minceur extrême qui est cause du repli marginal et perpendiculaire qui se remarque sur quelques rares échantillons (Pl. IX, Fig. 1 . *f.*).

Je n'ai jamais vu des tubes insérés directement sur l'arête cardinale des coquilles de la variété dont il est ici question, mais en revanche, j'en ai remarqué très-souvent un petit groupe situé, de chaque côté de la valve près de son bord cardinal et immédiatement audessous de sa partie réticulée. L'espace occupé par ce groupe est entièrement plane, quadrangulaire, un peu déprimé et dans une direction perpendiculaire à celle des oreillettes. Ce groupe se reproduit en creux sur la valve ventrale et se trouve aussi sur les coquilles de la variété suivante (Pl. IX, Fig. 1, *a*, *b*, *c.*), ce qui prouve suffisamment qu'elles appartiennent au même type. La rareté avec laquelle les tubes se montrent sur le reste de la surface, a fait croire à M. de Buch qu'il n'y en existait pas. Cependant il y a certaines localités où la plupart des individus ont leurs côtes interrompues par un grand nombre de racines de ces tubes, dont les traces ne sont pas toujours aussi saillantes que sur l'échantillon Bolivien que j'ai représenté Pl. VIII, Fig. 1, *a*, *b*, *c*. Cela peut dépendre, comme le fait très-judicieusement observer M. de Verneuil, de ce que ces tubes, en tombant, ne laissent souvent qu'une petite ouververture qui se cicatrise avec le temps et qu'il est difficile de reconnaître.

Dans le calcaire carbonifère de Russie on rencontre assez souvent des valves ventrales isolées dont la surface interne a été mise à nu par suite de la décomposition ou de la dissolution de la roche qui la recouvrait. C'est une valve semblable provenant du calcaire carbonifère blanchâtre des environs de Miatchkova (gouvernement de Moscou), que j'ai fait représenter Pl. IX, Fig. 1, *k ;* elle est garnie d'une dent cardinale médiane trifurquée, munie d'un petit sillon longitudinal en forme de gouttière et soutenue par une petite callosité applatie et triangulaire ; chacun des angles de cette surface donne naissance à une petite arête, dont les deux supérieures longent à droite et à gauche le bord cardinal dans toute son

étendue (1), et dont la troisième traverse le milieu de la valve dans une grande partie de sa longueur et produit la forme d'un T par sa direction perpendiculaire à celle des deux premières. Les apophyses hépatiques sont en grande partie usées ; en dessous d'elles on aperçoit des traces du treillissage extérieur. Vers le bord, la surface est hérissée de pointes obtuses, inclinées en avant dans le même sens que celui dans lequel se dirigent les côtes rayonnantes qui leur donnent naissance. Ces pointes ne sont pas de même nature que les tubes extérieurs; elles étaient probablement destinées à remplir les interstices des conduits ovariaux.

Dimensions. Cette variété acquiert une assez grande taille. J'en possède des échantillons qui ont jusqu'à 75 millimètres de long. Chez les individus régulièrement développés, la longueur est à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 132 : 72 : 50. — *Côtes.* A 20 millimètres du crochet on en compte 20, dans un espace de 20 millimètres ; on n'en compte plus que 15 dans le même espace, sur la limite de la partie viscérale.

P. Martini. — La variété que Sowerby a décrite sous ce nom et que Martin avait désignée sous celui d'*Anomites productus*, ne se distingue de la précédente, que par la longueur et l'irrégularité de son prolongement antérieur. Souvent aussi ses côtes sont un peu plus minces, plus serrées et plus épineuses, mais moins régulières et plus fréquemment dichotomes sur les bords du prolongement. En outre, sa partie viscérale est moins transverse et son sinus encore moins prononcé que celui de la variété précédente. Selon Sowerby, chacune de ses oreillettes est garnie d'une double rangée de tubes ; mais ce caractère que j'ai rencontré sur quelques individus (PL. IX, FIG. 1, *g.*), n'est pas plus constant ni plus certain que ceux que j'ai énumérés en premier lieu.

C'est à la variété, dont je m'occupe ici, que je rapporte le superbe moule que j'ai fait représenter PL. IX, FIG. *h* et *i*. Il reproduit la forme des apophyses hépatiques des deux valves avec une perfection rare ; elles sont identiques avec celles de la variété précédente et servent par conséquent à prouver leur idendité spécifique ; celles de la valve dorsale sont très-saillantes et composées l'une et l'autre de

(1) L'impression produite par ces arêtes qui existent chez tous les *Productus*, sur le bord cardinal des moules intérieurs, pourrait quelquefois faire croire à l'existence d'une area, qu'elle simule assez bien. C'est une erreur contre laquelle il est bon de se prémunir.

la réunion d'un certain nombre de lames minces, qui à l'instar des feuilles d'un Palmier, semblent s'élever d'une même souche et retomber les unes audessus des autres. A côté de ces apophyses qui occupent à peu près le tiers de la longueur totale de la coquille, se trouvent des impressions musculaires, un peu obliques, allongées et très-finement striées. Le reste de la surface est criblé d'une infinité de petites fossettes ; on n'y aperçoit que quelques traces des côtes et des plis de la surface externe. Les apophyses de la valve ventrale sont plus courtes, mais plus larges que celles de la valve dorsale ; un rameau médian donne naissance à 20 ou 22 branches latérales; ces apophyses sont séparées par une arête médiane ; en dessous d'elles s'étendent obliquement les callosités réniformes ; le reste de la surface est finement chagriné et hérissé de quelques pointes ; on y aperçoit en outre des traces des ornements extérieurs.

P. concinnus. Cette variété est ordinairement plus petite que les précédentes. Les plis concentriques y sont beaucoup moins nettement prononcés ; en revanche le sinus est un peu plus profond et la distance entre les deux valves un peu plus forte ; enfin ses côtes paraissent être un peu plus applaties, plus minces et moins dichotomes.

P. sulcatus. Je range dans cette variété des coquilles très-gibbeuses que moi et M. Phillips avons eu tort de confondre avec le *P. costatus.* Elles se distinguent, ordinairement par un sinus assez fortement prononcé et persistant sur toute la longueur de la coquille, par des côtes un peu plus épaisses que celles du *P. antiquatus*, par un crochet très-recourbé, et enfin par des oreillettes de largeur moyenne et séparées de la voûte dorsale par une crête saillante ; cette crête est surmontée d'une rangée de 4 à 6 tubes longs et épais ; des traces de quelques autres tubes garnissent en outre la surface des oreillettes. Cette variété à laquelle j'assimile le *P. costellatus* M'Coy, est assez constante et mériterait peut être qu'on en fit une espèce distincte.

Rapports et différences. On a vu que la plupart des espèces du groupe des *semireticulati* que j'ai déjà décrites, ont des rapports plus ou moins éloignés avec celle qui a fourni le nom du groupe ; il en est de même de celles dont la description me reste encore à faire et qui sont au nombre de trois, savoir, le *P. costatus*, le *P. Flemingii* et le *P. carbonarius.* Le premier se distinguera immédiatement par la largeur de ses côtes ; le second par la courbure régulière de sa valve ventrale et par des côtes plus minces et ordi-

nairement plus épineuses; le troisième qui se rapproche du *P. semireticulatus* par la forme de sa valve ventrale, est remarquable non seulement par l'absence de toute trace de sinus, mais encore par la finesse de ses côtes et le nombre considérable de tubes très-déliés dont sa surface est couverte. Outre les diverses variétés dont il a déjà été question, je considère comme appartenant au même type spécifique les *P. Inca* et *Peruvianus*, A. D'ORBIG., qui par tous leurs caractères, sauf le nombre et la saillie de leurs tubes, s'identifient parfaitement avec certains échantillons Européens.

Gis. et loc. Le *P. semireticulatus* est généralement considéré comme l'un des fossiles les plus caractéristiques du système carbonifère. Il se trouve dans les divers étages de ce système; cependant la variété *concinnus* m'a parue être plus abondante dans l'étage supérieur, tandis que la variété *sulcatus* semble se trouver de préférence dans les couches de l'étage inférieur. Il est bien peu de localités de notre globe dont les roches carbonifères ne renferment pas cette espèce. Je l'ai recueillie abondamment en Belgique dans le calcaire de l'étage inférieur du système carbonifère de Visé, de Chokier et de Lives près de Namur et dans celui de l'étage moyen de Tournay, d'Ath, de Feluy, des Ecaussinnes, de Soignies, de Chanxe et de Comblain-au-Pont. En Allemagne on la trouve à Crumford, à Ratingen, à Altwasser, à Hausdorf et à Falkenberg. En Russie elle appartient généralement selon M. de Verneuil, à la partie moyenne du calcaire carbonifère et s'y trouve très-souvent associée au *Spirifer Sowerbyi*. Elle s'y montre dans un grand nombre de localités: aux environs de Moscou; sur la Dwina, l'Oka, la Pinega et la Petschora; dans les Monts Timans près de la mer glaciale; dans la contrée du Donetz et jusques dans l'Oural où on la trouve dans les premiers relèvements du calcaire carbonifère, à Sterlitamack et à Sarana. Ce *Productus* est en outre très-abondant à Cosatchi-Datchi, sur le revers Oriental de la chaîne de l'Oural, à l'Est de Minsk, ainsi qu'à Soulem sur la Tchusovaya. Enfin M. de Tchihatchef l'a rapportée des montagnes de l'Altaï, des mines de Rydark, de Zirianof, de Nikolaieff et du village de Laziha situés sur la rive droite de la Bouchtarma (de Verneuil). Il n'est pas moins abondant dans le calcaire carbonifère de l'Irlande et de l'Angleterre. Il y est très-repandu dans le calcaire du Yorkshire, du Derbyshire, du Cumberland, du Northumberland et du Flintshire. M. Paillette l'a recueilli aux environs de Pola de Lena et de Mières del Camino (Asturies). Il existe aussi dans certains Etats d l'Amérique sep-

tentrionale, tels que ceux de l'Ohio, du Missouri et du Mississipi, où M. de Verneuil l'a trouvé dans des calcaires, qui sont en concordance avec ceux qui le renferment en Europe. M. A. d'Orbigny l'a rapporté de l'Ile de Quebaja, située dans le lac de Titicaca, au pied des Andes Boliviennes (Amérique méridionale). Enfin, j'en ai sous les yeux un échantillon de la galerie de Minéralogie du Muséum de Paris, recueilli dans un grès noirâtre de la Nouvelle Hollande. Cet échantillon appartenant à la variété *concinnus*, est remarquable par la présence d'un tube de 32 millimètres de long, inséré sur son prolongement antérieur, immédiatement endessous de la partie viscérale.

Explication des figures. Pl. VIII, fig. 1, *a. Productus semireticulatus*, var. *antiquatus*. Individu provenant du calcaire carbonifère de Yarbichambi (Bolivie), vu du côté de la valve dorsale. Il est remarquable par le grand nombre de tubes dont sa surface est hérissée. De la collection de M. A. d'Orbigny.

Fig. 1, *b*. Le même vu de profil.

Fig. 1, *c*. Le même vu du côté du crochet.

Fig. 1, *d. P. semireticulatus*, var. *sulcatus*. Echantillon provenant de l'argile carbonifère de Tournay, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 1, *e*. Le même vu du côté du crochet, afin de montrer les tubes cardinaux. Le dessinateur a négligé quelques plis transverses.

Fig. 1, *f*. Le même vu de profil, afin de montrer l'insertion des tubes latéraux.

Fig. 1, *g. P. semireticulatus*, var. *concinnus*. Partie viscérale d'un individu provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 1, *h*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Pl. IX, Fig. 1, *a. P. semireticulatus*, var. *Martini*. Individu provenant du calcaire carbonifère de Visé, en partie restauré, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 1, *b*. Le même vu de profil, afin de montrer la courbure du crochet et le groupe latéral de tubes.

Fig. 1, *c*. Autre individu restauré, provenant de la même localité, vu du côté de la valve ventrale, afin de montrer la reproduction sur cette valve, du groupe latéral de tubes de la valve opposée, ainsi que l'irrégularité des côtes du prolongement. De ma collection.

FIG. 1, *d*. *P. semireticulatus*, var. *sulcatus*. Individu provenant du calcaire de Visé, en partie restauré, garni de ses tubes latéraux, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 1, *e*. *P. semireticulatus*, var. *antiquatus*. Individu adulte, provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 1, *f*. Individu de la même variété que le précédent, provenant de la même localité, garni d'un rebord marginal, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 1, *g*. *P. semireticulatus*, var. *Martini*. Individu provenant du calcaire de Visé, vu de profil, afin de montrer la double rangée de tubes insérée sur ses oreillettes. De ma collection.

FIG. 1, *h*. Moule siliceux intérieur de la même variété, provenant des couches carbonifères du village de Slobodka (gouv. de Toula), vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

FIG. 1, *i*. Le même vu du côté opposé.

FIG. 1, *k*. *P. semireticulatus*. var. *antiquatus*. Individu d'une valve ventrale, provenant du calcaire carbonifère de Miatchkova (gouv. de Moscou). De ma collection.

FIG. 1, *l*. Jeune individu provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

FIG. 1, *m*. Le même vu de profil, afin de montrer l'épaisseur de la coquille.

PL. X, FIG. 1, *a*. *P. semireticulatus*, var. *antiquatus*. Moule intérieur restauré provenant du calcaire carbonifère de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 1, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 1, *c*. Le même vu de profil.

FIG. 1, *d*. Le même vu du côté du crochet.

23. PRODUCTUS COSTATUS.

PL. VIII, FIG. 3, *a*, *b*, *c* et PL. X, FIG. 3 *a*, *b*, *c*, *d* *e*, *f*. *g*.

Producta costata, J. D. C. Sow. 1827. *Min. Conch.* vol. VI, p. 115, pl. 560, fig. 1, non FISCHER, nec DE KON. nec E. ROBERT.

Producta muricata? Phill. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 214, pl. 8, fig. 3.

Leptæna reticularis? Fischer. 1837. *Oryct. du gouv. de Moscou.* p. 143, pl. 22, fig. 5.

Productus costatus. v. Buch. 1841. *Abhandl. der Königl. Akad. der Wissens. zu Berlin, aus dem Jahre* 1841. Theil I, p. 33.

Leptæna costata? Fahrenkohl. 1844. *Bullet. de la soc. imp. des nat. de Moscou*, vol. XVII, p. 786.

Productus costatus. de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 268, pl. 15, fig. 13, *a*, *b*.

— — Desor. 1845. *Trad. de la Min. conch.* de Sowerby, p. 576, pl. 360-365, fig. 1 et 2.

Coquille arrondie ou légèrement transverse, de taille moyenne, remarquable par la largeur de ses côtes et le grand nombre de tubes qui garnissent ses oreillettes. La valve dorsale est gibbeuse, fortement recourbée sur elle-même, et divisée dans son milieu par un sinus assez profond, mais qui ne s'étend pas jusqu'au crochet. Ses côtés sont comprimés et presque verticaux ; sa surface est garnie de 15 à 20 côtes longitudinales, simples et d'une largeur assez inégale ; la plupart d'entre-elles s'élargissent régulièrement à mesure qu'elles s'allongent, quelques-unes se bifurquent, d'autres disparaissent avant d'atteindre le bord, en se réunissant à une de leurs voisines, ce qui explique suffisamment l'irrégularité de leur épaisseur. Ces côtes sont assez saillantes, arrondies et toujours beaucoup plus larges que les sillons qui les séparent ; elles sont traversées par des stries d'accroissement onduleuses et extrêmement fines, mais néanmoins perceptibles à l'œil nu ; ce caractère qui n'a pas échappé à Sowerby, est rarement aussi tranché sur d'autres espèces, dont l'accroissement s'est opéré sans doute moins rapidement. Plusieurs de ces côtes sont en outre garnies de longs tubes assez épais et épars. La partie viscérale est petite et traversée de plis concentriques qui contrairement à ce que pense M. de Verneuil, sont tellement dominés par les côtes longitudinales que celles-ci en sont à peine rendues tuberculeuses et qu'ils sont presqu'effacés par elles. Les oreillettes sont très-petites, nettement détachées des côtes et faiblement bombées dans leur milieu. Elles sont entourées d'une rangée demi-cir-

culaire de longs tubes dont la direction est perpendiculaire aux côtés de la valve et dont l'épaisseur est d'autant plus forte qu'ils sont plus éloignés du bord cardinal. Chacune des oreillettes porte presqu'immédiatement sur l'arête de son bord cardinal deux ou trois tubes plus minces et dirigés obliquement en avant. Le crochet quoique très-recourbé, dépasse à peine le bord cardinal. La valve ventrale est très-concave, quoique formant un disque presque plane sur toute sa partie viscérale; un bourrelet assez prononcé, correspondant au sinus de la valve opposée, la partage en deux parties égales; ses plis transverses sont un peu mieux exprimés que ceux de la valve dorsale.

Quoique le test de ce *Productus* ne soit pas très-mince, l'épaisseur de ses côtes et la profondeur des sillons qui les séparent, sont cause qu'elles se reproduisent sur le moule intérieur de la coquille, avec cette différence toutefois, que les sillons extérieurs correspondant intérieurement à des côtes d'une largeur plus considérable que celle qu'ils possèdent eux-mêmes, il doit en résulter une empreinte à côtes plus étroites, mais à sillons plus larges que ceux de la surface extérieure. C'est à cette circonstance dont M. de Verneuil ne semble pas avoir tenu suffisamment compte, que j'attribue la largeur des intervalles qui séparent les côtes de la variété qu'il a décrite et dont il n'a connu que des moules siliceux. C'est un moule semblable que j'ai représenté PL. X, FIG. 3, *c;* sa surface est couverte de fines granulations, ce dont il est facile de s'assurer en l'examinant à la loupe.

Dimensions. Un individu d'une conservation parfaite, m'a fourni les dimensions suivantes: longueur 22 millimètres; largeur, hauteur et épaisseur en rapport avec la longueur = 100: 109: 73: 32. Un autre individu possède une longueur de 29 millimètres, qui est à peu près dans les mêmes rapports avec ses autres dimensions que ceux que je viens d'indiquer

Rapports et différences. Cette espèce que je crois identique avec le *P. muricatus* PHILL., est assez généralement confondue dans les collections de Russie avec le *P. Flemingii* (*lobatus*), dont on le considère comme variété et auquel il ressemble en effet par sa taille; il s'en éloigne cependant par l'épaisseur de ses côtes et par la forme plane de la partie viscérale de sa valve ventrale. Bien que je croie être certain de l'identité spécifique des individus que j'ai représentés à côté de celui qui a été figuré et décrit par Sowerby, il n'y en a pas un seul qui offre les larges côtes applaties qui caractérisent ce der-

nier. Aussi suis-je porté à croire que la forme de ses côtes est uniquement due au hazard, qui aura voulu qu'aucune d'elles ne se bifurquât avant d'atteindre le bord. L'impossibilité de rencontrer un second échantillon semblable, me confirme dans mon opinion. Contrairement à l'avis de M. de Verneuil, je doute fort, que le *Leptæna reticularis*, Fischer, puisse être rapporté à cette espèce. L'échantillon figuré par l'auteur Russe sous le nom de *Leptæna costata*, n'est qu'un fragment de son *Spirifer Sowerbyi*.

Gis. et loc. Ce *Productus* que je n'ai pas encore rencontré en Belgique, ni en Allemagne, paraît être très-abondant dans les couches carbonifères de certaines localités de la Russie. M. de Verneuil le cite principalement des couches carbonifères des environs de Sloboda, gouvernement de Toula, dans lesquelles ce *Productus* est changé en silex, comme tous les fossiles de cette localité. Je le possède en outre dans un état parfait de conservation, du calcaire carbonifère grisâtre de Botcharova sur le Volga, gouvernement de Twer, et de Karova, gouvernement de Kalouga, et à l'état de moule, du grès tendre et grisâtre des bords de la Bristritza, gouvernement de Novogorod. Je dois à mon ami M. Waterkeyn, Professeur de géologie et de minéralogie à l'Université de Louvain, deux échantillons que je rapporte à cette espèce, provenant tous deux du calcaire carbonifère compacte de St-Louis au Missouri, et à un autre ami non moins généreux, M. Lewis un individu du calcaire carbonifère de Lowick. L'échantillon décrit par Sowerby et sur lequel il a créé l'espèce, lui a été envoyé par Lady Marchison; il provient du calcaire carbonifère noirâtre de Glasgow. Ce *Productus* se trouve aussi en Irlande; il n'y est pas moins rare qu'en Angleterre.

Explication des figures. Pl. VIII, Fig. 3, *a*. Individu provenant du calcaire carbonifère du Missouri (Amérique du Nord), vu du côté de la valve dorsale (1). De ma collection.

Fig. 3, *b*. Le même vu de profil.

Fig. 3, *c*. Le même vu du côté du crochet.

Pl. X, Fig. 3, *a*. Echantillon vu aux trois quarts, du côté de la valve dorsale; copié d'après Sowerby.

---

(1) Le dessinateur a donné à cet échantillon un plus grand nombre de côtes qu'il n'en possède réellement; on ne pourra donc pas bien juger des caractères de l'espèce par cette figure et par les deux suivantes.

FIG. 3, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale., copié d'après le même.

FIG. 3, *c*. Moule siliceux intérieur restauré, provenant des couches carbonifères de Sloboda, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 3, *d*. Moule extérieur d'une valve dorsale anomale, provenant de la même localité que le précédent; d'après M. de Verneuil.

FIG. 3, *e*. Echantillon provenant du calcaire de Botcharova, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 3, *f*. Le même vu du côté du crochet.

FIG. 3, *g*. Le même vu de profil, afin de montrer l'insertion des tubes latéraux.

24. PRODUCTUS FLEMINGII.

PL. X, FIG. 2, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, et FIG. 3 *h*.

Anomiæ echinatæ. URE. 1793. *History of Rutherglen*, p. 314, pl. 15, fig. 4.

Productus longispinus. SOW. 1812. *Min. conch.* vol. I, p. 154, pl. 68, fig. 1.

— *Flemingii*. ID. *Ibid.* vol. I, p. 155, pl. 68, fig. 2.

— *spinosus*. ID. *Ibid.* vol. I, p. 157, pl. 69, fig. 2.

— *lobatus*. ID. 1823. *Ibid.* vol. IV, p. 16, pl. 318, fig. 2 à 6.

— *longispinus*. KRUEGER. 1825 *Urweltl. Naturg.* vol. II, p. 216.

— *Flemingii*. ID. *Ibid.* p. 215.

— *spinosus*. ID. *Ibid.* p. 216.

— *longispinus*. DEFR. 1826. *Dict. d. sc. nat.* vol. XLIII, p. 349.

— *Flemingii*. ID. *Ibid.* p. 349.

— *spinosus*. ID. *Ibid.* p. 350.

— *lobatus*. ID. *Ibid.* p. 351.

Leptæna longispina. DALMAN. 1827. *Kongl. Vetensk. Acad. Handl. for Ar.* 1827, p. 94.

— *Flemingii*. ID. *Ibid.* p, 94.

Productus longispinus. Flem. 1828. *Brit. anim.* p. 378.
— *spinosus.* Id. *Ibid.* p. 378.
— *lobatus.* Id. *Ibid.* p. 379.
— *longispinus.* Holl. 1830. *Handb. der Petrefactenk.* p. 362.
— — Dumont. 1832. *Const. géol. de la prov. de Liége*, p. 354.
— *lobatus.* Id. *Ibid.* p. 354.
— — Davreux. 1833. *Const. géogn. de la prov. de Liége.* p. 272.
— *elegans.* Id. *Ibid.* p. 272.
— *hemisphæricus.* Leveillé. 1835. *Mém. de la soc. géol. de France.* vol. I, p. 35.
Producta lobata. Phillips. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 214, pl. 8, fig. 7.
— *setosa.* Id. *Ibid.* p. 214, pl. 8, fig. 9 et 17.
Productus longispinus. Desor. 1840. *Trad. de la Min. conch.* de Sow. p. 104, pl. 50-68, fig. 1 et 2.
— *Flemingii.* Id. *Ibid.* p. 104, pl. 50-68, fig. 3 et 4.
— *spinosus.* Id. *Ibid.* p. 107, pl. 51-69, fig. 3 et 4.
— *lobatus.* v. Buch. 1841. *Verhandl. der Königl. Akad. der Wissens. zu Berlin, aus dem Jahre* 1841. Theil I, p. 32, pl. 2, fig. 17.
— *longispinus* de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 187, pl. 12, fig. 11, *a*, *b* et pl. 12bis, fig. 2, *a*, *b*, *c*, *d*.
— *Capacii.* A. d'Orb. 1843. *Paléont. du voyage dans l'Amér. mérid.* p. 50, pl. 3, fig. 24, 25 et 26.
Producta lobata. M'Coy. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 111.
— *longispina.* Id. *Ibid.* p. 111.
— *setosa.* Id. *Id.* p. 115.
— *spinosa.* Id. *Ibid.* p. 115.
Productus lobatus. Desor. 1845. *Trad. de la Min. conch. de* Sow. p. 352, pl. 211-318, fig. 4-9.
— — de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 266, pl. 16, fig. 3, *a*, *b* et pl. 18, fig. 8.

Productus lobatus. DE KEYSERL. 1846. *Reise in das Petschora-Land.* p. 206,

— *tubarius.* ID. *Ibid.* p. 208, pl. 4, fig. 6.

Coquille de taille médiocre et de forme arrondie ou faiblement transverse. Valve dorsale fortement bombée, régulièrement recourbée sur elle-même et divisée en deux parties égales par un sinus d'une profondeur variable, remontant rarement jusqu'à l'extrémité du crochet. La surface est garnie de côtes longitudinales minces, assez régulières, se bifurquant fréquemment sur la partie viscérale; cette partie est traversée par un petit nombre de plis concentriques assez larges, peu distincts et dominés par les côtes longitudinales. Quelques-unes de ces côtes sont surmontées tantôt vers le milieu de leur parcours, tantôt vers leur extrémité antérieure, d'un ou de deux tubes, qui ont ordinairement pour effet de faire confluer deux ou trois côtes, afin de ne plus en former qu'une seule plus épaisse, à partir de l'insertion du tube. Ces tubes sont souvent d'une longueur considérable et presque toujours prolongés en ligne droite; leur diamètre ne varie guère d'une extrémité à l'autre, abstraction faite de quelques bourrelets, ou anneaux peu prononcés qui semblent dépendre d'interruptions périodiques dans leur accroissement (1). Deux de ces tubes sont assez régulièrement situés vers le milieu du prolongement à droite et à gauche du sinus et sont en général un peu plus longs que les autres, dont la position n'a presque jamais rien de régulier. Cependant M. de Keyserling a fait connaître une variété remarquable du *P. Flemingii*, chez laquelle les tubes épars de la surface sont réunis en une série unique et transverse, placée presqu'immédiatement en dessous de la partie viscérale et s'étendant d'une extrémité de la coquille à l'autre (PL. X, FIG. 2, *a*, *b*, *c*.). Les oreillettes sont petites, sub-triangulaires, séparées de la voûte dorsale par une dépression semicirculaire, un peu relevées dans leur milieu et souvent garnies de deux ou de trois tubes assez épais et dirigés de dedans en dehors, obliquement à leur surface. Ces

(1) C'est sans doute par erreur que M. de Verneuil me fait dire *que ces tubes sont articulés et composés de plusieurs pièces rentrant les unes dans les autres.* Mon honorable ami voudra bien me permettre de lui faire observer qu'il a mal interprété la phrase à laquelle il a fait allusion, j'espère qu'en la relisant il se convaincra facilement que je m'y suis borné à indiquer une ressemblance plus exacte en apparence qu'en réalité.

tubes, quoique situés très-près du bord cardinal, ne prennent jamais leur origine sur l'arête même de ce bord. Le crochet est petit et tout en se recourbant assez fortement, il ne dépasse que bien peu le bord cardinal. Celui-ci est ordinairement de la même longueur que le diamètre transverse ; quelquefois il est un peu plus long.

La valve ventrale est régulièrement concave et fortement enfoncée dans la valve opposée, à l'exception de ses oreillettes qui sont déprimées dans leur milieu et séparées des flancs par une crête très-prononcée. Un bourrelet médian plus ou moins saillant correspond au sinus de la valve dorsale ; sauf les tubes, ses ornements extérieurs sont les mêmes que ceux de cette valve, avec laquelle elle s'articule au moyen d'une dent très-courte et bifurquée ; cette dent étranglée à son origine est soutenue à l'intérieur, par une petite callosité applatie, en dessous de laquelle s'étendent les apophyses hépatiques assez larges, mais très-courtes et peu ramifiées. Une crête longitudinale, très-élevée et très-tranchante s'étend jusqu'au milieu de la valve ; à droite et à gauche se trouvent les callosités réniformes parfaitement limitées par un bord relevé et tranchant. Sur la partie antérieure s'élève un assez grand nombre de pointes obtuses, inclinées et dirigées en avant; à une petite distance des bords latéraux se trouve une légère saillie qui leur est parallèle. Le reste de la surface est granulé. L'intérieur de la valve dorsale n'offre rien de remarquable. Ses apophyses hépatiques sont très-petites et ne laissent que des traces peu distinctes sur le moule interne. Tout le reste de la surface est criblé de petites fossettes. Les ornements extérieurs ne s'y reproduisent que faiblement.

Dimensions. La plupart des échantillons provenant des couches carbonifères autres que de celles des environs de Tournay et des bords de l'Ylytch, n'atteignent qu'une longueur d'environ 15 à 20 millimètres ; celle des autres varie de 25 à 30. La longueur est à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 120 : 67 : 23. — *Côtes.* On en compte 18 à 20 dans un espace de dix millimètres pris immédiatement en dessous de la partie viscérale ; le même espace pris sur le bord antérieur n'en comprend plus que 14 ou 15.

Rapports et différences. Cette espèce se distingue facilement du *P. semireticulatus* par sa petite taille et par la courbure régulière de ses deux valves. Ce dernier caractère la sépare aussi du *P. carbonarius*, auquel elle ressemble par sa taille et par la finesse de ses côtes; elle s'en éloigne en outre, par l'épaisseur et la longueur de

ses tubes, caractère qui n'avait pas échappé à Sowerby et qui l'avait engagé à lui donner le nom de *P. longispinus*. J'avais moi-même cru devoir adopter ce nom de préférence à celui de *P. lobatus*, qui, bien que plus généralement usité, n'avait pas le mérite de l'antériorité. Mais comme ces noms ont le défaut de faire croire que les caractères qu'ils expriment sont le privilège exclusif de cette espèce, tandis, qu'il existe beaucoup d'autres auxquelles ils seraient tout aussi bien appliquables, j'ai préféré leur substituer le nom de *P. Flemingii*. Ce nom mérite d'autant mieux d'être conservé, qu'il rappelle celui du savant naturaliste à qui l'on doit la découverte de l'espèce et qu'il est un des plus anciens de ceux qui ont servi à la faire connaître. M. A. d'Orbigny ayant eu la complaisance de me prêter les échantillons Boliviens sur lesquels il a créé son *P. Capacii*, j'ai pu m'assurer qu'ils ne différaient par aucun caractère suffisant de ceux d'Europe et que cette espèce ne peut être conservée. Il en est de même du *P. tubarius* de M. de Keyserling. Tous les caractères de ce *Productus*, sauf la réunion des tubes en forme de bande transverse, sont tellement identiques avec ceux de la variété qui se trouve à Tournay, qu'il m'est impossible de l'en séparer. Il suffit d'ailleurs pour s'en convaincre, de comparer les figures 2 *b* et 2 *c* de la planche X, aux figures 2 *e* et 2 *f* de la même planche. Enfin, je comprends encore sous le même nom, le *P. spinosus*, Sow. que M. de Verneuil semble vouloir de préférence réunir au *P. semireticulatus*; mais que je considère comme une variété, qui, semblable à celle de Tournay, est à peine sinuée. C'est probablement cette même variété que M. Phillips a désignée sous le nom de *P. setosus* et que Leveillé a confondue avec le *P. hemisphæricus*, lequel n'a jamais été rencontré dans les couches carbonifères du Tournaisis.

Gis. et loc. Le *P. Flemingii* n'est pas rare dans le calcaire carbonifère de Visé et dans l'argile carbonifère de Tournay. Il est moins abondant à Feluy, aux Ecaussinnes, à Chanxe, à Chokier et à Lives près de Namur. J'en possède des échantillons de Ratingen près de Dusseldorf, d'Altwasser en Silésie, du schiste carbonifère du Boulonnais, du calcaire carbonifère de Hesham dans le Cumberland, du Northumberland, du Sunderland et de l'Irlande. Mes meilleurs échantillons m'ont été fournis par MM. Krantz et Böhmer à Berlin et proviennent du calcaire argileux et tendre des environs de Karova, gouvernement de Kalouga. D'autres ont été recueillis à Rjef et à Botcharova sur le Volga, gouvernement de

Twer, à Diaezina, dans le pays des Cosaques du Don. M. de Verneuil le cite en outre à Kopatcheva sur la Dwina; sur les bords de la rivière Bielaia près de la mer glaciale; à Alexine et à Serpoukof sur l'Oka; dans la contrée du Donetz à Lissichi-Balka et à Pietnaz. En Russie, il est souvent associé au *S. Sowerbyi* et au *P. semireticulatus* et y caractérise assez bien l'étage carbonifère moyen. M. de Keyserling l'a rapporté des bords de la Belaja de la Soiwa et de l'Ylytsch. M. Paillette l'a trouvé en Espagne dans le système carbonifère de Pola de Lena et de Mierès del Camino. Enfin, je dois à M. Roemer quelques échantillons de cette espèce des bords du Missouri et à M. A. d'Orbigny quelques autres de Yarbichambi situé sur les bords du lac de Titicaca sur le plateau Bolivien des Andes. M. Leichardt a expédié au Muséum d'Histoire naturelle de Paris des échantillons qu'il a recueillis dans un grès carbonifère d'un gris verdâtre, à Carrocreek dans l'Ile de Van Diemen et que M. Rouault a eu la complaisance de mettre à ma disposition.

Explication des figures. Pl. X, Fig. 2, *a.* Echantillon provenant des bords de l'Ylytsch (var. *tubarius*), ayant perdu une partie de son test, vu du côté de la valve dorsale. De la collection de M. de Verneuil.

Fig. 2, *b.* Echantillon provenant de la même localité, garni de son test, vu du côté de la valve dorsale. De la collection de M. de Verneuil.

Fig. 2, *c.* Le même vu de profil.

Fig. 2, *d.* Le même vu du côté du crochet.

Fig. 2, *e.* Individu provenant de l'argile carbonifère de Tournay, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 2, *f.* Le même vu de profil.

Fig. 2, *g.* Individu provenant du calcaire de Karova, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 2, *h.* Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 2, *i.* Le même vu du côté du crochet.

Fig. 2, *k.* Echantillon en partie restauré, provenant de l'argile carbonifère de Tournay, muni de ses tubes, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 2, *l.* Intérieur d'une valve ventrale provenant du calcaire carbonifère de Karova, grossi du double. De ma collection.

Fig. 3, *h.* Section longitudinale de l'échantillon représenté sous la Fig. 2, *g*, afin de montrer la courbure de la valve ventrale.

25. PRODUCTUS CARBONARIUS.

PL. X, FIG. 4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Productus carbonarius. DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 181, pl. 12bis, fig. 1, *a*, *b*, *c*.

— — DE VERN. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 271, pl. 16, fig. 2.

Cette coquille d'assez petite taille, presqu'aussi longue que large, se distingue par la finesse de ses côtes et le nombre considérable de tubes étroits et courts qui garnissent sa surface et en particulier sa partie viscérale. Valve dorsale très-gibbeuse, légèrement deprimée sur le dos et sur la partie viscérale, entièrement dénuée de sinus, à côtes rapides, donnant naissance à des oreillettes triangulaires applaties, se rattachant à la région dorsale par une courbe très-prononcée, mais régulière. La surface est ornée d'un grand nombre de côtes très-minces, assez régulières et ne se bifurquant que très-rarement sur le prolongement antérieur; dans le premier tiers de leur longueur, ces côtes sont traversées par un petit nombre de plis transverses très-peu prononcés; elles y sont en outre hérissées d'un nombre assez considérable de petits tubes très-frêles et très-caduques de 2 à 3 millimètres de long et ne laissant exister après leur chute que des traces peu visibles à l'œil nu. Un groupe de tubes semblables orne la surface de chacune des oreillettes, mais aucun de ces tubes, bien que situés très-près du bord cardinal, ne se trouve placé immédiatement sur son arête; quelques autres sont irrégulièrement dispersés sur le prolongement antérieur. Le crochet est petit et pointu et dépasse peu le bord cardinal. La partie viscérale de la valve dorsale se compose d'un disque entièrement plane et se recourbe perpendiculairement sur elle-même pour former le prolongement antérieur, qui suit de bien près celui de la valve dorsale (PL. X, FIG. 4, *e*).

Dimensions. Longueur 20 millimètres. Par rapport à la longueur, la largeur, la hauteur et l'épaisseur sont = 100 : 115 : 60 : 42. — *Côtes.* A 10 millimètres du crochet on en compte 20 à 22 dans un espace de 10 millimètres.

Rapports et différences. Ce joli *Productus* se distingue facilement du *P. semireticulatus* dont il se rapproche par la forme de sa valve dorsale, par la différence dans sa taille et dans l'épaisseur de ses côtes et surtout par le nombre, la régularité la minceur et le peu de longueur des tubes de sa partie viscérale et de ses oreillettes.

Gis. et loc. J'ai recueilli ce *Productus* dans les rognons calcaires qui accompagnent le schiste alunifère de Chokier. Il y est très-rare et associé à une quantité innombrable de *Goniatites Diadema*, Goldf. Il caractérise l'étage supérieur du système carbonifère. M. de Verneuil le cite du calcaire carbonifère de la vallée de la Prikcha (Valdaï) où il se trouve aussi dans le voisinage des couches de combustible.

Explication des figures. Pl. X, Fig. 4, *a*. Individu légèrement grossi des environs de Chokier, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 4, *b*. Fragment du même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 4, *c*. Le même vu de profil.

Fig. 4, *d*. Le même vu du côté du crochet. Les tubes paraissent se trouver sur l'arête du bord cardinal, tandis que sur l'échantillon même ils sont situés à une petite distance, mais cette différence est difficile à rendre par le dessin.

Fig. 4, *e*. Section longitudinale du même, afin de montrer la direction de la valve ventrale.

E. *PRODUCTI SPINOSI.*

26. PRODUCTUS SUBQUADRATUS.

Pl. XIV, Fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*.

Productus subquadratus. Morris. 1845. *Phys. descript. of New South Wales and v. Diemen's land, by* Strzelecki. p. 284.

Coquille de taille moyenne, peu transverse, subtetragonale, non lobée, assez gibbeuse. Valve dorsale régulièrement voûtée et ré-

courbée sur elle-même, à surface garnie d'un grand nombre de côtes longitudinales, régulières, minces et fréquemment interrompues par la racine des tubes dont elles sont hérissées et qui sont régulièrement espacés entre eux sur la région dorsale; ces tubes sont beaucoup moins fréquents sur le bord antérieur du prolongement, mais en revanche, ils sont beaucoup plus nombreux sur les côtés et sur les oreillettes; leur direction n'est pas, comme chez la plupart des autres *Productus*, parallèle au rayon de courbure de la valve, mais oblique et inclinée en avant. Les oreillettes sont larges, applaties et séparées de la voûte dorsale par une dépression très-prononcée. Le crochet est épais, mais quoique fortement recourbé, il ne dépasse que de bien peu le bord cardinal. La longueur de ce bord diffère peu de celle du diamètre transverse de la coquille.

La valve ventrale est concave; elle est presque plane dans les deux premiers tiers de sa longueur; le dernier tiers se compose de son prolongement dont la direction est presque perpendiculaire à celle de sa partie viscérale à laquelle elle se raccorde au moyen d'une courbe assez faible. A en juger par le moule, les apophyses hépatiques de cette valve consistaient uniquement en deux callosités allongées, elliptiques, non ramifiées, séparées par une crête médiane très-prononcée occupant à peu près la moitié de la longueur totale de la valve. Un nombre considérable de petites pointes s'étendent en demi cercle autour des apophyses hépatiques; au delà de cette bande la surface est couverte de petites granulations (PL. XIV, FIG. 1, *d.*). Les apophyses du foie de la valve dorsale n'ont pas dû être moins simples que celles de la valve ventrale; sur le moule on les distingue à peine des parties adjacentes; il en est de même des impressions musculaires; toute la surface du moule, sauf les bords antérieurs et latéraux est traversée de sillons longitudinaux irréguliers, qui n'ont pu être formés que par des lamelles saillantes à l'intérieur, mais on n'y remarque aucune trace de tube, tandis que ces traces subsistent sur les parties privées de sillons, (PL. XIV, FIG. 1, *c.*).

Dimensions. Longueur 40 millimètres; rapport de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 115 : 62 : 36.— *Côtes.* A 20 millimètres du crochet on en compte 32 à 35 dans un espace de 20 millimètres.

Rapports et différences. Je ne suis pas entièrement convaincu de la réalité de cette espèce et je ne l'adopte provisoirement qu'en faisant mes reserves pour l'avenir. Je suis fortement porté à croire

qu'elle est identique avec le *P. brachythœrus ;* à en juger d'après quelques échantillons que j'en ai vus et d'après celui que je possède, il ne serait pas impossible que ce dernier eût été créé sur des individus dont le test avait perdu son épiderme et qui parconséquent ne possédaient pas tous les caractères qui peuvent servir à le faire reconnaître. Je suis obligé de suspendre mon jugement à cet égard, par la raison que les fossiles de l'Australie étant très-rares dans les collections, je n'ai pas pu en rassembler un assez grand nombre pour me décider d'une manière définitive. Le doute que j'exprime ici est d'autant plus fondé, que les deux espèces ne diffèrent entre elles par aucun caractère important, abstraction faite des côtes qui garnissent la surface du *P. subquadratus.* Aucune autre espèce ne peut être confondue avec ce dernier.

Gis. et loc. Jusqu'ici le *P. subquadratus* n'a été rencontré que dans les couches carbonifères de l'Ile de Van Diemen. Il y est renfermé dans un grès verdâtre très tendre, contenant des galets roulés, du Mont Dromedary, du Mont Wellington (Strzelecki) et de Glendon (Leichardt).

Explication des figures. Pl. XIV, Fig. 1, *a.* Individu restauré, vu du côté de la valve dorsale. De la galerie de Minéralogie du Muséum de Paris.

Fig. 1, *b.* Le même vu de profil.

Fig. 1, *c.* Moule intérieur, vu du côté de la valve dorsale.

Fig. 1, *d.* Autre moule intérieur, vu du côté de la valve ventrale.

27. PRODUCTUS SPINULOSUS.

Pl. XI, Fig. 2, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Productus spinulosus. J. Sow. 1812. *Min. conch.* vol. I, p. 154, pl. 68, fig. 3, non Phill., v. Buch, nec de Kon.

— — Krueger. 1825. *Urw. Naturg. der organ. Reiche.* vol. II, p. 216.

— — Defr. 1826. *Dict. des sc. nat.* vol. XLIII, p. 349.

Leptæna spinulosa. Dalman. 1827. *Kongl. Vetensk. Akadem. Handl.* p. 94.

Productus spinulosus. Flem. 1828. *Brit. anim.* p. 378.

Productus spinulosus. DUMONT. 1832. *Const. géol. de la prov. de Liége*, p. 354.

— — DAVREUX. 1833. *Const. geogn. de la prov. de Liége.* p. 272.

— — DESOR. 1840. *Trad. de la Min. conch. de* SOW. p. 105, pl. 50-68, fig. 5 et 6.

— *Cancrini.* DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 179, pl. 9, fig. 3, *a*, *b*, non MURCH. DE VERN. et *de* KEYS.

Producta spinulosa. M'COY. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 115.

Productus Koninckianus. DE VERN. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 253 et 274.

— — DE KEYSERL. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 203, pl. 4, fig. 4, 4 *a*, 4, *b*, et 4 *c*.

Cette petite coquille un peu plus longue que large est très bombée et privée de sinus médian. La valve dorsale est fortement recourbée sur elle-même et tellement renflée dans son milieu, que son contour dans le sens de la largeur, décrit une section d'ellipse, à laquelle le bord cardinal sert de petit axe (PL. XI, FIG. 2, *c.*) ; elle atteint sa plus grande hauteur avant le milieu de son complet développement ; son bord cardinal est un peu plus court que son diamètre transverse. Le crochet quoique gibbeux, ne se projette que peu au delà du bord cardinal. Les oreillettes sont très-petites, très-minces, ornées de trois ou quatre petits plis qui s'effacent sur les côtés et qui à leur origine donnent naissance à autant de tubes minces et fragiles. La surface est entièrement couverte de côtes très-minces et très-régulières ; elles conservent à peu près le même diamètre sur toute leur longueur et se multiplient principalement sur les côtés, par implantation de côtes nouvelles. Ces côtes sont interrompues de distance en distance, par la racine de petits tubes assez régulièrement distribués en quinconce et produisant chacune un petit renflement ou monticule à base circulaire, très-perceptible à l'œil nu (PL. XI, FIG. 2, *c.*), mais dont la présence n'altère en rien leur régularité et leur direction. La valve ventrale est très-concave et forme une courbe régulière dès son origine ; elle se rapproche de très-près de la valve dorsale et ne laisse qu'un espace très-limité entre elles ; sa surface est couverte de côtes semblables à celles qui ornent la surface de la valve opposée, mais elles

sont entièrement lisses ; on y aperçoit même à peine les petites fossettes correspondant aux tubercules que j'ai signalés sur la valve dorsale (1).

Dimensions. Longueur, 16 millimètres. Rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 76 : 62 : 19. — *Côtes.* A dix millimètres du crochet on en compte environ 30 dans un espace de cinq millimètres ; ce même espace comprend ordinairement trois, quelquefois quatre tubes situés sur une même ligne.

Rapports et différences. Sur une observation de M. de Verneuil j'ai cru pendant quelquetemps avec lui, que ce *Productus* était identique avec celui que ce savant paléontologiste de concert avec Sir Roderick Murchison et M. le Comte de Keyserling, avait dédié à M. le comte de Cancrin, pendant leur voyage en Russie, quoique ce dernier s'en éloignat par plusieurs caractères bien tranchés. Outre cette erreur qui nous était commune, j'ai pu me convaincre par une lecture plus attentive de la description du *P. spinulosus* qui est une des meilleures que Sowerby ait faites, que j'en ai commis en même temps deux autres, en considérant comme nouvelle une espèce déjà connue et en décrivant sous son nom, une autre espèce qui en est très-distincte (*P. undiferus*). Le nom de *P. Koninckianus* que MM. de Verneuil et Keyserling ont eu l'obligeance de proposer pour ce même *Productus* qui a été l'objet de la confusion que je viens de signaler, doit aussi être supprimé. Les principales différences qui distinguent cette espèce du *P. Cancrini*, consistent dans la forme applatie et moins allongée de la valve ventrale de ce dernier, dans la forme et la largeur de ses côtes et dans la moindre courbure de son crochet. Le *P. spinulosus*, abstraction faite des tubes de sa surface, est une véritable miniature du *P. Cora*. Il se distingue du *P. arcuarius* par la présence de ses tubes et l'absence du sillon transversal qui partage la valve dorsale de ce dernier en deux parties égales. Les espèces figurées par MM. de Buch et Phillips sous le nom de *P. spinulosus* étant entièrement dénuées de côtes longitudinales, ne peuvent être assimilées à celle de Sowerby ; il est assez probable que M. M'Coy, dont la description ne fait pas mention de côtes longitudinales, a aussi confondu ce *Productus* avec une espèce voisine.

Gis. et loc. Jusqu'ici on ne connait que trois localités où le

(1) Cependant Sowerby dit expressément y avoir remarqué des tubes et les a même representés sur la figure qui accompagne la description de ce *Productus*.

P. spinulosus ait été trouvé, mais elles sont situées à des distances assez considérables l'une de l'autre. Sowerby l'a découverte dans le calcaire carbonifère de Linlithgow en Ecosse, moi-même je l'ai recueillie dans le calcaire de Visé et M. le comte de Keyserling l'a rapportée du calcaire carbonifère des bords de la Soiwa, affluent de la Petschora. Il est rare partout.

Explication des figures. PL. XI, FIG. 2, *a*. Individu provenant de Visé, légèrement grossi, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG 2, *b*. Le même vu de profil.

FIG. 2, *c*. Le même vu du côté du crochet.

FIG. 2, *d*. Autre échantillon provenant de la même localité, montrant une partie du moule extérieur de la valve ventrale. De ma collection.

FIG. 2, *e*. Partie grossie de la surface extérieure de la valve dorsale.

28. PRODUCTUS CANCRINI.

PL. XI, FIG. 3, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Productus spinosus. KUTORGA. 1842. *Verhandl. der K. russ. miner. Gesells. zu St.-Pétersb.* p. 18, pl. 5, fig. 2; *a*, *b*, *c*, non SOW.

— *Cancrini.* MURCH., DE VERN., DE KEYSERL. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 273, pl. 16, fig. 8, *a*, *b* et pl. 18, fig. 7, non DE KON.

— *punctatus.* E. ROBERT. 1845. *Atlas de la géol. des voyages de la comm. scient. du Nord.* pl. 19, fig. 1, non MART.

— *Cancrini.* DE KEYSERL. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 205, pl. 9, fig. 7 et 7 *a*.

Coquille presqu'aussi large que longue, assez fortement bombée et d'une taille médiocre. Valve dorsale très-convexe, régulièrement voûtée et dénuée de sinus médian, à côtés repliés presque perpendiculairement. Oreillettes petites, déprimées, très-fragiles, garnies

de quelques tubes et selon M. de Verneuil, terminées à leur extrémité par un pli anguleux. Bord cardinal toujours un peu plus court que le diamètre transverse. Crochet petit, court, renflé et dépassant à peine le bord cardinal. La surface est ornée de côtes longitudinales minces, dichotomes conservant à peu près le même diamètre sur toute leur longueur. De la réunion de deux ou de trois de ces côtes il nait un grand nombre de tubercules allongés et grossièrement disposés en quinconce, servant de base à autant de tubes cylindriques, minces et nacrés, ayant jusqu'à 12 à 16 millimètres de longueur. Ceux de ces tubes qui hérissent la partie médiane de la valve sont fortement inclinés en avant et presque couchés sur la surface, tandis que les tubes latéraux possèdent une direction perpendiculaire à celle des côtés. C'est peut être au rapprochement plus considérable de ces derniers que doit être attribuée la différence dans leur direction. De nouvelles côtes se forment en déçà des tubercules, mais toujours à une petite distance de leur extrémité antérieure.

La valve ventrale est composée d'après M. de Keyserling, d'un disque viscéral plat ou faiblement concave, orné de rides concentriques et d'un prolongement antérieur dont la direction est perpendiculaire à celle du premier (Pl. XI, Fig. 3, *f.*). Il est probable que cette conformation n'appartient qu'aux individus adultes, car je ne l'ai pas retrouvée sur l'unique échantillon de ma collection, dont la valve ventrale soit visible et chez lequel elle m'a parue regulièrement mais faiblement concave. M. de Verneuil fait observer que ce disque ressemble, sauf la finesse de ses côtes, à la valve ventrale d'un jeune *P. semireticulatus* et que c'est sans doute une valve semblable que M. Blasius a trouvée à Kirilof et qu'il a désignée sous ce dernier nom.

Dimensions. Longueur 20 à 26 millimètres. Rapport de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 10 : 90 : 52 : 35. — *Côtes.* A dix millimètres du crochet, on en compte vingt à vingt cinq dans un espace de dix millimètres.

Rapports et différences. J'ai déjà eu occasion de faire observer que ce *Productus* se rapproche beaucoup de l'espèce précédente, à laquelle moi et M. de Verneuil l'avons même assimilé pendant quelque temps. M. Kutorga l'a décrit et figuré sous le nom de *P. spinosus*, Sow., mais cette espèce, que je considère comme une variété du *P. Flemingii*, a des côtes beaucoup plus larges, plus régulières et bien moins hérissées de tubes. Le *P. Villiersi*, est de

toutes les espèces que je connais, celle qui lui ressemble le mieux; néanmoins il ne peut lui être réuni, à cause de la différence dans l'épaisseur des côtes et dans le nombre des tubes qui garnissent la surface de l'un et de l'autre. Selon M. de Verneuil le *P. spiniferus*, KING, espèce inédite du *Magnesian limestone* de Humbleton, ne s'en distingue que par sa forme moins gibbeuse et par ses côtes irrégulières et discontinues (1). Le même paléontologiste dit avoir reconnu parmi les fossiles des dépôts houillers et gypseux de la Nouvelle-Ecosse, aux Etats-Unis, dont M. Lyell lui a communiqué les fossiles, des *Productus* assez voisins du *P. Cancrini*, mais qui en diffèrent en ce que les épines plus clairsemées, naissent sur une seule côte et ne laissent en tombant ni tronçons, ni tubercules allongés.

Gis. et loc. Selon M. de Verneuil, cette petite coquille est très-caractéristique du système permien dans toute la Russie Européenne et sous le point de vue géologique une des espèces les plus intéressantes du genre; son importance est comparable à celle du *P. giganteus* dans l'étage inférieur du système carbonifère. Elle abonde particulièrement dans les calcaires et les grès rougeâtres, qui forment avec les gypses l'étage inférieur du vaste dépôt permien. Son importance s'est encore accrue dernièrement, par la découverte que j'en ai faite parmi les fossiles rapportés par M. E. Robert de la rade de Bell-Sound au Spitzberg et recueillis par lui dans un calcaire magnésien d'un gris foncé, que tous les géologues rapportaient au calcaire carbonifère, malgré le dépôt de gypse qui l'accompagne. La présence du *P. Cancrini* dans ce calcaire, où il est associé aux *P. horridus* et *Leplayi*, lève toute incertitude à l'égard du système géologique auquel il appartient et l'assimile complètement à l'étage inférieur du vaste dépôt permien dont il n'est probablement qu'un lambeau. Sir Roderick Murchison et MM. de Verneuil et de Keyserling ont trouvé cette espèce dans les localités suivantes en commençant par le Nord : à Kicherma, sur la rivière Wel, gouvernement de Wologda; sur les bords de la rivière Ouchta affluent du Wim; à Chidrova, près de l'embouchure de la Vaga dans la Dwina; dans les environs d'Arzamas; à Kniaspavlova, sur le chemin d'Itschalki à Barnoukova; à Sviask et à Cliut-

(1) Comme ces deux derniers caractères appartiennent aussi au *P. Cancrini*, il ne serait pas impossible que l'espèce de M. King n'en fut qu'une variété.

ziski sur le Volga, audessus et audessous de Kasan; à Tchistopol et à Jelabuga vers l'embouchure de la Kama; dans les couches arénacées et calcaires qui sont à la base des grès cuprifères dans tout le pays compris entre l'Ufa, la Kama et le Volga, comme par exemple, à Nikefur ou Nikiforova; à Iltchegulova; à Meteftamak; à Santangulova; sur la rivière Kidash, près de Nijni-Troïsk, district de Bielebei; enfin à Sergiesk à l'Est de Samara. Le lieutenant de Kokcharof assure l'avoir aussi trouvé à Grebeni, près d'Orenbourg. M. Schrenk l'a recueilli à Ust-Jochuga sur la Pinega. Selon ces mêmes savants, le *P. Cancrini* ne paraît pas s'élever dans la partie supérieure des dépôts permiens et ils ne l'ont jamais vu dans le centre de l'immense area qu'occupe cette formation.

Explication des figures. Pl, XI, Fig. 3, *a*. Individu provenant d'Ust-Joschuga, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 3, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 3, *c*. Le même vu de profil, afin de montrer la direction des tubes médians.

Fig. 3, *d*. Le même vu du côté du crochet.

Fig. 3, *e*. Moule extérieur d'une valve dorsale. D'après M. de Keyserling.

Fig. 3, *f*. Le même vu de profil.

29. PRODUCTUS VILLIERSI.

Pl. XI, Fig. 1, *a*, *b*, *c*.

Productus Villiersi. A. d'Orb. 1842. *Paléont. du voyage dans l'Amér. mérid.* p. 53, pl. 4, fig. 12 et 13.

Cette coquille est assez petite, peu bombée et presque aussi large que longue. La valve ventrale n'est pas sinuée, régulièrement voûtée et assez faiblement recourbée sur elle-même. Son crochet est petit et ne dépasse pas le bord cardinal. Sa surface est couverte d'un grand nombre de côtes longitudinales, minces, régulières et dichotomes. Des tubercules allongés semblables à ceux de l'espèce précédente, et resultant soit de l'anastomose de deux côtes, soit du renflement d'une seule, y sont irrégulièrement distribués. Aucun

intervalle ne sépare l'extrémité antérieure de ces tubercules des nouvelles côtes qui surgissent en dessous d'elle. La longueur et l'épaisseur de ces tubercules ne sont pas plus soumises aux lois de symétrie que leur distribution. Valve ventrale et oreillettes inconnues.

Dimensions. Longueur 15 millimètres. Par rapport à la longueur, largeur 93, hauteur 53. — *Côtes.* A dix millimètres du crochet on en compte douze dans un espace de cinq millimètres.

Rapports et différences. Ce *Productus* auquel M. A. d'Orbigny a assimilé le *P. Cancrini* se distingue de celui-ci par une épaisseur un peu plus considérable de ses côtes, par une courbure moins prononcée de sa valve dorsale, par l'irrégularité dans la forme et la distribution de ses tubercules et surtout par la continuité de ses côtes longitudinales.

Gis. et loc. On ne connaît encore qu'un seul échantillon de cette jolie espèce. Il a été recueilli par M. A. d'Orbigny dans le calcaire carbonifère de Yarbichambi, sur le plateau Bolivien et m'a été confié pendant quelque temps par ce savant paléontologiste.

Explication des figures. PL. XI, FIG. 1, *a*. Individu vu du côté de la valve dorsale. De la collection de M. A. d'Orbigny.

FIG. 1, *b*. Le même vu de profil.

FIG. 1, *c*. Portion grossie du même.

30. PRODUCTUS SPINIFERUS.

Productus spiniferus. KING. 1845. *Russia and the Ural mount. by* MURCH. DE VERN. and DE KEYSERL. vol. II, p. 253 et 274.

D'après M. de Verneuil cette espèce établie par M. King et encore inédite, serait très-voisine du *P. Cancrini* dont elle se distinguerait néanmoins par sa forme moins gibbeuse et par ses côtes irrégulières et interrompues. Comme elle se trouve à Humbleton dans un dépôt contemporain à des dépôts dans lesquels a été découvert le *P. Cancrini*, il ne serait pas impossible qu'elle n'en fut qu'une variété, d'autant plus que les caractères distinctifs donnés par M. de Verneuil se retrouvent chez des individus recueillis dans des dépôts permiens de la Russie.

31. PRODUCTUS TESSELLATUS.

Pl. XIV, Fig. 2, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*.

Productus muricatus. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 192, pl. 9, fig. 2, *a*, *b*, *c* et pl. 13bis, fig. 5, *a*, *b*, non Phill.

Cette petite coquille est ordinairement un peu plus longue que large, très-gibbeuse et dénuée de sinus médian. Valve dorsale très-bombée, subglobuleuse, à côtés fortement inclinés, mais rattachés à la région dorsale par une courbe régulière ; son contour dans le sens de sa largeur forme à peu près un demi cercle parfait. Son crochet est pointu, recourbé sur lui-même et proéminent. Le bord cardinal est un peu plus court que le diamètre transverse. Les oreillettes sont très-petites, déprimées, très-minces, très-caduques et assez nettement détachées de la voûte dorsale. La surface est garnie de 15 à 20 côtes longitudinales, épaisses, arrondies, très-rarement dichotomes et s'élargissant au fur et à mesure de leur accroissement. Ces côtes sont interrompues de distance en distance par des sillons transverses assez profonds et dont le nombre est à peu près le même que celui des côtes. Ces interruptions donnent ordinairement lieu à la formation de tubercules épais, le plus souvent oblitérés, mais ayant probablement servi de base à des tubes; souvent le bord antérieur du pli transverse se transforme en une expansion lamelleuse, irrégulièrement plissée, relevée sur ses bords et semblable à celle qui entoure certaines *Terebratula* (Pl. XIV, Fig. 2, *e*, *f*.). La valve ventrale n'est pas moins remarquable que la valve dorsale. Elle est toujours applatie, légèrement concave et régulièrement treillissée ; chez certains individus, ses bords antérieurs et latéraux possèdent une expansion semblable à celle qui se manifeste quelquefois sur la valve dorsale, mais au lieu de s'étendre circulairement autour de la valve, elle se replie complètement sur elle-même en se plissant d'une manière très-irrégulière, vient cacher à la vue la plus grande partie de la valve qui lui donne naissance, et ne laisse apercevoir qu'une petite surface quarrée, située en dessous du crochet (Pl. XIV, Fig. 2, *g*, *h*.).

Dimensions. Longueur 12 à 15 millimètres. Rapport de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 93 : 67 : 56. — *Côtes.* Au nombre de 15 à 20 pour toute la surface.

Rapports et différences. En 1843 j'ai assimilé ce *Productus* au *P. muricatus*, PHILL., tout en faisant mes reserves. Depuis cette époque, j'ai pu m'assurer que ma première détermination était loin d'être exacte, et que le doute que j'avais exprimé relativement à l'identité de ces deux espèces, était très-fondé. Dès lors, ne connaissant aucune espèce à laquelle ce *Productus* put être rapporté, j'ai du le considérer comme nouveau. Par la largeur de ses côtes il se rapproche un peu du *P. costatus*, dont il diffère par la forme de sa valve ventrale et par ses sillons transverses.

Gis. et loc. J'ai découvert cette espèce dans le calcaire carbonifère de Visé. Elle y est assez rare.

Explication des figures. PL. XIV, FIG. 2, *a*. Individu vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 2, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 2, *c*. Le même vu de profil.

FIG. 2, *d*. Le même vu du côté du crochet.

FIG. 2, *e*. Autre individu garni de son expansion, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 2, *f*. Autre individu aussi garni de son expansion, vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

FIG. 2, *g*. Autre individu garni de l'expansion repliée de la valve ventrale, vu du côté de cette valve. De ma collection.

FIG. 2, *h*. Le même vu de profil, afin de montrer la direction de l'expansion.

32. PRODUCTUS SCABRICULUS.

PL. XI, FIG. 6, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Anomites scabriculus. MARTIN. 1809. *Petrif. Derb.* p. 8, pl. 36, fig. 5.

Productus — SOW. 1812. *Min. conch.* vol. I, p. 157, pl. 69, fig. 1.

— — KRUEGER. 1825 *Urweltl. Naturg.* vol. II, p. 216.

Productus scabriculus. Defr. 1826. *Dict. d. sc. nat.*, vol. XLIII, p. 350.

— *scabriusculus.* Flem. 1828. *Brit. anim.* p. 378.

Leptæna scabricula. Klöden. 1834. *Verst. der Mark Brandenb.* p. 180.

Productus scabrinus. Keferst. 1834. *Naturg. des Erdk.* vol. II, p. 666.

— *scabriculus.* Desh. 1836. 2^me^ *édit. des Anim. sans vert.* de Lamarck, vol. VII, p. 383.

Producta scabricula. Phill. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 214, pl. 8, fig. 2 (exclusâ fig. 20).

— *quincuncialis.* Id. *Ibid.* p. 214, pl. 7, fig. 8.

Leptæna scabricula. Fischer. 1837. *Oryct. du gouv. de Moscou.* p. 143.

Productus scabriculus. Desor. 1840. *Trad. de la Min. conch. de* Sow. p. 106, pl. 51-69, fig. 1 et 2.

— *antiquatus.* v. Buch. 1841. *Abhandl. der Königl. Akad. der Wissens. zu Berlin*, Theil I, p. 29, non Mart.

— *scabriculus.* de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 190, pl. 11, fig. 3, *a*, *b*.

Leptæna scabricula. Fahrenkohl. 1844. *Bullet. de la soc. imp. des nat. de Moscou*, vol. XVII, p. 784.

Producta — M'Coy. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 114.

— *quincuncialis.* Id. *Ibid.* p. 114.

Productus Corbis. Potiez et Michaud. 1844. *Galer. des mollusq. du Mus. de Douai*, vol. II, p. 26, pl. 41, fig. 2.

— *scabriculus.* de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 271, pl. 16, fig. 5 et pl. 18, fig. 5, *a*, *b*, *c*.

Coquille à peu près aussi longue que large, subrectangulaire, à bords faiblement courbés et subparallèles. Valve dorsale gibbeuse, déprimée dans son milieu et ordinairement garnie d'un sinus médian très-large et peu profond, qui chez les adultes s'efface complètement avant d'atteindre le bord antérieur. Le crochet est pointu, quoique renflé à une petite distance de son extrémité, recourbé et

projeté un peu au delà du bord cardinal. Les oreillettes sont petites, applaties, peu distinctes et terminées par un angle obtus à leur extrémité; elles sont traversées par des plis irréguliers, mais bien prononcés qui vont se perdre sur les côtés. Les côtes longitudinales qui couvrent la surface, sont assez épaisses et séparées entre elles par des sillons profonds; elles se bifurquent assez rarement et sont remarquables par les renflements alternatifs qu'elles éprouvent et qui sont en général assez régulièrement disposés en quinconce. Ces renflements s'opèrent graduellement et donnent lieu à la formation d'un grand nombre de tubercules allongés en forme de larmes, dont l'extrémité est tournée en avant et sert de base à autant de tubes creux, qui selon M. de Verneuil ont à peu près 3 millimètres de longueur. Sur les oreillettes les côtes sont presque complètement effacées par les plis qui les traversent; c'est surtout sur ces plis que sont placés les tubes des oreillettes; la base de ces derniers est beaucoup plus arrondie que celle des tubes de la région dorsale et leur nombre y est comparativement beaucoup plus considérable. La valve ventrale est légèrement concave chez les individus de petite taille; elle l'est beaucoup plus chez les individus qui ont 7 à 8 centimètres de longueur. Les tubercules de la valve opposée y sont remplacés par des fossettes de même forme. Souvent les plis des oreillettes y sont plus étendus. Les échantillons qui ont conservé leur test, y offrent aussi quelques traces de tubes; ces traces se trouvent principalement sur les oreillettes et vers le bord antérieur.

Dimensions. Les dimensions de cette espèce paraissent être assez variables. Tandis qu'en Angleterre les plus grands échantillons atteignent à peine 4 centimètres de longueur, il s'en trouve en Belgique qui ont plus du double de cette longueur. Le rapport de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 105 : 65 : 48. — *Côtes.* A vingt millimètres du crochet on en compte 20 à 22 dans un espace de vingt millimètres.

Rapports et différences. Je n'ai jamais pu saisir des différences réelles entre le *P. scabriculus* et le *P. quincuncialis.* Je pense avec M. de Verneuil, que ce serait à tort que l'on croirait pouvoir distinguer ces *Productus* par la présence ou l'absence d'un sinus; car si, comme le disent MM. Phillips et M'Coy, la valve dorsale du *P. scabriculus* possède un large sillon médian, tandis que celle du *P. quincuncialis* en est entièrement privée, on voit ces différences s'effacer graduellement quand on rassemble un grand nombre d'échantillons. Les caractères tirés de la forme des tubercules ou des

côtes et de la présence de quelques rides concentriques sur la partie dorsale ne soutiennent pas non plus un examen sérieux. Selon certains auteurs, le *P. quincuncialis* possède des côtes continues dont les tubercules obtus et perforés antérieurement, ne sont que le résultat de renflements irréguliers, tandis que chez le *P. scabriculus* ils sont isolés, fusiformes et perforés dans leur milieu. Mais ces différences que j'ai cherché à rendre sensibles par les figures 6*a* et 6*c* de la planche XI, ne se retrouvent que dans un certain nombre d'échantillons et s'effacent graduellement par des nombreux passages intermédiaires. Le *P. scabriculus* a beaucoup de ressemblance avec le jeune âge du *P. pyxidiformis*, qui s'en distinguera toujours par sa forme beaucoup plus transverse, par l'épaisseur et l'isolement de ses tubercules et surtout par la forme beaucoup plus plane de sa valve ventrale. Cette ressemblance disparait totalement dans un âge plus avancé. Il se rapproche aussi du *P. Humboldtii* mais il en diffère par sa hauteur et par l'épaisseur de ses tubercules et par ses côtes. C'est sans doute à défaut de bons échantillons que M. de Buch a considéré le *P. scabriculus* comme un moule intérieur du *P. semireticulatus*. Le *P. Corbis* de MM. Potiez et Michaud doit lui être assimilé. En revanche la valve ventrale que M. Phillips a figurée sous le nom de *Leptæna scabricula* (1) appartient au *P. Murchisonianus*. Une autre espèce représentée par ce même savant dans le 2^me^ volume de son ouvrage sur la géologie du Yorkshire (Pl. VIII, fig. 20), sous le nom douteux de *P. scabricula* n'est autre que le *P. pyxidiformis*..

Gis. et loc. En Belgique le *P. scabriculus* est rare partout où il se trouve. Je l'ai recueilli dans le calcaire de Visé et de Ratingen appartenant à l'étage inférieur du système carbonifère et dans celui de Comblain-au-Pont, qui appartient à l'étage moyen. Je le possède en outre de l'étage supérieur de Colebrookdale ; du calcaire d'Avesnes (département du Nord), de celui de Cork, de Kildare et de Jankarstown en Irlande ; de Clifton dans le Gloucestershire ; de Bolland dans l'Yorkshire ; de Karova, gouvernement de Kalouga. Il se trouve encore en Russie dans le calcaire de Peredki et des bords de la Msta (Valdaï) ; de Sloboda, gouvernement de Toula ; de Pietnaz près de Gossoudareva, dans la contrée du Donetz (de Verneuil) ; En Angleterre à Tideswel (Martin), à Buxton (Sowerby), à

(1) Phillips. Palæozoïc fossils of Cornwall, etc. p. 58, pl. 24, fig. 97.

Bowes et à Harelaw (Phillips). Il est probable que c'est par erreur que M. Klöden le cite des blocs erratiques des environs de Potsdam qui proviennent d'un système inférieur au système carbonifère, auquel appartient exclusivement le *P. scabriculus*.

Explication des figures. Pl. XI, Fig. 6, *a*. Individu provenant de Colebrookdale, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 6, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 6, *c*. Individu provenant du calcaire du Yorkshire, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 6, *d*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 6, *e*. Le même vu du côté du crochet.

Fig. 6, *f*. Le même vu de profil.

F. *PRODUCTI FIMBRIATI.*

33. PRODUCTUS HUMBOLDTII.

Pl. XII, Fig. 2, *a*, *b*, *c*.

Productus Humboldtii. A. d'Orb. 1842. *Paléont. du voyage dans l'Amér. mérid.* p. 54, pl. 5, fig. 4 à 7.

— — ? de Keyserl. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 201, pl. 4, fig. 3 et 3 *a*.

Coquille de taille moyenne, déprimée et presque aussi longue que large. Valve dorsale faiblement bombée, divisée par un sinus médian très-large et peu profond, dont l'origine est située à une petite distance du crochet, mais qui se prolonge jusqu'au bord antérieur. Le crochet est petit, peu recourbé et dépasse à peine le bord cardinal. Les oreillettes sont petites et séparées de la région dorsale par une légère dépression ; elles sont traversées par des rides dont quelques-unes s'étendent jusque sur la partie médiane. La surface est totalement couverte de petits tubercules régulièrement disposés en quinconce. Chacun de ces tubercules qui sont allongés, effilés à leur origine et obtus à leur extrémité antérieure, est perforée et a servi de base à un tube mince et cylindrique, très-court et couché en

avant : ils ne sont pas tous d'une égale longueur et d'un même diamètre. Ceux qui sont insérés sur les bords des individus adultes sont toujours plus petits et plus minces que ceux qui se trouvent sur le milieu de la valve. La valve ventrale est plane ou très-légèrement concave. Le bourrelet qui correspond au sinus de la valve opposée y est à peine sensible. La surface est ornée de petites fossettes allongées, entre lesquelles surgissent quelques tubes très-fragiles, que l'on n'aperçoit que sur des échantillons qui ont conservé leur test.

Dimensions. Longueur, 30 à 35 millimètres. Rapport de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 110 : 42 : 36.

Rapports et différences. Je conserve quelques doutes sur l'identité de cette espèce avec celle que M. de Keyserling lui a assimilée ; mais comme je ne possède pas cette dernière, je ne veux pas me prononcer à cet égard, avant d'avoir eu l'occasion de la comparer avec les échantillons Américains. J'ai déjà indiqué les caractères par lesquels ce joli *Productus* se distingue du *P. scabriculus* dont il est assez voisin (1).

Gis. et loc. M. A. d'Orbigny a decouvert cette espèce dans le calcaire carbonifère du hameau de Yarbichambi, sur le plateau Bolivien des Andes. Les échantillons recueillis par M. le comte de Keyserling sont presque tous à l'état de moule et proviennent du calcaire carbonifère des bords de la Soiwa, affluent de la Waschkina près de la mer glaciale. La collection du Corps des Mines de Russie renferme cette même espèce des environs de Nishnei-Irginsk sur la pente occidentale de l'Oural. Tous ces échantillons se distinguent des échantillons Américains par la petitesse et le nombre bien plus considérable des tubercules qui couvrent leur surface.

Explication des figures. Pl. XII, fig. 2, *a*. Individu en partie restauré, provenant du calcaire de Yarbichambi, vu du côté de la valve dorsale. De la collection de M. A. d'Orbigny.

Fig. 2, *b*. Le même vu du côté de la valve dorsale.

Fig. 2, *c*. Le même vu de profil.

---

(1) Voir p. 217.

34. PRODUCTUS PYXIDIFORMIS.

PL. XI, FIG. 7 et PL. XII, FIG. 1, *a*, *b*, et PL. XVI, FIG. 2.

Producta scabricula? PHILL. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 214, pl. 8, fig. 20, non MARTIN.

Productus punctatus (partim). DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* pl. 8, fig. 1, *a*, *b* et pl. 9, fig. 6, *a*, *b* (*fig. cæteris exclusis.*).

Cette coquille est très-gibbeuse, très-transverse et l'une des plus grandes du genre. Valve dorsale très-bombée, partagée dans son milieu par un sinus profond et continu, à côtés très-rapides, arrondis et retombant presque perpendiculairement sur les bords de la valve ventrale; son contour dans le sens de sa largeur semble formé de la réunion de deux quarts de cercle qui ont le crochet pour centre. Ce crochet est pointu, peu recourbé et prolongé au delà du bord cardinal. Ses oreillettes sont très-larges, peu distinctes et rattachées à la voûte dorsale par une pente régulière; elles sont traversées par un grand nombre de plis étroits, qui s'élargissent à mesure qu'ils s'étendent sur la région dorsale de la valve, qu'ils traversent d'une manière assez irrégulière, mais non sans la rendre très-onduleuse. Toute la surface est hérissée d'un nombre très-considérable de tubercules allongés, dont la distribution n'a rien de symétrique, quoique la partie de ces tubercules qui s'est trouvée sur l'arête des plis transverses, soit celle qui est le plus souvent perforée et qui a servi de base aux tubes de la surface. Ces tubercules sont beaucoup plus serrés, plus petits et moins saillants sur les bords des individus adultes. La valve ventrale est plane, sauf deux légères dépressions latérales et obliques qui donnent lieu à un bourrelet peu élevé, correspondant au sinus de la valve opposée. Les rides concentriques dont sa surface est ornée sont moins larges et mieux prononcées que celles de la valve dorsale; les fossettes qui y remplacent les tubercules sont aussi plus petites que ceux-ci et y sont un peu plus régulièrement distribuées.

La structure intérieure de ce *Productus* est des plus remarquables. L'extrémité du crochet de la valve dorsale est garnie de stries

transverses fines et ondulées ; un peu plus avant surgissent les deux apophyses du foie qui sont allongées, arrondies à chaque extrémité, un peu plus étroites dans leur moitié antérieure et formées de la réunion de quelques lamelles dirigées dans le sens longitudinal et légèrement tortueuses ; elles sont en outre séparées l'une de l'autre par un sillon étroit, mais profond. A côté de ces apophyses se trouvent les impressions musculaires, qui ont une forme subtrapezoïdale, sont légèrement déprimées et garnies de stries obliques profondes et dichotomes. A cause de l'extrême ténuité du test, le reste de la surface reproduit en creux les ornements qui sont en relief à l'extérieur, avec cette différence qu'elle est criblée d'une infinité de petits points très-serrés, ressemblant à des piqûres d'épingle (Pl. XII, Fig. 1, *b*.). La crête médiane de la valve ventrale, servant à soutenir sa dent cardinale bifide, est très-élevée, très-tranchante et occupe plus des trois quarts de la longueur totale de la valve ; ses apophyses hépatiques sont très-développées et formées à leur base d'une callosité ovale et lisse, du centre de laquelle sortent quatre ou cinq ramifications divergentes, dirigées vers le bord cardinal ; d'autres ramifications en même nombre et de même nature, mais plus courtes et arquées, naissent sur la branche externe des premières et se dirigent presque perpendiculairement à celles-ci. Je n'ai pas remarqué des traces de callosités réniformes. La partie de la surface voisine des apophyses hépatiques est ornée de points semblables à ceux dont est criblée la surface intérieure de la valve dorsale, mais le reste en est très-finement granulé et en outre, les fossettes extérieures s'y traduisent en des séries concentriques de tubercules.

Dimensions. La longueur de ce *Productus* varie de 6 à 9 centimètres. Le rapport de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur, = 100 : 140 : 71 : 60.—A 40 millimètres du crochet, on compte dix à douze tubercules dans un espace de 20 millimètres.

Rapports et différences. Lorsqu'en 1843, je ne possédais encore que des moules internes de cette belle espèce, j'ai cru qu'ils appartenaient au *P. punctatus*. Depuis cette époque ma collection s'est enrichie de quelques échantillons dont le test est intact et j'ai pu facilement constater mon erreur. Je suis convaincu que l'échantillon figuré avec doute par M. Phillips sous le nom de *P. scabricula* doit être assimilé au *P. pyxidiformis* qui possède en effet assez d'analogie avec cette espèce, mais qui s'en s'éloigne par plusieurs caractères

que j'ai déjà indiqués (1). En Angleterre cette espèce est souvent confondue avec le *P. pustulosus* qui s'en distingue par la régularité de ses plis concentriques et par la forme de ses tubercules.

Gis. et loc. J'ai recueilli la plupart de mes échantillons dans le du calcaire carbonifère de Visé où il est rare et où il ne se rencontre guère qu'à l'état de moule intérieur. Je le possède en outre du calcaire carbonifère de Bolland dans l'Yorkshire, de Kildare et de Ballyshannon Harbour en Irlande. Il parait caractériser l'étage inférieur du système carbonifère.

Explication des figures. PL. XI, FIG. 7. Jeune individu provenant du calcaire carbonifère de Kildare, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

PL. XII, FIG. 1, *a*. Moule intérieur en partie restauré, provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

FIG. 1, *b*. Le même vu du côté du crochet.

PL. XVI. FIG. 2. Grand individu provenant du calcaire de Bolland, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

35. PRODUCTUS PUSTULOSUS.

PL. XII, FIG. 4, *a*, *b*, *c d*, PL. XIII, FIG. 1, *a* et PL. XVI, FIG. 8 et 9.

Pyxis transversim striata. CHEMNITZ. 1784. *Martini's neues syst. Conch. Cabinet*, vol. VII, p. 301, pl. 63, fig. 605 et 606, et vol. VIII, p. 69.

Producta pustulosa. PHILL. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 216, pl. 7, fig. 15.

— *ovalis.* ID. *Ibid.* p. 216, pl. 8, fig. 14.

Productus antiquatus. V. BUCH. 1841. *Abhandl. der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin*, Theil I, p. 28, pl. 2, fig. 8 (fig. 7, 9 et 12 exclusis), non J. Sow.

---

(1) Voir page 217

Productus punctatus, DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg*, p. 196, pl. 12bis, fig. 3 *(cæteris fig. exclusis)*, non MART.

Producta pustulosa. M'COY. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 113.

— *ovalis.* ID. *Ibid.* p. 112.

Productus pustulosus? DE VERN. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 276, pl. 16, fig. 11, *a*, *b*.

Coquille pouvant acquérir une assez grande taille, presque aussi longue que large, divisée dans le milieu par un sinus très-large et peu profond. La valve dorsale est assez faiblement gibbeuse et régulièrement recourbée sur elle-même. Son crochet pointu et renflé à une petite distance, dépasse le bord cardinal; il est très-souvent brisé. Le bord cardinal est un peu plus court que le diamètre transverse. Les oreillettes sont très-larges, très-applaties et terminées par un angle obtus. Souvent on distingue vers l'extrémité de cet angle un groupe formé d'un grand nombre de petits tubercules arrondis, parmi lesquels il s'en trouve ordinairement quelques-uns qui portent encore des traces des tubes aciculaires auxquels ils ont servi de base. Toute la surface est traversée de plis concentriques, assez réguliers, un peu relevés dans leur milieu et d'une largeur à peu près uniforme partout ailleurs que sur le crochet et vers le bord antérieur, où ils sont plus étroits. Sur les échantillons bien conservés ces plis sont nettement séparés les uns des autres par des sillons assez profonds et ne portent qu'une seule rangée de petits tubercules allongés, disposés le long de leur crête médiane. Ces tubercules, dont les extrémités passent très-rarement d'un pli sur un autre (PL. XVI, FIG. 9.), sont en général les seules traces qu'aient laissées subsister les nombreux tubes qui ont hérissé la surface de ce *Productus*. Quelques rares échantillons (PL. XII, FIG. 4, *d* et PL. XIII, FIG. 1, *a*) sur lesquels une partie de ces tubes a été conservée, démontrent qu'ils étaient très-minces, d'une longueur variable de 10 à 20 millimètres et qu'ils rayonnaient autour de la coquille. Ces tubes étaient secrétés, comme ceux des autres espèces, par des appendices charnus des bords du manteau; un échantillon dont une partie de la coquille a été brisée pendant la vie de l'animal, m'en a fourni une preuve irrécusable. En effet, l'animal a restauré cette partie; mais cette restauration qui n'a pu

être faite que par la surface même du manteau, ne porte plus de traces des plis tuberculeux et concentriques qui la garnissaient auparavant, tandis qu'elle se termine par un dernier pli encore garni de ses tubes, dont la secrétion lui est évidemment postérieure et ne peut en conséquence être due qu'au bord palléal (PL. XVI, FIG. 8.).

La valve dorsale n'étant que très-peu concave, laisse subsister entre elle et la valve opposée un espace très-considérable pour loger l'animal. Un large bourrelet peu saillant le partage dans son milieu. Comme elle possède le même nombre de plis concentriques que la valve dorsale, bien qu'elle soit beaucoup plus petite, ses plis sont plus étroits et ses fossettes qui correspondent aux tubercules de la valve opposée, sont plus courtes que ceux-ci, presque circulaires et disposées le long des sillons. Chez les individus bien conservés, les plis de cette valve portent des traces évidentes de tubes, mais elles sont loin d'être aussi nombreuses que celles des plis de la valve opposée (1).

Le test étant très-mince, est souvent détruit et laisse alors un moule intérieur sur lequel se reproduisent en grande partie les ornements extérieurs ; les tubercules y sont beaucoup moins saillants et ordinairement accompagnés de petites fossettes produites par les granulations de la surface interne. Les impressions musculaires ont du être très-superficielles ; elles n'ont laissé sur les moules d'autres traces que quelques stries. Les apophyses hépatiques de la valve dorsale sont saillantes, allongées, composées de la réunion d'un grand nombre de lamelles et séparées par un sillon longitudinal profond. Celles de la valve ventrale sont aussi lamelleuses, mais courtes, plus dilatées et non moins saillantes. Les callosités réniformes sont petites et ne descendent qu'un peu au delà de l'extrémité antérieure des apophyses.

Dimensions. Longueur 65 à 70 millimètres ; les rapports entre la longueur, la largeur, la hauteur et l'épaisseur sont = 100 : 120 : 75 : 59.

Rapports et différences. Ainsi que je l'ai déjà dit (page 91), Chemnitz a connu cette espèce en 1784 et l'a figurée parmi les *Pecten* (2). Mais depuis la publication et l'adoption du genre

(1) J'ai eu occasion de constater la présence de ces traces pendant l'impression même de ce mémoire et confirmer ainsi l'observation de M. de Verneuil à l'égard de cette espèce.

(2) Il sera facile de s'assurer de l'identité de l'espèce décrite par Chemnitz avec

Productus, tous les auteurs qui ont cité l'espèce décrite par Chemnitz, l'ont confondue avec le *P. punctatus*, dont elle possède à peu près la forme. En 1843 j'ai du nécessairement partager cette erreur, puisqu'à cette époque, à l'exemple de M. de Buch, j'ai considéré le *P. pustulosus* comme une simple variété du *P. punctatus*. Le petit nombre d'échantillons, presque tous réduits à l'état de moule intérieur que j'en possédais alors, n'ont pas peu contribué à me faire émettre cette opinion. Mais depuis que j'ai eu occasion d'en étudier un grand nombre d'une conservation parfaite, et que j'ai pu m'assurer que leurs caractères étaient constants, j'aurais tort de vouloir la défendre encore. Ce *Productus* se distingue facilement du *P. punctatus*, parce qu'en général sa valve ventrale est plus concave, que ses plis concentriques sont d'une largeur à peu près uniforme et qu'une seule rangée de tubercules allongés les garnit dans leur milieu. Ces mêmes caractères suffisent pour le différencier du *P. Leuchtenbergensis* dont les plis sont beaucoup plus larges, dont les tubercules sont marginaux, beaucoup plus allongés et plus épais et dont la valve ventrale est faiblement convexe, contrairement à ce qui se remarque chez toutes les autres espèces de *Productus*. Le *P. ovalis*, Phill. ne me paraît être qu'une variété de celui-ci. Je doute que l'espèce décrite sous le nom de *P. pustulosus* par M. de Verneuil (1) puisse se rapporter à celle que je viens de décrire; elle me parait avoir beaucoup plus d'analogie avec le *P. scabriculus*, dont elle pourrait bien n'être qu'une variété.

Gis. et loc. J'ai recueilli un assez grand nombre d'échantillons de ce *Productus* dans le calcaire carbonifère de Visé, de Feluy, des Ecaussines et de Chanxe, ainsi que dans le calcaire et l'argile de même formation de Tournay. En Angleterre il se trouve dans le calcaire carbonifère de Bolland et de Florence Court (Yorkshire). Je le possède en outre du calcaire carbonifère d'Easky, de Blarath (Irlande) et de Ratingen (Prusse).

Explication des figures. Pl. XII, Fig. 4, *a*. Individu adulte provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

---

le *P. pustulosus*, par la comparaison des figures que cet auteur en a données avec les figures 4 *a* et 4 *b* de la planche XII.

(1) Russia and the Ural mountains, vol. II, p. 276, pl. 16, fig. 11, *a*, *b*.

Fig. 4, *b*. Le même vu du côté opposé.

Fig. 4, *c*. Le même vu de profil.

Fig. 4, *d*. Moule intérieur déformé, provenant de la même localité, montrant quelques-uns des tubes dont sa surface a été hérissée. De ma collection.

Pl. XIII, Fig. 1, *a*. Autre moule intérieur provenant de la même localité, montrant aussi quelques tubes de sa surface. De ma collection.

Pl. XVI, Fig. 8. Individu provenant de la même localité. La gauche de cet individu montre une partie fracturée, mais restaurée par l'animal et terminée par un pli garni de ses tubes.

Fig. 9. Variété provenant du calcaire de Ratingen, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

36. PRODUCTUS LEUCHTENBERGENSIS.

Pl. XIV, Fig. 3, *a*, *b*, *c*, *d*.

Productus punctatus. var. de Kon. 1843. *Descript. des foss. du terr. carb. de Belg.* p. 196, pl. 9, fig. 4, *a*, *b*, *c* (fig. cæteris exclusis), non Martin.

Ce *Productus* qui peut acquérir une assez forte taille, est l'un des plus beaux et des plus intéressants que je connaisse. Sa valve dorsale est transverse, de forme à peu près elleptique et divisée dans son milieu par un sinus large et assez profond; cependant elle est peu gibbeuse et médiocrement renflée. Sa surface est couverte de plis concentriques assez réguliers, qui, vers le milieu de la croissance de l'animal, se transforment en larges bandes dont les bords inférieurs sont le plus souvent garnis d'un grand nombre de tubercules allongés et épais; quelquefois la rangée unique de ces tubercules est remplacée par une double rangée dont l'une occupe le bord antérieur et dont l'autre se trouve placée vers le milieu de la bande; dans ce cas les tubercules sont disposés en quinconce, de manière à ne pas pouvoir se rencontrer et s'absorber mutuellement. C'est sur leur extrémité antérieure qu'ont été insérés les nombreux tubes dont leur surface a été hérissée, ainsi que l'indiquent les ouvertures que l'on y remarque et les traces de ces mêmes tubes encore conservées dans la roche (Pl. XIV, Fig. 3, *a*.). Le

crochet quoiqu'assez fortement recourbé sur lui-même est peu proéminent et dépasse à peine le bord cardinal. Celui-ci est plus court que le diamètre transverse, circonstance à laquelle la coquille doit évidemment sa forme ellipsoïdale et le peu de développement de ses oreillettes, qui sont petites et qui se rattachent à la voûte dorsale par une pente régulière et peu prononcée.

Cette espèce est surtout remarquable par la forme de sa valve ventrale. Celle-ci, au lieu d'être plane ou concave, est faiblement convexe, en sorte qu'en regardant la coquille de profil ou du côté de son crochet, une partie en reste visible (Pl. XIV, Fig. 3, *b* et *c*), tandis que chez toutes les autres espèces elle est entièrement dérobée à la vue dans l'une et l'autre de ces positions. Cette valve est composée de trois lobes, dont un médian assez prononcé correspondant au sinus de la valve opposée et deux latéraux, séparés du premier par deux larges sillons obliques prenant leur origine commune en dessous du crochet. Les oreillettes sont déprimées et les bords légèrement relevés tout autour de la valve. Les ornements extérieurs sont les mêmes que ceux de la valve dorsale, à cette différence près, que les plis sont moins larges et que les tubercules sont remplacés par des fossettes correspondantes de même forme que ceux-ci; mais à côté des fossettes il existe chez les individus bien conservés, des traces de tubercules porforés, et semblables à ceux de la valve dorsale, qui elle aussi, a dû être garnie de tubes.

Dimensions. Quoique cette espèce puisse atteindre jusqu'à 70 millimètres de long, sa taille moyenne ne dépasse guère 50 millimètres. La longueur est à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur, =100 : 140 : 46 : 52. —Le nombre des plis d'un individu de taille moyenne, est de 25 à 30.

Rapports et différences. Quoique ce *Productus* se distingue facilement du *P. punctatus*, par l'épaisseur de ses tubercules, par la largeur de ses plis concentriques et surtout par la forme convexe de sa valve ventrale, je l'ai considéré en 1843, comme une simple variété de ce dernier, parce que je n'en possédais encore que le seul échantillon que j'ai figuré à cette époque. La découverte d'un certain nombre d'autres individus, m'ayant fourni la preuve que leurs caractères restent constants et suffisent pour en former une espèce distincte, j'ai saisi cette occasion pour la dédier à S. A. I. le Duc de Leuchtenberg, que sa haute position n'empêche pas de se livrer avec ardeur à l'étude des sciences et dont les travaux sont hautement appréciés par les paléontologistes.

Gis. et loc. Tous les échantillons que je possède proviennent du calcaire carbonifère de Visé. Ils sont assez rares et ordinairement brisés ou déformés.

Explication des figures. PL. XIV, FIG. 3, *a*. Echantillon adulte, garni d'une partie de ses tubes, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 3, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 3, *c*. Echantillon plus petit vu de profil, afin de montrer la convexité de la valve ventrale. De ma collection.

FIG. 3, *d*. Le même vu du côté du crochet, afin de montrer la profondeur du sinus et le faible développement du crochet.

37. PRODUCTUS PUNCTATUS.

PL. XII, FIG. 2, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*.

Conchæ pilosæ. URE. 1793. *History of Ruth.* p. 316, pl. 15, fig. 7.

Anomites punctatus. MARTIN. 1809. *Petrif. Derb.* p. 8, pl. 37, fig. 6 (fig. 7 et 8 exclusis).

Trigonia rugosa. PARKINS. 1811. *Organ. remains.* vol. III, p. 177, pl. 12, fig. 11.

Anomites thecarius. SCHLOTH. 1822. *Nachtr. zur Petrefactenk.* vol. I, p. 63, pl. 14, fig. 1.

Productus punctatus. J. SOW. 1823. *Min. conch.* vol. IV, p. 22, pl. 323.

— — DEFR. 1826. *Dict. des sc. nat.* vol. XLIII, p. 352.

— — FLEM. 1828. *Brit. anim.* p. 379.

— — DUMONT. 1832. *Const. géol. de la prov. de Liége*, p. 354.

— — DAVREUX. 1833. *Const. géogn. de la prov. de Liége*, p. 272.

— *thecarius*. KEFERST. 1834. *Naturg. des Erdk.* vol. II, p. 666.

— *punctatus*. DESH. 1836. 2^me^ *édit. des anim. sans vert. de* LAMK. vol. VII, p. 385.

Producta punctata. PHILL. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 215, pl. 8, fig. 10.

Leptæna sulcata. Fischer. 1837. *Oryct. du gouv. de Moscou.* p. 143, pl. 23, fig. 2, non Sow.

Productus punctatus v. Buch. 1841. *Abhandl. der K. Akad. der Wissens. zu Berlin*, Theil I, p. 34, pl. 2, fig. 10 et 11.

— — de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belgique*, p. 196, pl. 8, fig. 4 et pl. 10, fig. 2, *a*, *b*, *c* (pl. 8, fig. 1, *a*, *b*, pl. 9, fig. 4, *a*, *b*, *c* et fig. 6, *a*, *b* et pl. 12bis, fig. 3 exclusis).

— *concentricus.* Potiez et Michaud. 1844. *Galer. des molusq. du Mus. de Douai*, vol. II, p. 25, pl. 41, fig. 1.

Leptæna corrugata? Fahrenkohl. 1844. *Bullet. de la soc. imp. des natur. de Moscou*, vol. XVII, p. 784, non M'Coy.

Producta punctata. M'Coy. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 113.

— *elegans.* Id. *Ibid.* p. 108, pl. 18, fig. 13, non Davreux.

Productus punctatus. Desor. 1844. *Trad. de la Min. conch. de* Sow. p. 355, pl. 215-323, fig. 1, 2, 3, 4 et 5.

— — de Vern. 1845. *Russ. and the Ural mount.* vol. II, p. 276, pl. 16, fig. 11, *a*, *b*.

— — Geinitz. 1846. *Grundr. der Versteinerungsk.* p. 520.

Cette belle coquille légèrement transverse et déprimée, peut acquérir une taille assez forte et atteindre une longueur de 6 à 7 centimètres. Sa valve dorsale est peu bombée et divisée dans son milieu par un sinus peu profond, dont l'origine ne se trouve qu'à une petite distance de l'extrémité du crochet. Celui-ci est pointu et fortement recourbé au delà du bord cardinal. Ce bord est un peu plus court que le diamètre transverse et peut dans certaines circonstances qu'il n'est pas possible d'apprécier, s'élargir et transformer en une véritable area, munie de son ouverture deltoïdale, ainsi que le prouve l'échantillon que j'ai représenté Pl. XIII, Fig. 2, *k*. Les oreillettes larges et applaties sont peu distinctes du reste de la coquille et terminées à leurs extrémités par un angle obtus. M. de Buch assure avoir observé sur le bord cardinal de chacune

d'elles cinq à six tubes que M. de Verneuil et moi avons vainement cherchés sur tous les échantillons que nous avons eus à notre disposition. La surface est ornée d'un grand nombre de plis d'accroissement concentriques, applatis, en forme de bandelettes. Lorsque l'accroissement s'est fait régulièrement, tous ces plis possèdent à peu près la même largeur, à l'exception des plis marginaux des individus très-âgés et décrepits, chez lesquels ceux-ci sont moins larges et moins distincts (Pl. XIII, Fig. 2, *a* et *b*) ; mais dans le cas contraire il arrive souvent qu'un pli plus large soit intercalé entre des plis plus étroits (Pl. XIII, Fig. 2, *d*.) et donne un aspect tout étrange à la coquille. Ces bandelettes sont légèrement étagées les unes audessus des autres et séparées par un petit espace lisse. Leur bord antérieur est garni d'un grand nombre de petits tubes aciculaires, spiniformes, disposés en quinconce ; ceux-ci sont dominés par une rangée de tubes un peu plus épais et un peu plus longs. Tous ces tubes, qui sans aucun doute ont été secrétés par des appendices charnues des bords du manteau et dont la longueur varie de 3 à 10 millimètres, sont nacrés et parfaitement semblables à ceux des autres espèces de *Productus*, mais ils sont très-caduques et ne laissent ordinairement après leur chute que des granulations ou des tubercules allongés percés à leur extrémité antérieure. Cette disposition se retrouve jusque sur les oreillettes, dont les tubes ne diffèrent en rien de ceux de la surface ; de même que ces derniers, ils sont couchés dans la direction du rayon de courbure des bandelettes qui en sont garnies et contribuent à former, selon l'expression de M. de Verneuil, comme une sorte de duvet sur la coquille (Pl. XIII, Fig. 2, *a*).

La valve ventrale est légèrement concave et divisée en deux parties égales par un lobe médian peu prononcé, correspondant au sinus de la valve opposée. Comme elle est plus petite que cette dernière et que cependant le nombre de ses anneaux d'accroissement est le même, il en résulte que ceux-ci sont beaucoup plus étroits. J'ai remarqué en outre, que leur largeur est toujours beaucoup plus régulière et que l'accroissement anormal de quelques plis de la valve dorsale n'exerce qu'une bien faible influence sur celui des anneaux de la valve ventrale, ainsi que cela résulte clairement de la comparaison des figures 2 *d* et 2 *e* de la planche XIII, faites d'après le même individu. Ces anneaux sont aussi moins saillants et garnis d'un nombre beaucoup moins considérable de tubes, qui du reste sont exactement semblables à ceux de la valve dorsale.

Le test étant très-mince, il s'enlève facilement et laisse un moule intérieur sur lequel se reproduisent les anneaux concentriques, avec cette différence que les tubes y sont remplacés par plusieurs séries de petites fossettes ou piqûres, dont le diamètre est en rapport avec celui des tubes qui les ont produites. Les apophyses hépatiques de la valve dorsale sont étroites, mais assez longues et semblent avoir été formées de la réunion d'un grand nombre de petites lamelles obliques, juxtaposées les unes à côté des autres (Pl. XIII, Fig. 2 *i.*) ; celles de la valve ventrale sont plus larges, mais un peu plus courtes et plus épaisses et présentent en outre un renflement assez considérable dans leur milieu ; elles sont séparées par l'arête médiane qui sert de soutien à la dent cardinale et qui s'étend jusque vers le milieu de la valve (Pl. XIII, Fig. 2, *h.*). Les impressions musculaires ne sont pas circonscrites par des limites bien nettes ; elles sont très-superficielles, fortement striées et placées près de l'extrémité du crochet. Je n'ai pu observer aucune trace des callosités réniformes.

Dimensions. Longueur moyenne 60 millimètres. Rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 125 : 50 : 43. — On compte de 20 à 23 anneaux d'accroissement dans un espace de 20 millimètres pris sur la valve ventrale, à partir du bord cardinal (1).

Rapports et différences. Par ses bandelettes plates et par le grand nombre de tubes aciculaires dont elles sont garnies, ce *Productus* se distingue facilement des *P. pustulosus*, *Leuchtenburgensis* et *fimbriatus*. Ce dernier se caractérise en outre par l'absence totale de sinus, par une taille beaucoup plus petite, et par la concavité plus forte et plus régulière de sa valve ventrale. Il suffit de jeter les yeux sur la figure 11 de la planche 12 de l'ouvrage de Parkinson pour se convaincre que c'est le *P. punctatus* et non le *P. scabriculus* (ainsi que l'a cru Sowerby et ainsi que tous les paléontologistes l'ont répété après lui), dont il a représenté un fragment et qu'il a confondu avec les *Trigonia*.

Malgré les caractères bien tranchés de cette espèce, plusieurs auteurs ne l'ont pas reconnue et l'ont décrite sous des noms nouveaux. C'est ainsi que Schlotheim lui donne en 1822 le nom d'*Anomites thecarius*, nom que M. Keferstein copie servilement en

(1) J'ai préféré la valve ventrale à cause de la plus grande régularité de ses anneaux d'accroissement.

1834 ; que M. Fischer lui applique en 1837 celui de *Leptæna sulcata* déjà employé par Sowerby pour une autre espèce ; qu'en 1844 MM. Potiez et Michaud le désignent sous celui de *P. concentricus*, M. Fahrenkohl sous celui de *Leptæna corrugata* et que M. M'Coy en décrit un jeune individu sous celui de *P. elegans*.

Gis. et loc. En Belgique je n'ai jamais rencontré cette espèce dans l'étage moyen du système carbonifère. Elle s'y trouve dans le calcaire de l'étage inférieur de Visé, de Lives et de Namur. Cependant d'après M. de Verneuil, elle paraît appartenir à ces deux étages dans l'Amérique du Nord et en Russie. Ce savant paléontologiste l'a trouvée dans ce dernier pays dans l'étage inférieur de la vallée de la Prikcha dans le Valdaï et M. de Buch l'a reçue des calcaires d'Alexine sur l'Oka appartenant au même étage. Pour l'étage moyen, il cite la rivière Indiga, près de la mer glaciale ; la Dwina entre Syskaia et Kopatcheva ; le cours inférieur de la Pinega ; les environs de Kargopol ; Kosatchi-Datchi sur le revers oriental de l'Oural ; enfin les environs de Moscou et les calcaires blancs de Miatchkova. Selon M. de Buch, elle se trouve encore à Svenigorod, dans la même contrée. Je la possède en outre du calcaire de Jaroslavki, village du district d'Oufimsk, gouvernement d'Orenbourg et de Sérébrjakowa (pays des Cosaques du Don). En Amérique, le même paléontologiste l'a recueillie dans les couches houillères de Zanesville (Ohio), dans le calcaire carbonifère d'Eddyville (Kentucky) et dans les psammites inférieurs à ce calcaire à Louisville (Kentucky). En Angleterre ce *Productus* semble aussi occuper différents niveaux dans la formation carbonifère. Il se trouve dans les calcaires de Buxton (Martin), de Bolland, de Florence Court, de Settle, de Cumberland, d'Otterburn (Phillips), de Lowick et de Sunderland. En Irlande on le rencontre dans le calcaire de Cork et de Kildare et en Allemagne dans celui de Ratingen et dans le schiste d'Altwasser en Silésie. Dans ces deux derniers pays il appartient exclusivement à l'étage inférieur. M. Paillette l'a recueilli dans les couches de l'étage moyen de Pola de Lena (Asturies), associé au *Spirifer Sowerbyi (Mosquensis)*, FISCHER.

Explication des figures. PL. XIII, FIG. 2, *a*. Echantillon adulte un peu restauré, provenant du calcaire carbonifère de Visé, garni d'une partie de son revêtement épineux, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 2, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 2, *c*. Le même vu de profil.

Fig. 2, *d*. Autre échantillon à anneaux irréguliers provenant de la même localité, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 2, *e*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 2, *f*. Jeune individu, provenant de la même localité, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 3, *g*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 2, *h*. Moule intérieur, un peu restauré, provenant de la même localité, vu du côté de la valve ventrale, afin de montrer les impressions de ses apophyses hépatiques. De ma collection.

Fig. 2, *i*. Le même vu du côté du crochet, afin de montrer les impressions des apophyses hépatiques de la valve dorsale et celles des muscles

Fig. 2, *k*. Individu provenant de la même localité, vu du côté de la valve ventrale, afin de montrer son area et son ouverture deltoïdale. De ma collection.

38. PRODUCTUS FIMBRIATUS.

Pl. XII, Fig. 3, *a*, *b*, *c*.

Anomites punctatus. Martin. 1809. *Petrif. Derb.* p. 8, pl. 37, fig. 7 et 8 (fig. 6 exclusa).

Producta fimbriata. J. D. C. Sow. 1824. *Min. conch.* vol. V, p. 85, pl. 459, fig. 1.

Productus fimbriatus. Krueger. 1825. *Urweltl. Naturg.* vol. II, p. 215.

— — Defr. 1826. *Dict. des sc. nat.* vol. XLIII, p. 353.

— — Flem. 1828. *Brit. anim.* p. 379.

— — Dumont. 1832. *Const. géol. de la prov. de Liége*, p. 354.

Strophomena marsupit. Davreux. 1833. *Const. géogn. de la prov. de Liége*, p. 272, pl. 4, fig. 2, A, B.

Productus fimbriatus. Desh. 1836. 2^me^ *édit. des Anim. s. vert. de* Lamk. vol. VII, p. 381.

Producta fimbriata. Phill. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 215, pl. 8, fig. 11, 12.

Productus fimbriatus. v. BUCH. 1841. *Abhandl. der K. Akad. der Wissens. zu Berlin*, Theil I, p. 27, pl. 2, fig. 21, 22 et 23.

— — DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 194, pl. 10, fig. 3, *a*, *b*, *c*, *d*.

— *fasciatus.* KUTORGA. 1844. *Verhandl. der K. russis. miner. Gesells. zu St.-Pétersb.* p. 100, pl. 10, fig. 4, *a*, *b*, *c*.

Producta fimbriata. M'COY. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 108.

Productu fimbriatus. DESOR. 1845. *Trad. de la Min. conch. de* SOW. p. 471, pl. 297–459, fig. 1.

Coquille de taille moyenne, ordinairement ovale et allongée. Valve dorsale assez régulièrement voûtée, non sinuée, mais à dos souvent légèrement déprimé, à surface garnie d'un certain nombre d'anneaux concentriques d'accroissement, d'autant plus larges qu'ils sont plus éloignés du crochet. Ces anneaux au lieu d'être applatis en forme de rubans ou de bandelettes, comme le sont ceux du *P. punctatus*, sont relevés dans le milieu de leur largeur ; ils forment des plis épais dont la partie antérieure est lisse ou garnie de stries d'accroissement très-fines, tandis que l'autre est ornée d'une série unique de tubercules allongés de longueur et d'épaisseur un peu variables, et qui sans le moindre doute, ont servi de base à autant de tubes, bien qu'ils soient presque toujours cicatrisés à leur extrémité antérieure ; aussi les échantillons qui ont conservé quelques traces de leurs tubes sont-ils extrêmement rares. Les oreillettes sont très-petites, minces, applaties et séparées de la voûte dorsale par une forte dépression, ce qui est cause qu'elles sont rarement bien conservées ; elles sont terminées à leurs extrémités par un angle obtus ; les plis s'y transforment en bourrelets très-saillants et anguleux. Le crochet est pointu, fortement recourbé et projeté au delà du bord cardinal. Celui-ci est droit et un peu plus court que le diamètre transverse.

La valve ventrale est faiblement, mais régulièrement convexe, en sorte qu'elle laisse un espace assez considérable entre elle et la valve dorsale. Ses plis concentriques sont plus étroits et moins saillants que ceux de la valve opposée ; ils sont munis çà et là de petits tubercules ; les sillons qui les séparent sont ornés d'une série

unique de fossettes allongées, correspondant aux tubercules des anneaux dorsaux.

Dimensions. Longueur moyenne 35 millimètres. Rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 83 : 55 : 34. — Le nombre total des plis concentriques est de 15 à 18.

Rapports et différences. Examinée superficiellement ce *Productus* a d'autant plus de ressemblance avec le jeune âge des *P. punctatus* et *pustulosus*, que dans ces espèces le sinus dorsal ne devient souvent manifeste que bien tard ; mais étudié avec attention, il sera toujours facile de le distinguer de l'une et de l'autre de ces espèces, d'abord par sa forme plus allongée, ensuite par la concavité plus forte et plus régulière de sa valve dorsale ; en outre par le faible développement de ses oreillettes et son bord cardinal comparativement plus court et surtout par la forme et la position de ses tubercules. En effet, tandis que les anneaux du *P. punctatus* sont garnis de plusieurs séries de tubercules granuliformes, ceux du *P. fimbriatus* n'en possèdent qu'une seule et se rapprochent par conséquent d'avantage de ceux du *P. pustulosus ;* mais les tubercules de ceux-ci sont amincis à leurs deux extrémités et percés au milieu, tandis que les tubercules du *P. fimbriatus* ne se prolongent pas au delà de leur ouverture. Ajoutons que le nombre des plis compris dans un même espace est toujours beaucoup plus considérable pour le *P. pustulosus* que pour le *P. fimbriatus* et que les anneaux du *P. punctatus* sont applatis, tandis que ceux de ce dernier sont très-renflés dans leur milieu et même anguleux sur les oreillettes et sur les parties adjacentes. Enfin, le *P. fimbriatus* n'acquiert jamais la taille de ceux auxquels je viens de le comparer. Martin semble avoir confondu cette espèce avec le jeune âge du *P. punctatus*. M. Davreux l'a représentée sous le nom de *Strophomena marsupit*, la confondant sans doute avec une espèce de *Leptæna* décrite par Rafinesque. M. Kutorga me semble aussi l'avoir méconnue, son *P. fasciatus* ne me paraissant être qu'une variété un peu plus adulte et d'une conservation un peu plus parfaite que ne le sont ordinairement les individus recueillis dans un calcaire plus dur que celui d'où elle a été extraite.

Gis. et loc. En Belgique cette espèce appartient exclusivement à l'étage inférieur du système carbonifère. On l'y rencontre communément dans le calcaire de Visé et très-rarement au contraire dans celui de Chokier. Elle se trouve encore dans le calcaire carbonifère de Ratingen en Prusse (de Buch), de Bolland, de Greenhow-Hill,

de Moulton, de l'Isle de Man (Phillips) du Cumberland et du Northumberland en Angleterre, de Kildare en Irlande et de Sterlitamack en Russie (Kutorga). Enfin, il se trouve à l'état de moule siliceux à Sloboda, gouvernement de Toula, où il est associé au *P. costatus* et autres.

Explication des figures. PL. XII, FIG. 3, *a*. Individu provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 3, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 3, *c*. Le même vu du côté du crochet.

39. PRODUCTUS DESHAYESIANUS.

PL. XIV, FIG. 4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Productus Deshayesianus. DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 193, pl. 10, fig. 7, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Petite coquille dont la taille n'atteint guère plus de 7 à 8 millimètres, d'une forme allongée et ovale, abstraction faite des oreillettes, qui du reste manquent souvent. Valve dorsale régulièrement voûtée, non sinuée. Sa surface est ornée dans sa partie supérieure de plis concentriques assez réguliers, et garnis de tubercules arrondis bien prononcés; à mesure que la coquille s'allonge, ces plis et ces tubercules s'effacent, en sorte que chez les individus adultes, la partie antérieure est presque complètement lisse ou garnie seulement de quelques stries d'accroissement à peine visibles à l'œil nu. Les tubercules disposés en quinconce ont servi de base à des tubes applatis, dirigé en tous sens, d'une longueur de trois à quatre millimètres, étranglés à leur partie inférieure et d'une largeur à peu près uniforme dans le reste de leur étendue (PL. XIV, FIG. 4, *f*.). Les oreillettes sont grandes et larges comparativement à la taille de l'espèce; elles sont très-minces, applaties, légèrement tuberculées, non plissées, et nettement séparées de la voûte dorsale par un étranglement très-prononcé; elles sont terminées à leurs extrémités par un angle droit, aussi le bord cardinal a-t-il la même

étendue que le diamètre transverse. Le crochet est petit, pointu et très-peu proéminent.

La valve ventrale est faiblement concave et possède en creux les mêmes ornements qui se trouvent en relief sur la valve dorsale.

Le test étant très-mince et très-caduque, la plupart des échantillons se trouvent réduits à l'état de moule intérieur, sur lequel on reconnait facilement l'empreinte de l'arête médiane et celle des deux callosités réniformes de la valve ventrale (Pl. XIV, Fig. 4, *d.*).

Dimensions. Longueur moyenne 7 millimètres. Rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 96 : 57 : 30.

Rapports et différences. Je ne connais aucune espèce de *Productus* que l'on pourrait confondre avec celle-ci ; sa petite taille et la différence considérable qui existe entre les ornements de la partie antérieure et supérieure de sa valve dorsale suffisent pour le distinguer de tous ses congénères.

Gis. et loc. Jusqu'ici je n'ai pu rencontrer ce *Productus* que dans le calcaire carbonifère de Visé.

Explication des figures. Pl. XIV, Fig. 4, *a.* Individu de grandeur naturelle vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 4, *b.* Le même vu du côté du opposé.

Fig. 4, *c.* Le même vu de profil.

Fig. 4, *d.* Moule intérieur vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

Fig. 4, *e.* Même individu que celui de la figure 4, *a*, grossi au triple de sa grandeur naturelle.

Fig. 4, *f.* Autre individu garni de ses tubes, vu du côté antérieur, grossi au triple de sa grandeur naturelle. De ma collection.

G. *PRODUCTI CAPERATI.*

40. PRODUCTUS MARGINALIS.

PL. XIV, FIG. 7, *a*, *b*, *c*, *d*.

Cette petite coquille n'est pas toujours d'une forme très-symétrique dans toutes ses parties. Son contour est ordinairement subtrapézoïdal ; lorsqu'elle s'est régulièrement développée elle est un peu plus large que longue. La valve dorsale des individus adultes, est gibbeuse, géniculée et garnie d'un prolongement antérieur court, saillant et séparé de la partie viscérale par un large sillon transverse, dont l'origine se trouve à l'angle extérieur de chaque oreillette. Ce prolongement est facile à distinguer par les côtes longitudinales, épaisses et assez peu régulières dont il est garni et dont il ne se trouve pas la moindre trace sur la partie viscérale. La surface de cette dernière est ornée de faibles rides transverses, irrégulières et interrompues çà et là par des tubercules peu prononcés, donnant naissance à des tubes effilés de 3 à 4 millimètres de long (PL. XIV, FIG. 7, *a*.). Le crochet est très-petit à peine recourbé et peu saillant. Les oreillettes sont peu prononcées et légèrement plissées en travers. Le bord cardinal est plus court que le diamètre transverse et très-souvent il porte les traces d'une area rudimentaire.

La valve ventrale est très-peu concave et ne possède pas de prolongement antérieur semblable à celui de la valve opposée. Ses rides concentriques sont moins bien exprimées ; on y observe des petites fossettes correspondant aux tubes de la valve dorsale.

Le test est très-mince et très-rarement conservé ; après sa chute, il laisse un moule dont la partie dorsale reproduit d'une manière très-exacte les ornements de la valve qui s'y trouvait appliquée, sauf quelques légères granulations et l'impression de deux petites apophyses hépatiques, situées très-près du crochet. Le moule de la valve ventrale ne conserve presque jamais aucune trace de ses ornements extérieurs. On y remarque très-souvent et d'une manière très-distincte, les traces de la dent cardinale, de l'arête médiane

qui l'a renforcée, des apophyses hépatiques et en dessous et un peu en dehors de celles-ci, les impressions des callosités réniformes. Le bord antérieur est garni de plusieurs séries de piqûres (Pl. XIV, Fig. 7, *d.*).

Dimensions. La longueur moyenne de ce *Productus* est de 12 à 16 millimètres. La longueur est à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 118 : 59 : 46.

Rapports et différences. Le *P. marginalis* a quelque ressemblance avec le jeune âge du *P. Nystianus*, mais il s'en distingue facilement par sa taille, qui est plus forte, par la concavité de sa valve ventrale, et surtout par l'occlusion parfaite de son prolongement antérieur.

Gis. et loc. J'ai recueilli assez abondamment ce *Productus* dans le calcaire carbonifère de Visé et quoique je le connusse depuis longtemps, je ne me suis déterminé à le décrire qu'après m'être assuré par un grand nombre d'échantillons bien conservés, de la réalité et de la permanence de ses caractères spécifiques.

Explication des figures. Pl. XIV, Fig. 7, *a.* Individu adulte, garni de quelques uns de ses tubes, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 7, *b.* Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 7, *c.* Le même vu de profil.

Fig. 7, *d.* Moule intérieur vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

41. PRODUCTUS KEYSERLINGIANUS.

Pl. XIV, Fig. 6, *a*, *b*, *c*, *d.*

Productus aculeatus. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 200, pl. 10, fig. 8, *a*, *b*, *c*, (synom. exclusa), non Martin.

Petite coquille transverse, gibbeuse, de forme subrectangulaire. Valve dorsale faiblement déprimée ou sinuée dans sa partie médiane; le contour de son profil est parfaitement semicirculaire; sa surface est hérissée de cinq ou six séries de tubercules allongés, grossièrement disposés en quinconce sur sa partie viscérale et très-

souvent absents ou du moins très-peu prononcés sur sa partie antérieure ; elle est en outre traversée par de légères stries concentriques d'accroissement, à peine visibles à la simple vue, mais très-apparentes à l'œil armé d'une loupe. Les côtés sont très-rapides et quelquefois presque verticaux. Les oreillettes, quoique petites sont bien dessinées et se rattachent à la voûte dorsale par un pli assez brusque. On y remarque rarement des traces de tubes. Ces traces lorsqu'elles existent, ne se trouvent jamais sur l'arête cardinale et sont entièrement semblables aux tubercules de la surface ; ces derniers sont allongés et épais comparativement à la taille de l'espèce ; les tubes auquels ils ont servi de base, étaient sans doute bien caduques, car la plupart des tubercules sont cicatrisés et parmi le grand nombre d'échantillons que j'ai recueillis, je n'en ai trouvé que deux chez lesquels les tubes aient été conservés. Le crochet est petit et pointu ; il dépasse un peu le bord cardinal.

La valve ventrale n'est que très-faiblement concave et laisse un assez grand espace entre elle et la valve opposée. Les ornements qui se trouvent en relief sur cette dernière, y sont reproduits en creux. Je n'y ai jamais aperçu des traces de tubercules ni de tubes. Elle s'articule avec la valve dorsale au moyen d'une dent médiane bifurquée, s'engageant bien avant dans le crochet ; l'arête médiane qui soutient cette dent, est mince et ne s'étend pas au delà de la moitié de la longueur de la valve ; immédiatement en dessous du crochet s'élèvent les apophyses hépatiques, qui sont très-petites et subtriangulaires ; en-dessous et un peu en dehors on remarque les callosités réniformes ; une petite côte parallèle ou bord antérieur sert de limite à une bande marginale entièrement hérissée de petites pointes très-nombreuses et très serrées les unes contre les autres (PL. XIV, FIG. 6, *d.*). L'intérieur de la valve dorsale n'offre rien de particulier et ressemble à celui de la plupart des autres espèces de *Productus*.

Dimensions. La longueur moyenne de cette espèce est de 10 millimètres ; elle est à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 132 : 64 : 50. — On compte 7 à 8 tubercules dans une série transverse située à une distance de 5 millimètres du crochet.

Rapports et différences. C'est à tort qu'en 1843 j'ai confondu cette espèce avec le *P. aculeatus*, MARTIN, dont elle diffère par sa taille, par sa forme transverse et surtout par le peu de concavité de sa valve ventrale. Je la dédie aujourd'hui à l'un des plus savants pa-

léontologistes de notre époque, qui a déjà signalé l'erreur que j'ai commise.

Gis. et loc. Le *P. Keyserlingianus* n'est pas rare dans le calcaire carbonifère de Visé ; je le possède en outre du calcaire carbonifère de Likwin, gouvernement de Kalouga et de Cosatchi-Datchi (versant Oriental de l'Oural). Ces derniers semblent appartenir à l'étage moyen du système carbonifère, tandis que l'autre correspond à l'étage inférieur de ce même système.

Explication des figures. Pl. XIV, Fig. 6, *a*. Individu provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 6, *b*. Le même vu du côté de la valve dorsale.

Fig. 6, *c*. Le même vu de profil.

Fig. 6, *d*. Moule intérieur provenant de la même localité, vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

42. PRODUCTUS BRACHYTHÆRUS.

Pl. XVI, Fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*.

Producta brachythœrus. G. Sow. 1844. *Geol. observ. on the volc. islands by* Darwin, p. 158.

Productus — Morris. 1845. *Phys. descript. of new South Wales and van Diemen's land, by* Strzelecki, p. 284, pl. 14, fig. 4, *a*, *b*, *c*.

Coquille de taille moyenne, renflée, transverse, de forme subtrapézoïdale. Valve dorsale très-gibbeuse, à côtés très-rapides ; région dorsale déprimée ; surface hérissée d'un grand nombre de tubes aciculaires, très-longs et dirigés obliquement en avant ; ces tubes grossièrement disposés en quinconce, naissent à une petite distance de l'endroit où ils percent la coquille, et se creusent un passage dans l'épaisseur même du test dont ils suivent pendant quelque temps la direction ; en sorte que par l'enlèvement de la couche extérieure de celui-ci, il reste autant de petits sillons qu'il y a eu de tubes qui ont garni sa surface. Cette couche extérieure est rarement

conservée et je n'en ai rencontré quelques traces que sur un seul échantillon (PL. XVI, FIG. 1, *a*) que M. A. d'Orbigny a eu la complaisance de me prêter. Elle m'a parue couverte de côtes longitudinales si faiblement exprimées qu'il n'en reste pas la moindre trace après l'enlèvement de l'épiderme (1). Oreillettes courtes, mais très-larges, applaties et couvertes d'une rangée de cinq à six tubes; elles forment à leurs extrémités un pli très-prononcé avec les flancs de la coquille. Crochet court, renflé, ne dépassant pas le bord cardinal; ce dernier est à peu près de la même longueur que le diamètre transverse. Valve ventrale inconnue.

M. Morris a fait représenter un moule intérieur qu'il croit appartenir à ce *Productus*, mais ce rapprochement me paraît d'autant plus douteux, que d'après les figures qu'il en donne et que j'ai reproduites (PL. XVI, FIG. 1, *c* et *d*), le test aurait dû être fort épais, tandis que je l'ai toujours trouvé très-mince sur tous les échantillons que j'ai eus sous les yeux. D'après ce moule les apophyses hépatiques, les impressions musculaires et les callosités réniformes auraient dû être très-prononcées.

Dimensions. Longueur 27 millimètres. Par rapport à la longueur, largeur et hauteur = 100 : 122 : 76.

Rapports et différences. Ainsi que je l'ai déjà dit, le *P. brachythœrus* n'est peut être qu'une variété du *P. subquadratus*. En effet, il s'en rapproche beaucoup par sa forme et par ses ornements. Cependant sa taille est ordinairement un peu plus petite et ses côtes moins prononcées, mais ce sont là des différences qui peuvent bien ne dépendre que de la différence d'âge et de conditions dans lesquelles les individus ont vécu. Je devrai avoir vu un plus grand nombre d'échantillons que celui que j'ai eu à ma disposition, avant d'oser me prononcer.

Gis. et loc. Ce *Productus* se trouve dans un calcaire carbonifère grisâtre ou rougeâtre à Illawara, à Raymond Terrace (Nouvelle Galles), à Eastern Marches et au Mont Wellington (Terre de Van Diemen) (Morris).

Explication des figures. PL. XVI, FIG. 1, *a*. Individu provenant de la Terre de Van Diemen, vu du côté de la valve dorsale. De la collection zoologique du Muséum de Paris.

---

(1) Je crois que cette espèce serait mieux placée parmi les *P. spinosi*, à côté du *P. subquadratus*.

Fig. 1, *b*. Le même vu de profil.

Fig. 1, *c*. Moule intérieur vu du côté de la valve ventrale. D'après M. Morris.

Fig. 1, *d*. Le même vu du côté du crochet.

43. PRODUCTUS GRANULOSUS.

Pl. XVI, Fig. 7, *a*, *b*, *c*.

Producta granulosa. Phill. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 216, pl. 8, fig. 15.

Productus papillatus. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 201, pl. 10, fig. 6, *a*, *b*, *c* et pl. 12, fig. 9, *a*, *b*, *c*.

Producta granulosa. M'Coy. 1844. *Syn. of the carb. foss. of Ireland*, p. 109.

Coquille de taille moyenne, régulièrement bombée, presqu'aussi longue que large. Valve dorsale légèrement transverse, de forme ovale, non sinuée, à crochet très-petit, pointu, non proéminent; sa surface est hérissée d'un grand nombre de petits tubercules assez régulièrement disposés en quinconce; chez les individus adultes les tubercules de la première moitié de la surface ont une base circulaire et sont très-serrés les uns contre les autres, tandis que ceux de la partie antérieure sont faiblement allongés et un peu plus distants entre eux; ils sont presque tous ouverts au centre et ont indubitablement servi de base à des tubes aciculaires, dont on rencontre rarement des traces. Les oreillettes sont un peu contournées sur elles-mêmes, mais très-minces et très-facilement destructibles, ce qui est cause que tous les échantillons entièrement dégagés de la roche les ont perdues et paraissent circulaires. Le bord cardinal est droit et occupe la plus grande largeur de la coquille.

La valve ventrale est profondément insérée dans la valve opposée et ne laisse qu'un bien faible espace entre elle et cette dernière. Sa surface est ornée d'un grand nombre de petits enfoncements circulaires, correspondant aux tubes de la valve dorsale, et en outre de quelques tubes dont la distribution n'a rien de régulier, mais dont la majeure partie semble s'être trouvée implantée sur le bord antérieur et sur les oreillettes; on en découvre très-facilement les traces

sur les empreintes de la valve qui les a portés, en même temps qu'on y aperçoit très-distinctement des stries d'accroissement assez prononcées et assez distantes. Le test des valves est très-mince.

Dimensions. L'un des plus grands échantillons de cette espèce que je possède, a environ 20 millimètres de long. Sa longueur est à sa largeur, à sa hauteur et à son épaisseur = 100 : 118 : 60 : 12. — On compte environ 20 rangées de tubercules dans l'espace de 10 millimètres à partir de l'extrémité du crochet.

Rapports et différences. La figure par laquelle M. Phillips a représenté ce *Productus* est si imparfaite et la description qu'il en a donnée est si laconique, que ni M. de Buch, ni M. de Verneuil, ni moi n'avons pu y reconnaître l'espèce à laquelle elles se rapportaient. Il n'y a donc rien d'étonnant qu'elle m'ait semblée nouvelle et que je l'aie décrite en 1843 sous le nom de *P. papillatus*, nom adopté par M. de Verneuil, en même temps que celui de *P. granulosus* qu'il a considérés comme deux espèces distinctes. Ce n'est qu'à l'aide de quelques échantillons anglais, dont je suis redevable à M. A. Lewis que je suis parvenu à constater notre erreur. Le *P. granulosus* a une grande ressemblance avec le *P. Murchisonianus*. Il s'en distingue néanmoins très-facilement par un nombre bien plus considérable de tubercules, par la longueur de son bord cardinal et surtout par la forte concavité de sa valve ventrale et l'absence totale d'area. La présence d'un sinus bien prononcé sur la valve dorsale du *P. Lewisianus* suffira pour le séparer du *P. granulosus*, dont il possède à peu près tous les autres caractères extérieurs

Gis et loc. J'ai recueilli ce *Productus* dans le calcaire carbonifère de Visé, dans lequel il est assez rare. Je le possède encore du calcaire de Ballintrillick et de Killukin en Irlande et de Sérébrjakowa dans le pays des Cosaques du Don. Il se trouve en outre dans le calcaire carbonifère de Bolland (Phillips), de l'Ile de Man (de Keyserling) et parait principalement caractériser les couches de l'étage inférieur du système carbonifère.

Explication des figures. PL. XVI, FIG. 7, *a*. Individu provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 7, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 7, *c*. Le même vu du côté du crochet.

44. PRODUCTUS MURCHISONIANUS.

Pl. XVI, Fig. 3, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Orthis productoïdes. Murch. 1840. *Bullet. de la soc. géol de France*, vol. XI, p. 254, pl. 2, fig. 7, *a*, *b*, *c*.

Productus spinulosus. v. Buch. 1840. *Archiv. für Mineral. etc.* vol. XV, p. 58, non Sow.

— — Eichw. 1840. *Bullet. sc. de l'Acad. des sciences de St.-Petersb.* vol. VII, p. 86.

Leptæna caperata. J. de C. Sow. 1840. *Trans. of the geol. soc. of London*, 2nd ser. vol. V, p. 704, pl. 53, fig. 4.

— *fragaria*, var. Id. *Ibid.* pl. 54, fig. 3.

— *scabricala.* Phill. 1841. *Palæoz foss. of Cornwall*, p. 58, pl. 24, fig. 97, non Martin.

— *caperata.* Id. *Ibid.* p. 58, pl. 25, fig. 98.

— *laxispina.* Id. *Ibid.* p. 59, pl. 25, fig. 99, non eadem Phill. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 215, pl. 8, fig. 13.

— *membranacea.* Id. *Ibid.* p. 60, pl. 25, fig. 101.

Productus spinulosus. v. Buch. 1841. *Abhandl. der Königl. Akad. der Wissens. zu Berlin*, Theil I, p. 27, pl. 2, fig. 16, non Sow.

Strophomena membranacea. Landner Vanuxem. 1842. *Geology of New-York*, part III, p. 179, fig. 4 et 5.

Productus spinulosus. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 183, pl. 13bis, fig. 4, non Sow.

Producta caperata. M'Coy. 1844. *Syn. of the carb. foss. of Ireland*, p. 107.

— *membranacea.* Id. *Ibid.* p. 112.

Productus productoïdes. de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 283, pl. 18, fig. 4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

— *membranaceus.* Id. *Ibid.* p. 285, pl. 15, fig. 11, *a*, *b*.

— *subaculeatus* (partim). de Keyserl. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 199, pl. 4, fig. 1 et 2.

Coquille de taille moyenne, suborbiculaire. Valve dorsale peu gibbeuse, régulièrement voûtée, non sinuée, ornée de rides concentriques, obsolètes, onduleuses, irrégulières, et d'un grand nombre de tubes couchés sur la coquille et dirigés parallèlement au rayon de courbure des bords de la valve. Ces tubes sont ordinairement un peu plus épais à leur origine qu'à leur extrémité et longs de 2 à 3 millimètres; quand ils sont plus longs, ils sont plus minces, plus cylindriques et souvent recourbés en plusieurs sens; ils sont en général grossièrement disposés en quinconce, bien que leur disposition n'offre rien de très-régulier et varie plus ou moins pour chaque individu. Bord cardinal ordinairement un peu plus court que le diamètre transverse, souvent garni d'une area très-surbaissée, dont la surface est parallèle au plan qui passe par les bords de la coquille, en sorte qu'elle est entièrement à découvert, quand celle-ci est posée sur sa valve dorsale. M. de Verneuil fait observer en outre, que cette area est souvent plus courte que le bord cardinal et qu'aux extrémités latérales la charnière est semblable à celle des *Productus* ordinaires. Fente triangulaire étroite et fermée par un *pseudo-deltidium* légèrement bombé. Oreillettes applaties, peu distinctes; leur bord cardinal est longé par une rangée de tubes semblables à ceux du reste de la coquille, mais dirigés en arrière; chez aucun des nombreux individus de cette espèce que j'ai eus à ma disposition, ces tubes ne se sont trouvés placés immédiatement sur l'arête : en examinant attentivement des échantillons bien conservés il est facile de s'assurer qu'il existe toujours un petit espace libre entre ce bord et l'origine des tubes. L'intérieur de la valve dorsale ne présente rien de remarquable; il s'y trouve deux petites apophyses hépatiques très-rapprochées du crochet; le reste de la surface est hérissé d'un nombre très-considérable de petites pointes.

Valve ventrale assez peu concave, garnie de rides concentriques irrégulières, semblables à celles de la valve opposée, mais ordinairement plus lamelleuses. Les tubes y manquent souvent et y sont remplacés par des petites fossettes correspondantes (Pl. XVI, Fig. 3, *b.*), mais lorsqu'ils existent, ils sont en tout semblables à ceux de la valve opposée et se dirigent dans le même sens (Pl. XVI, Fig. 3, *e.*). Area très-étroite, découverte et renversée en avant. *Pseudo-deltidium* étroit, uni intimement à celui de la valve dorsale. Dent cardinale bifide, soutenue par une lame médiane saillante, occupant les trois quarts de la longueur totale de la coquille; apophyses hépatiques ovales, lisses; callosités réniformes très-développées

entourées d'une crête saillante, bordée elle-même d'un sillon parallèle et étroit; surface interne hérissée sur ses bords de quelques aspérités oblongues, assez épaisses et d'un grand nombre d'autres beaucoup plus fines, irrégulièrement distribuées sur les parties médianes (Pl. XVI, Fig. 3, *c.*).

Dimensions. Longueur 20 à 30 millimètres. Rapports de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 110 : 43 : 27. — A dix millimètres du crochet on compte 10 à 12 tubes dans un espace de dix millimètres.

Rapports et différences. Ainsi que le fait très-judicieusement observer M. de Verneuil, cette espèce est véritablement placée sur la limite des genres *Productus* et *Chonetes* et le nom qu'elle a reçu dès l'origine, indique la place équivoque et douteuse que lui assignait son auteur. En effet, d'un côté elle présente la double area des *Chonetes*, et de l'autre, les nombreux tubes de la surface des *Productus*. Pour la placer dans le premier de ces genres, il faudrait renoncer à la manière si simple et si nette dont je l'ai caractérisé avec le savant paléontologiste que je viens de citer, en le limitant aux coquilles qui n'ont des tubes que sur l'arête supérieure de l'area; mais en la faisant entrer dans les *Productus*, son nom devient un véritable non-sens et donne lieu à un pléonasme vicieux que je propose de faire disparaître, en la dédiant au savant géologue qui le premier l'a décrite. J'ai eu tort de confondre anciennement cette espèce avec le *P. spinulosus*, dont elle diffère par l'absence complète de côtes longitudinales sur sa valve dorsale. M. de Buch est tombé dans la même erreur que moi, relativement à ce *Productus*, auquel je rapporte les *Leptæna caperata* et *fragaria, var.* Sow., que j'ai trouvées en grande abondance dans le schiste dévonien supérieur de Chaudfontaine, près de Liége. Ces *Productus* y sont, comme en Angleterre, souvent déformés et privés de leur test qui a été remplacé par de la limonite pulvérulente, que le moindre souffle emporte quand elle est sèche, en ne laissant qu'un moule plus ou moins imparfait. Il en est de même des *P. scabriculus, laxispinus* et *membranaceus*, Phill. Cette dernière espèce a évidemment été créée sur une valve ventrale non tubuleuse, dont une partie des caractères ont été effacés par la fossilisation. Quant aux deux autres, il faut bien se garder de les assimiler aux espèces carbonifères dont elles portent le nom et avec lesquelles elles n'ont que des rapports très-éloignés. D'ailleurs, la plupart de ces espèces n'ont été établies que sur des échantillons très-imparfaits et exigent une revision

rigoureuse de la part de leurs auteurs. Le *P. Murchisonianus* se distingue très-facilement de l'espèce précédente par son area, par l'insertion moins profonde de sa valve ventrale, par le nombre moins considérable de ses tubercules et par ses rides transverses. Il n'est pas toujours aussi facile à séparer du *P. subaculeatus*. Néanmoins ce dernier est ordinairement plus renflé, même quand il est plus petit; en même temps ses tubercules sont beaucoup moins nombreux et plus épais.

Gis. et loc. Ce petit *Productus* est l'une des coquilles les plus caractéristiques du système dévonien et se trouve souvent en très-grande abondance dans l'étage supérieur de ce système. L'étendue de sa distribution géographique est immense, et je ne connais que le *P. semireticulatus* du système carbonifère, qui puisse lui être comparé sous ce rapport; il mérite d'être pris en sérieuse considération par les géologues. En effet, on ne le rencontre pas seulement en Europe depuis les rives de la Petschora jusque dans le Nord de la France, mais aussi dans une grande partie de l'Amérique septentrionale et jusque dans l'Australie. Partout il caractérise le système dévonien, et y est presque toujours accompagné du *P. subaculeatus*, qui n'en est peut-être qu'une variété assez constante. M. de Keyserling l'a rapporté des couches dévoniennes des rives du Wol et de l'Ouchta, affluent de l'Ishma. M. de Verneuil le cite des calcaires dévoniens des rives du Volkof, des bords du lac Ilmen, de Veroneje et de Zadonsk sur le Don. Il se trouve, dit-il, sur les deux bords du vaste bassin où s'est fait le dépôt carbonifère du Valdaï et de Moscou, et prouve la contemporanéité des masses minérales qui forment l'axe de la Russie centrale, avec les couches dévoniennes du Nord, si différentes sous le rapport de leur composition minéralogique. On le rencontre encore dans le schiste dévonien de Petherwin en Devonshire; ce schiste et ses fossiles sont identiques avec ceux de Chaudfontaine, à tel point, qu'il serait impossible à l'œil le plus expert de découvrir la moindre différence entre les échantillons de l'une et de l'autre localité, et de les distinguer sans avoir recours aux étiquettes. Enfin ce *Productus* est renfermé dans le schiste dévonien supérieur des environs de Chimay et de Couvin, et dans le calcaire de même formation de Gerolstein, de Pafrath, de Chimay, de Namur et du Bas-Boulonnais. Je l'ai reconnu sur une plaque de calcaire rougeâtre provenant de la terre de Van Diemen, où il se trouve associé au *Spirifer Chee-Hiel*, de Kon. et sur un échantillon de grès jaunâtre de ce même pays. La coquille

ayant été entièrement dissoute, ce grès ne conserve que les empreintes interne et externe de chacune des deux valves, ce qui a donné lieu à la formation d'un moule intérieur entièrement isolé que l'on parvient à dégager avec la plus grande facilité, par un coup de marteau convenablement appliqué. C'est un moule semblable que j'ai représenté Pl. XVI, Fig. 3, *c*. Il est probable que dans ce dernier pays, comme partout ailleurs, les roches qui renferment le *P. Murchisonianus* appartiennent au système dévonien.

Une variété de cette espèce, qui se distingue par une légère dépression sur la valve dorsale, a utilement servi à Sir Roderick Murchison et à MM. de Verneuil et de Keyserling, pour placer parmi les dépôts dévoniens les calcaires problématiques qui occupent le pays compris entre Odoieff et Krapivna, et qui sont si près de la limite des systèmes carbonifère et dévonien, qu'on a de la peine à dire auquel des deux ils appartiennent.

Explication des figures. Pl. XVI, Fig. 3, *a*. Individu provenant du grès dévonien de la Terre de Van Diemen, vu du côté de la valve dorsale. Dessin fait d'après une contre-empreinte prise sur un échantillon de la collection de Minéralogie du Muséum de Paris.

Fig. 3, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 3, *c*. Moule intérieur provenant de la même localité, vu du côté de la valve ventrale. De ma collection.

Fig. 3, *d*. Echantillon un peu restauré, provenant du schiste dévonien supérieur de Chimay, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 3, *e*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 3, *f*. Echantillon garni d'une partie de ses tubes provenant du schiste dévonien supérieur de Chaudfontaine, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

45. PRODUCTUS SUBACULEATUS.

Pl. XVI, Fig. 4, *a*, *b*, *c*, *d*.

Productus subaculeatus. Murch. 1840. *Bull. de la soc. géol. de France*, vol. XI, p. 255, pl. 2, fig. 9, *a*, *b*, *c*.

Leptæna fragaria J. DE C. SOW. 1840. *Trans. of the geol. soc. of London*, 2nd, ser. vol. V, p. 704, pl. 56, fig. 5 et 6.

— *oblonga*? ID. *Ibid.* pl. 53, fig. 29, non PANDER.

Producta — PHILL. 1841. *Palæoz. foss. of Cornw.* p. 59, pl. 25, fig. 100.

Productus spinulosus (partim). DE KON. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.* p. 183, (fig. exclusis), non SOW.

— *subaculeatus* (partim). DE VERN. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 282, pl. 16, fig. 9, *a*, *b*, *c*.

— — (partim). DE KEYSERL. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 199 (fig. exclusis).

Coquille petite, semiglobuleuse, arrondie. Valve dorsale non sinué, très-gibbeuse, assez régulièrement voûtée. Sa surface est garnie d'un grand nombre de stries très-faibles d'accroissement et parsemée de tubes dont il ne reste ordinairement que la base circulaire ou faiblement allongée; la distribution de ces tubes n'a rien de régulier; ils sont cylindriques, assez courts et paraissent avoir suivi une direction parallèle à celle du rayon de courbure de la valve; ils sont plus serrés vers les oreillettes que sur le reste de la surface et y forment de chaque côté du crochet une rangée de 4 ou 5 tubes dirigés en arrière et longeant l'arête cardinale à une très-faible distance (PL. XVI, FIG. 4, *c*.) (1). Les oreillettes sont très-petites, très-minces et très-fragiles; elles sont terminées extérieurement par un angle obtus. Le bord cardinal est plus court que le diamètre transverse; en l'examinant avec soin, on y découvre presque toujours une area extrêmement étroite, divisée dans son milieu par une ouverture triangulaire oblitérée et cachée par le crochet, quand la coquille est posée sur sa valve dorsale. Cependant le crochet est très-court et peu proéminent, quoique renflé à une petite distance de son extrémité et assez nettement détaché des oreillettes par un brusque repl

La valve ventrale est entièrement embrassée par la valve dorsale,

(1) C'est au moins la disposition que j'ai observée sur plusieurs échantillons de ma collection.

dans laquelle elle est profondément insérée et dont elle suit tous les contours. Elle est garnie de quelques rides concentriques assez fortement prononcées sur les oreillettes et sur les côtés. Des petites fossettes arrondies y sont irrégulièrement distribuées et correspondent à l'origine des tubes de l'autre valve.

Dimensions. Longueur moyenne, 16 millimètres. Par rapport à la longueur, largeur, hauteur et épaisseur = 100 : 113 : 65 : 20. — Le nombre total des tubes varie de 25 à 50.

Rapports et différences. J'ai déjà dit que je n'étais pas éloigné de considérer ce *Productus* comme une variété assez constante de l'espèce précédente. Cependant elle s'en écarte assez généralement par la forme plus globuleuse de sa valve dorsale, par la concavité beaucoup plus forte de sa valve ventrale, et l'absence de tubes sur la surface de cette même valve, par la moindre largeur de son area, par l'éloignement plus considérable et la différence dans le mode d'insertion de ses tubes. Mais en réunissant un grand nombre d'échantillons, il n'en manque pas chez lesquels tous ou une partie de ces caractères sont plus ou moins effacés et dont la détermination est souvent très embarrassante. C'est probablement à cette difficulté qu'est due la création des *Leptæna fragaria* et *oblonga*. Néanmoins ce n'est qu'avec doute que je rapporte ce dernier à l'espèce dont il est ici question, bien que j'aie trouvé dans le schiste dévonien de Fraipont des échantillons qui ressemblent parfaitement à la figure que M. Sowerby en a publiée et qui appartiennent incontestablement au *P. subaculeatus*. Je ne suis pas de l'opinion de M. de Verneuil qu'il faille identifier avec cette espèce, le *Productus spinulosus* de M. Phillips, qu'on se gardera bien de confondre avec le *Productus* strié longitudinalement et décrit sous le même nom par J. Sowerby. La première de ces espèces, ainsi que celle du calcaire carbonifère des environs de Tournay que M. de Verneuil identifie aussi avec le *P. subaculeatus*, se rapportent selon moi au *P. aculeatus* que Martin a fait connaître depuis longtemps.

Gis. et loc. Ce petit *Productus* se trouve principalement en Belgique dans le schiste dévonien supérieur de Chaudfontaine, de Fraipont, de Dison et d'Amay et dans le calcaire de la même formation des environs de Huy, de Namur et de Feluy. Il se rencontre encore à Gerolstein et à Kirspenich dans l'Eifel, à Willmar sur la Lahn, à Ferques dans le Bas-Boulonais, à Gahard en Bretagne (M. Rouault), à Zadonsk sur le Don et aux environs de Voroneje (de Verneuil). Sa variété *fragaria* se trouve sur les bords du lac Ilmen et du Volkof

et dans le Devonshire. Il est souvent accompagné de l'espèce précédente, et comme celle-ci, il caractérise le système dévonien. Il ne remonte pas, comme semble le croire M. de Verneuil dans le système carbonifère ; ce savant paléontologiste aura sans doute confondu avec lui quelques échantillons de l'espèce suivante.

Explication des figures. PL. XVI, FIG. 4, *a*. Individu provenant du calcaire dévonien de Ferques, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 4, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 4, *c*. Le même vu du côté du crochet.

FIG. 4, *d*. Le même vu de profil.

46. PRODUCTUS ACULEATUS.

PL. XVI, FIG. 6, *a*, *b*, *c*, *d*.

Anomites aculeatus. MARTIN. 1809. *Petrif. Derbiens.*, p. 8, pl. 37, fig. 9 et 10, non SCHLOTH.

Productus — SOW. 1814. *Min. conch.* vol. I, p. 156, pl. 68, fig. 4, non DE KON.

— — KRUEGER. 1825. *Urw. Naturg.* vol. II, p. 215.

— — DEFR. 1826. *Dict. des sc. nat.* vol. XLIII, p. 349.

Leptæna echinata. DALMAN. 1827. *Vetensk. Akad. Handl.* p. 94.

Productus aculeatus FLEM. 1828. *Brit. anim.*, p. 378.

— — HOLL. 1830. *Petrefactenk.*, p. 362.

— — DESH. 1831. *Coq. caract. des terr.*, p. 119, pl. 8, fig. 3 et 4.

— — ID. 1832. *Encycl. méthod. Art. Vers*, vol. III, p. 848.

Producta spinulosa. PHILL. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 216, pl. 7, fig. 14, non SOW.

— *laxispina.* ID. *Ibid.* p. 215, pl. 8, fig. 13.

Productus aculeatus. DESH. 1836. 2^me^ *édit. des anim. sans vert. de* LAMK. vol. VII, p. 382.

— — DESOR. 1840. *Trad. de la Min. conch. de* SOW. p. 105, pl. 50-68, fig. 7 et 8.

Productus aculeatus. v. Buch. 1841. *Abhandl. der K. Akad. der Wissens. zu Berlin*, Theil I, p. 27, *non id.* p. 35.

— *gryphoïdes.* de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg*, p. 182, pl. 7bis, fig. 2, *a*, *b*; pl. 9, fig. 1, *a*, *b*, *c*, et pl. 12, fig. 12 *a*, *b*, *c*.

Producta aculeata. M'Coy. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 106.

— *laxispina.* Id. *Ibid.* p. 111.

Productus gryphoïdes. de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 275, pl. 18, fig. 7.

Coquille de moyenne taille, un peu plus longue que large. Valve dorsale assez gibbeuse, régulièrement voûtée, non-sinuée, garnie du côté du crochet d'un certain nombre de tubercules allongés, assez peu prononcés et percés à leur partie antérieure d'une petite ouverture très-souvent cicatrisée. Vers la moitié antérieure, les tubercules sont encore beaucoup plus allongés et se transforment même ordinairement en des côtes longitudinales, épaisses et plus ou moins régulières, suivant le nombre de tubes qui y prennent naissance. Le crochet est très-recourbé, pointu et projeté au delà du bord cardinal. Celui-ci est plus court que le diamètre transverse et n'offre pas la moindre trace d'area. Les oreillettes très-minces et très-fragiles manquent généralement chez les individus entièrement isolés; elles sont petites et un peu enroulées dans le sens de leur largeur et légèrement plissées dans le sens opposé; c'est sur ces plis que l'on remarque quelquefois deux ou trois tubes verticaux, implantés très-près du bord cardinal.

La valve ventrale est très-concave et très-rapprochée de l'autre valve, dont elle suit tous les mouvements. Les ornements de sa surface sont analogues à ceux qui garnissent la surface de la valve dorsale. Cependant elle est souvent encore chargée d'un grand nombre de lamelles concentriques très-minces et très-serrées, entre lesquelles surgissent çà et là des tubes dont les traces sont ordinairement plus apparentes sur le moule extérieur que sur la coquille même. Toutefois elles y sont encore plus prononcées que sur la valve dorsale, où elles sont à peine perceptibles sans l'aide d'un instrument grossissant.

Quoique le test de ce *Productus* ne soit pas très-épais, sa valve

dorsale semble néanmoins avoir abrité et nourri quelquefois un animal parasite semblable à ceux que M. Michelin a découvert dans l'épaisseur du test fibreux des *Placuna* et que M. Nardo a désignés sous le nom générique de *Vioa* (1). Ce parasite semble de préférence attaquer les jeunes individus et se développer avec eux (2).

Dimensions. Longueur 25 à 30 millimètres. Les rapports de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur sont = 100 : 96 : 56 : 11.

Rapports et différences. Presque tous les auteurs qui depuis Martin ont décrit ce *Productus*, ont cru avec lui, que son principal caractère consistait dans la forme particulière de ses tubercules et ont admis que contrairement à ce qui se remarque chez la plupart des espèces analogues, les tubercules du *P. aculeatus* sont dirigés d'avant en en arrière. J'ai déjà eu occasion de faire observer que ce caractère n'existe qu'en apparence. En effet, les filaments musculeux qui sont destinés à la secrétion des tubes, ne percent pas directement le test, mais le soulèvent partiellement et, protégés par lui, continuent à cheminer pendant quelque temps encore, en le soulèvant de plus en plus et en produisant ainsi un tubercule claviforme, dont l'extrémité antérieure leur donne enfin issue et sert de base à leurs tubes. Ce que je viens de dire, suffit pour faire comprendre que l'extrémité postérieure des tubercules doit être effilée et que Martin qui ignorait leur nature, a pu très-bien se tromper et donner un caractère qui n'a jamais existé. Les descriptions et les figures que Martin et J. Sowerby ont publiées, ayant été faites d'après des échantillons très-défectueux, je n'ai pas d'abord reconnu cette espèce et l'ai décrite en 1843 sous le nom de *P. gryphoïdes*, qui lui convenait surtout après la chute de ses oreillettes, chute du reste, très-fréquente chez elle. Je crois que le *P. spinulosus*, PHILL., qu'il ne faut pas confondre avec le *Productus* décrit sous le même nom par Sowerby, ainsi que le *P. laxispinus*, PHILL. ne sont que des variétés de celui dont il est ici question. Schlotheim ne connaissant pas l'ouvrage de Martin a désigné en 1813 sous le nom de *Gryphites aculeatus*, l'espèce que Sowerby a décrite plus tard sous celui de *P. horridus* qui doit lui être conservé. Cependant M. Keferstein a

(1) Voir la Revue zoologique de la société Cuvierienne, Février 1846.

(2) C'est ce qui semble résulter de l'observation que les divers embranchements de cet animal partent d'un point unique, situé très-près du crochet, circonstance qui me l'avait fait prendre d'abord pour l'empreinte des ovaires.

conclu de l'identité des deux noms, à l'identité des espèces et ne s'est pas donné la peine de vérifier l'exactitude de ce rapprochement, par la comparaison des descriptions ou des figures. M. de Buch, tout en distinguant les deux espèces, leur a conservé à chacune le même nom, ce qui est inadmissible en bonne nomenclature. Le *P. subaculeatus*, comme son nom l'indique déjà suffisamment, a beaucoup d'analogie avec le *P. aculeatus*, mais ce dernier est toujours plus petit et plus renflé ; la base de ses tubes est arrondie et jamais elle n'est confluente comme l'est celle de l'autre espèce, qui d'ailleurs ne possède jamais d'area.

Gis. et loc. Le *P. aculeatus* est une espèce exclusivement carbonifère, mais elle se trouve dans les couches moyennes et inférieures de ce système. Je l'ai rencontré abondamment dans le calcaire de Visé, mais très-rarement dans le calcaire et l'argile carbonifère de Tournay. Il paraît être aussi très-rare en Angleterre. On l'y trouve dans le calcaire de Backewell près de Buxton, dans le Derbyshire (Martin) et de Bolland dans l'Yorkshire (Phillips). Il existe aussi dans le calcaire carbonifère de l'Irlande (M'Coy) et de Russie aux environs de Buregi, gouvernement de Nowgorod (v. Buch), à Cosatchi-Datchi, revers oriental de l'Oural à l'est de Minsk (de Verneuil).

Explication des figures. Pl. XVI, Fig. 6, *a*. Individu adulte provenant du calcaire de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 6, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 6, *c*. Le même vu du côté du crochet.

Fig. 6, *d*. Le même vu de profil.

47. PRODUCTUS DISSIMILIS.

Pl. XVI, Fig. 5, *a*, *b*, *c*.

Coquille semiglobuleuse, arrondie, aussi longue que large. Valve dorsale très-bombée, gibbeuse, régulièrement recourbée sur elle-même, à côtés presque verticaux, à surface garnie dans sa partie médiane d'un grand nombre de tubercules allongés, ouverts ou surmontés dans leur milieu d'un tube cylindrique de 3 à 4 millimètres de long et incliné en avant. Ces tubercules assez régulièrement disposés

en quinconce, s'allongent progressivement à mesure que la coquille se développe. Ceux qui couvrent les flancs sont beaucoup plus courts, à base presque parfaitement circulaire, disposés avec plus de symétrie et beaucoup plus serrés les uns contre les autres. Dans les intervalles qui les séparent on remarque des lamelles concentriques très-minces et à peine visibles à l'œil nu. Les oreillettes sont petites, déprimées et couvertes de quatre ou cinq petits plis tuberculeux perpendiculaires au bord cardinal. Celui-ci est un peu plus court que le diamètre transverse et ne m'a jamais offert la moindre trace d'area. Le crochet quoique très-renflé à une petite distance de son extrémité, ne dépasse pas le bord cardinal.

Le caractère le plus essentiel de ce *Productus* réside dans les ornements de sa valve ventrale. La surface de cette valve est non-seulement garnie de fossettes qui correspondent aux tubercules de l'autre valve, mais en outre d'un grand nombre de côtes longitudinales, minces et dichotomes qui pourraient facilement induire en erreur, parcequ'il n'en existe pas la moindre trace sur la valve dorsale. Aussi serait-on tenté d'en faire une autre espèce, si on ne parvenait pas à observer les deux valves simultanément sur le même échantillon. La valve ventrale est très-concave et suit de près les mouvements de la valve opposée.

Dimensions. Longueur 20 millimètres. Rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 100 : 70 : 20.

Rapports et différences. Par sa valve dorsale ce *Productus* se rapproche du *P. Murchisonianus* dont il se distingue néanmoins par une épaisseur plus considérable et par le nombre et la différence dans la forme de ses tubercules. Sa valve ventrale ressemble à celle du *P. Cancrini*, mais elle est beaucoup plus bombée. Lorsque les deux valves sont réunies et visibles à la fois, il est impossible de le confondre avec aucune autre espèce.

Gis. et loc. Je n'ai encore recueilli ce *Productus* que dans le calcaire dévonien des environs de Chimay. Il y est très-rare.

Explication des figures. Pl. XVI, Fig. 5, *a*. Individu vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 6, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 6, *c*. Le même vu de profil.

48. PRODUCTUS GOLDFUSSII.

Pl. XI, Fig. 4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, et Pl. XV, Fig. 4, *a*, *b*.

Spondylus Goldfussii. z. Muenster. 1839. *Beitr. z. Petrefactenk.* vol. I, p. 43, pl. 4, fig. 3, *a*, *b*.

— — Id. 1843. *Ibid. Zweite Auflage*, p. 65, pl. 4, fig. 3, *a*, *b*.

Productus horridus jun. Geinitz. 1846. *Grundr. der Versteinerungsk.* p. 521, pl. 22, fig. 9 et 10, non Sow.

Coquille allongée, à contour ovoïdal. Valve ventrale faiblement mais assez régulièrement bombée. La surface entière est hérissée d'un grand nombre de tubes épais, irrégulièrement distribués et de même diamètre, quelle que soit la place qu'ils occupent. Ces tubes d'une longueur de 3 à 5 millimètres, sont remarquables par leur direction anormale ; en effet, après avoir percé verticalement la surface, ils se recourbent brusquement en arrière en se recouvrant les uns les autres et quelquefois même en s'entrelaçant ou en entourant d'autres corps qu'ils ont pu atteindre. Ce sont les tubes du crochet, qui semblent avoir plus spécialement joui de cette dernière faculté ; chez l'individu que j'ai représenté (Pl. XI, Fig. 4, *b*), ils enveloppent un fragment d'un gros tube de *P. horridus*, posé obliquement audessus du bord cardinal. Les oreillettes semblent être très-petites et très-fragiles, car tous les échantillons que j'ai eus à ma disposition, les avaient perdues. La valve ventrale est arrondie et légèrement concave ; sa surface est hérissée de tubes tout à fait identiques quant à leur forme, avec ceux de l'autre valve, mais leurs extrémités se dirigent toutes d'une manière plus ou moins régulière vers un point situé à peu près vers le milieu de la valve (Pl. XI, Fig. 4, *b*.).

La surface interne de la valve dorsale ne présente rien de particulier et est beaucoup plus lisse qu'on ne devrait s'y attendre, à cause du nombre considérable et de la grosseur de ses tubes et du peu d'épaisseur de son test. Toute cette surface est finement granulé et percé d'un nombre assez considérable de petites ouvertures dont chacune correspond à l'origine d'un tube. Les apophyses hépatiques sont très-petites ; les impressions musculaires sont entièrement oblitérées (Pl. XI, Fig. 4, *c* et Pl. XV, Fig. 4, *b*.). L'intérieur de la valve ven-

trale ressemble beaucoup à celui de la même valve du *P. Murchisonianus*. Une dent médiane assez forte, dont je ne connais pas l'extrémité, sert à son articulation avec la valve dorsale ; cette dent est soutenue par une crête peu saillante, n'occupant que le tiers de la longueur de la valve ; de chaque côté de cette crête s'élèvent des petites apophyses hépatiques, obtuses semilunaires, auxquelles se rattachent latéralement les callosités réniformes qui sont très-grandes et bordées d'un bourrelet étroit. Le reste de la surface est granulé ; les granulations du bord antérieur sont un peu plus fortes que celles de la partie médiane. On ne remarque aucune trace d'ouverture, bien que la valve soit hérissée de tubes (PL. XI, FIG. 4, *d* et PL. XV, FIG. 4, *a*.).

Dimensions. Longueur 25 millimètres. Par rapport à la longueur, largeur, hauteur et épaisseur = 100 : 85 : 36 : 24.

Rapports et différences. Ce *Productus* que de Münster n'a placé parmi les *Spondylus*, que parce qu'il a cru qu'il possédait la faculté d'adhérer aux corps sous-marins, se distingue de tous ses congénères par la direction et la forme de ses tubes. En effet, tandis que chez toutes les autres espèces ces tubes sont dirigés ou verticalement ou obliquement en avant, ils sont ici renversés en arrière et tellement inclinés qu'ils sont presque couchés sur la coquille. Ce caractère suffirait pour empêcher qu'on ne le confondit avec le *P. horrescens*, qui a aussi ses deux valves hérissées de tubes, si ce dernier n'en différait en outre par sa taille, par sa hauteur et par la présence de son area. Je suis porté à croire que les petits moules internes que M. Geinitz a représentés sous le nom de *P. horridus junior*, et que j'ai aussi fait figurer (PL. XV, FIG. 4, *a*, *b*.) se rapportent au *P. Goldfussii*.

Gis. et loc. Ce *Productus* n'a encore été trouvé que dans le Zechstein des environs de Gera, où il est associé aux *P. horridus* et *Cancrini*. Comme ces derniers, il caractérise les assises inférieures du système permien. Il est très-rare.

Explication des figures. PL. XI, FIG. 4, *a*. Individu vu du côté de la valve dorsale. De la collection de M. Geinitz à Dresde.

FIG. 4, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 4, *c*. Moule intérieur de la valve dorsale, ayant conservé quelques tubes. De la collection de M. Geinitz.

FIG. 4, *d*. Surface interne d'une valve dorsale. De la collection de M. Geinitz.

FIG. 4, *e*. La même vue du côté de sa charnière.

Pl. XV, Fig. 4, *a*. Moule intérieur de la valve ventrale d'un jeune individu grossi, provenant du Zechstein de Gera. De ma collection.

Fig. 4, *b*. Le même vu du côté opposé.

H. *PRODUCTI HORRIDI.*

49. PRODUCTUS HORRESCENS (1).

Pl. XV, Fig. 6, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Productus calvus. Kutorga, 1842. *Verhandl. der K. russis. min. Gesells. zu St-Petersb.* p. 17, pl. 5, fig. 1, *a*, *b*, *c*.

— *horrescens.* Murch., de Vern. and de Keyserl. 1842. *On the geol. struct. of Russia and the Ural*, p. 15.

— *areatus.* Kutorga. 1844. *Verhandl. der K. russis. min. Gesells. zu St.-Petersb.* p. 97, pl. 10, fig. 5, *a*, *b*, *β*, *c*, *d*.

— *horrescens.* de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.* vol. II, p. 280, pl. 18, fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*.

— — de Keyserl. 1846. *Reise in das Petschora-Land*, p. 201.

« Après le *P. Cancrini*, la seconde espèce propre au système permien de la Russie, est celle que nous avons nommée *P. horrescens*, pour exprimer ses rapports avec le *P. horridus* du Zechstein d'Allemagne. La valve dorsale, quadrangulaire, presque aussi longue que large, et assez fortement recourbée sur elle-même, est divisée dans toute sa longueur par un sinus médian. Les côtés for-

(1) Comme je ne possède pas cette espèce, je me suis borné à transcrire l'excellente description qu'en a donnée M. de Verneuil dans le magnifique ouvrage sur la géologie de la Russie et de l'Oural, qu'il a publié l'année dernière avec Sir Roderick Murchison et avec M. le comte de Keyserling.

tement repliés, sont presque verticaux et la coquille semble avoir subi une pression latérale. Le bord cardinal lui-même est ployé à angle droit à ses extrémités. La surface des valves, dépourvue de stries longitudinales, est hérissée de tubes ronds, nacrés, de la longueur et de la grosseur d'une petite épingle, dont quelques-uns paraissent pointus et fermés à leur extrémité (1). Ils sont nombreux et serrés. Leur distribution n'a rien de régulier, et n'est pas coordonnée à des lignes transverses et concentriques. Ils sont plus serrés et plus gros sur les oreillettes que sur le reste de la coquille, et s'y implantent perpendiculairement, tandis que sur le dos ils sont inclinés en avant. Le bord cardinal est tantôt plus et tantôt moins large que le milieu de la coquille, sans que les autres caractères soient aucunement altérés. »

« La valve ventrale, plane dans sa partie viscérale, et repliée fortement sur les côtés, ainsi qu'à son bord antérieur, est hérissée d'un grand nombre de tubes spiniformes, couchés en avant et un peu plus petits que ceux de l'autre valve (2). Quelques plis transverses et concentriques s'y font quelquefois remarquer. A l'intérieur, elle possède une dent médiane qui pénètre sous le crochet de l'autre valve, et qui bouche l'ouverture deltoïde. »

« Ce que cette espèce offre de remarquable, c'est l'existence d'une petite area sur la valve dorsale ; cette area est divisée comme dans les coquilles térébratuliformes, par une ouverture médiane que ferme un *deltidium* d'une seule pièce. Quelque rare que soit cette circonstance dans les *Productus*, elle suffit pour indiquer les rapports intimes qui rattachent ce genre aux précédents »

« Après le caractère si important de l'area, cette belle espèce nous en offre un autre non moins intéressant. Le crochet de sa valve dorsale est tronqué obliquement et irrégulièrement, et présente une surface plane, comparable a certaines traces d'adhérence que l'on voit quelquefois sur le crochet des *Gryphées*. Il est difficile de ne pas

---

(1) Comme les tubes des *Productus* ne sont presque jamais entièrement conservés à l'état fossile, c'est encore une question s'ils étaient tous ouverts à leur extrémité. Nous pouvons affirmer que plusieurs de ceux du *P. horrescens* sont terminés par des pointes pleines et solides. Nous ajouterons que dans cette espèce les plus gros tubes sont pleins à l'intérieur, comme si l'animal, en en produisant de nouveaux avec l'âge, avait bouché et fermé les anciens (*Note de M. de Verneuil*).

(2) Nous appellons spécialement l'attention sur ce point, parceque quelques personnes pensent que dans les *Productus* la valve ventrale n'a jamais de tubes autres que ceux qui sont audessus du bord cardinal (*Id.*).

croire que cette troncature ait été faite par le contact d'un corps étranger ; car sa forme et sa position n'ont rien de constant, et il est très-probable que cette coquille adhérait par l'extrémité de son crochet, ou par des fibres extrêmement courtes qui passaient à la base de l'ouverture, avant qu'elle fut complètement fermée par le *deltidium* (1). Nous avons observé cette même troncature dans les individus de Kirilof comme dans ceux d'Ust-Vaga, ainsi que dans un échantillon recueilli dans les cailloux roulés de Krasnoborsk, sur la Dwina, c'est-à-dire dans des localités éloignées les unes des autres de plus de deux cents verstes. »

« *Dimensions.* Longueur 40 millimètres. Par rapport à la longueur : largeur 0,92 à 1,00 ; hauteur 0,60 à 0,70. »

« *Rapports et différentes.* Cette espèce caractérisée par l'absence de stries longitudinales et de plis concentriques, ainsi que par la forme lobée de sa valve dorsale, doit être rapprochée du *P. horridus*, Sow.; mais quelque analogie qu'il y ait entre ces deux espèces, analogie que nous sommes loin de méconnaître et dont nous avons tenu compte lorsqu'il s'est agi de déterminer l'horizon géologique du grand système permien, il nous semble impossible de les réunir. En effet le *P. horridus* n'a jamais d'area ni de troncature au crochet. Le sinus de la valve dorsale est ordinairement plus profond et plus large, et enfin, ce qui le distingue éminemment, c'est que les tubes de la surface sont plus gros, moins nombreux et forment sur les oreillettes une rangée oblique à la charnière. Nous ne saurions donc partager l'opinion de M. Kutorga, qui dans un mémoire publié par la société minéralogique de Saint-Pétersbourg a cru pouvoir assimiler notre *Productus* de Russie au *P. calvus* de Sowerby, lequel n'est autre que le *P. horridus* (2). Il y a dans le *magnesian limestone* de Humbleton un petit *Productus* hérissé de tubes longs et serrés, très-voisin de notre espèce et qui sera bientôt décrit par M. King, directeur du Muséum de Newcastle, sous le nom de *Leptænalosia Morrisiana.* »

« *Gis. et loc.* Cette espèce joue dans les dépôts permiens de la

---

(1) J'ai déjà fait observer à la page 113, que je ne suis point d'accord avec M. de Verneuil sur l'interprétation de ce phénomène (L. D. K.).

(2) A l'époque à laquelle M. de Verneuil écrivait ces lignes, il ne connaissait pas encore le second travail de M. Kutorga, publié en 1844 par la même société, dans lequel cet auteur abandonne le nom de *P. calvus* sous lequel il avait d'abord déterminé le *P. horrescens*, pour le remplacer par celui de *P. areatus* (L. D. K.).

Russie le même rôle que le *P. horridus* dans le Zechstein de l'Europe occidentale. Elle en est l'analogue ou le représentant. Le *P. horridus*, d'après M. de Buch, est particulièrement caractéristique en Allemagne des assises inférieures du Zechstein, et de même en Russie notre *P. horrescens* appartient à la base du système permien. Il a été trouvé par M. Wangenheim von Qualen dans les mines de Santangulova, district de Bielebei, gouvernement d'Orenbourg; par nous à Nikefur sur la Dioma, même district; à Ust-Vaga au sud d'Archangel; près de Krasnoborsk, dans les cailloux roulés des conglomérats permiens et à Kicherma sur la rivière de Wel entre la Dwina et la Petchora. Dans les trois premières localités il est associé au *P. Cancrini*. Les nombreux échantillons que M. Blasius a rapportés de Kirilof, entre Vitegra et Vologda, prouvent qu'il est abondant dans les calcaires de cette localité, que nous considérons comme le prolongement de ceux d'Ust-Voga et de Pinega. »

Explication des figures. PL. XV, FIG. 2, *a*. Individu à charnière longue, provenant d'Ust-Voga, vu du côté de la valve dorsale. D'après M. de Verneuil.

FIG. 2, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale et montrant les petits tubes dont celle-ci est hérissée.

FIG. 2, *c*. Individu à charnière courte, vu du côté de la valve dorsale. D'après le même.

FIG. 2, *d*. Le même vu de profil.

50. PRODUCTUS LEWISIANUS.

PL. XV, FIG. 5, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Gryphites aculeatus, junior. SCHLOTH. 1813. *Taschenb. für die gesammte Miner., von* LEONHARD, vol. 7, pl. 4, fig. 3.

— — — ID. 1816, *Denks. der K. Akad. der Wissens. zu München*, vol. VI, Theil II, p. 31, pl. 8, fig. 25, *a*, *b* et fig. 26, A.

An Leptænalosia Morrisiana? KING. 1845. *Russia and the Ural mount., by* MURCH., DE VERN. and DE KEYSERL., vol. II, p. 281.

Coquille de taille médiocre, arrondie, subsemiglobuleuse. Valve dorsale divisée dans son milieu par un sinus assez étroit, peu profond et ayant son origine à une petite distance du crochet. Sa surface est traversée par des stries concentriques d'accroissement, très-fines et perceptibles à la loupe ; elle est encore hérissée d'un grand nombre de petits tubercules allongés, pointus, ouverts à leur extrémité antérieure et grossièrement disposés en quinconce. Le crochet est petit, régulièrement recourbé sur lui-même, non proéminent et pointu à son extrémité.

Oreillettes et valve ventrale inconnues.

Dimensions. Longueur 12 millimètres. Par rapport à la longueur, largeur = 100 : 102. — A dix millimètres du crochet on compte environ 20 tubercules dans un espace de dix millimètres.

Rapports et différences. Il serait très-difficile de distinguer ce *Productus* des *P. granulosus* et *Murchisonianus* sans l'existence du sinus de sa valve dorsale. Sa petite taille, ainsi que le nombre et la petitesse de ses tubercules, ne permettent pas de le confondre avec le *P. Genitzianus*. Je n'ai aucun doute que cette espèce ne soit identique avec celle que Schlotheim a représentée en 1813 dans le *Taschenbuch für die gesammte Mineralogie* de M. Léonhard et en 1816 dans les Mémoires de l'Académie de Munich (1) et qu'il a confondue avec le jeune âge du *P. horridus*, lequel en diffère essentiellement par la grosseur et le petit nombre de ses tubes. Je regrette vivement que M. King, directeur du Muséum de Newcastle, ait cru devoir me refuser la communication des deux nouvelles espèces de *Productus* qu'il se propose de décrire dans une Monographie des fossiles du système permien d'Angleterre ; car, ne connaissant ces espèces que de nom, il est très-possible et je dirai même très-probable, que mon *P. Lewisianus* soit identique avec son *P. Morrisianus*, et que ce dernier nom, en devenant ainsi un double emploi, ne doive être abandonné ; la publication d'une simple liste ne peut dans aucun cas servir de titre à la priorité.

Gis. et loc. Ce *Productus* a été recueilli dans le *magnesian-limestone* de Humbleton, par M. A. Lewis à qui j'en suis redevable et à qui l'amitié me fait un devoir de le dédier. Schlotheim l'a trouvé dans le *Zechstein* des environs de Gera. Je l'ai encore rencontré dans un échantillon de calcaire dolomitique très-blanc et très-

(1) Voir la synonymie.

friable dont la localité m'est inconnue. Il s'y trouve associé, comme ailleurs, au *P. horridus* et semble parconséquent appartenir aux assises inférieures du système permien. Ce *Productus* est rare partout.

Explication des figures. PL. XV, FIG. 5, *a*. Individu provenant de Humbleton, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.
FIG. 5, *b*. Le même grossi au triple de sa grandeur naturelle.
FIG. 5, *c*. Le même vu de profil.
FIG. 5, *d*. Le même grossi.
FIG. 5, *e*. Le même vu du côté du crochet.

51. PRODUCTUS MORRISIANUS.

Leptænalosia Morrisiana ? KING. 1845. *Russia and the Ural mountains, by* MURCH., DE VERN. and DE KEYSERL., vol. II, p. 281.
Productus Morrisianus. DE VERN. 1845. *Ibid.*, p. 253.

Ainsi que je viens de le dire, il est très-possible que cette espèce, dont il n'existe encore ni figure ni description et dont je ne connais le nom que parceque je l'ai trouvé inscrit au tableau des *Productus* publié par M. de Verneuil, soit identique avec le *P. Lewisianus*, qui comme elle, est sinué et hérissé de tubes.

52. PRODUCTUS GEINITZIANUS.

PL. XV, FIG. 3, *a*, *b*, *c*, *d*.

Coquille de taille moyenne, assez gibbeuse. Valve dorsale aussi longue que large, presque circulaire, divisée dans son milieu par un sinus large et peu profond, prenant naissance à une petite distance du crochet. Sa surface est garnie d'une grande quantité de petites lamelles concentriques très-minces, imbriquées, à bords onduleux; ces lamelles sont soulevées de distance en distance par des tubercules épais, allongés, ouverts dans leur milieu, assez régulièrement disposés en quinconce et par séries longitudinales; cette disposition est cause que les tubercules sont parfois tellement confluents que les séries ressemblent à des côtes hérissées de pointes. Cet effet se manifeste surtout

sur le prolongement antérieur. Sur la partie viscérale les tubercules sont beaucoup mieux isolés, plus petits et par suite plus nombreux pour le même espace ; ils ont servi de base à des tubes d'une longueur de 6 à 7 millimètres, inclinés en avant, effilés et probablement fermés à leur extrémité. Les flancs de la valve sont légèrement comprimés et à pente très-rapide. Les oreillettes sont larges et repliées à angle droit à leurs extrémités latérales ; elles sont garnies de quelques tubercules semblables à ceux de la surface dorsale. Le bord cardinal est aussi long que le diamètre transverse, mais il ne présente pas la moindre trace d'area. Le crochet est régulièrement recourbé, proéminent et pointu à son extrémité.

La valve ventrale est assez peu concave et laisse un grand espace libre entre elle et l'autre valve. Elle est subplane dans sa partie viscérale qui se raccorde au prolongement par une courbe bien prononcée. La surface est hérissée d'un grand nombre de tubes semblables à ceux de l'autre valve ; les tubes de la partie viscérale et du prolongement antérieur sont inclinés en avant, tandis que ceux de la série qui longe le bord cardinal, se dirigent obliquement en arrière.

Dimensions. Longueur 33 millimètres. Rapport de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 100 : 60 : 40. — A dix millimètres du crochet on compte 8 ou 9 séries longitudinales de tubercules dans un espace de 10 millimètres, tandis qu'a 20 millimètres on n'en compte plus que six dans le même espace.

Rapports et différences. Cette espèce a de si grands rapports avec le *P. horrescens* que je l'y eus bien certainement réunie, si M. de Verneuil à qui je l'ai montrée, ne m'eut donné l'assurance qu'elle en est bien distincte. Néanmoins, mes doutes ne sont pas entièrement dissipés et je crains, en la maintenant, d'avoir fait un double emploi. Cette crainte me parait d'autant plus fondée, que le *P. Cancrini* a été rencontré dans les mêmes couches que celles qui renferment le *P. Geinitzianus* et que rien ne s'oppose à ce qu'il y soit associé au *P. horrescens*, qui l'accompagne presque partout en Russie. Cependant le *P. Geinitzianus* n'a point d'area et son crochet n'est pas terminé par une facette plane, comme l'est souvent celui du *P. horrescens ;* le nombre de ses tubes parait aussi être moins considérable et leur distribution plus régulière. D'un autre côté, sa surface est garnie de petites lamelles d'accroissement, qui, selon M. de Keyserling, forment l'un des principaux caractères du *P. horrescens*,

lorsqu'il est dépouillé de ses tubes. Il se distingue du *P. horridus* par le grand nombre et la régularité de ses tubercules.

Gis. et loc. C'est à M. Geinitz de Dresde que je suis redevable de cette espèce et c'est à lui que je la dédie. Ce savant paléontologiste l'a recueillie dans le *Zechstein* des environs de Milbitz. Elle est très-rare.

Explication des figures. PL. XV, FIG. 3, *a*. Individu de grandeur naturelle, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 3, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 3, *c*. Le même vu de profil.

FIG. 3, *d*. Autre individu de la même localité, à tubercules un peu plus petits et un peu plus serrés.

53. PRODUCTUS HORRIDUS.

PL. XV, FIG. 1, *a*, *b*, *c*, *d*.

Versteinerter Gryphit. HOPPE. 1745. *Kurze Beschreib. verst. Gryph.*

Gespaltene Gryphiten. KNORR ET WALCH. 1768. *Naturg. der Verstein.*, vol. II, p. 79, pl. B, I, *d*, fig. 5, 6, et pl. D, III, fig. 1, 2, 3.

— — WALCH. 1769. *Das Steinreich*, vol. I, p. 160, pl. 19, fig. 2 (2me édition).

Gryphiten von Gera. SCHRÖTER. 1775. *Journ. für die Liebh. des Steinr.* vol. II, p. 326, pl. 1, fig. 5.

Gespaltene Gryphiten. ID. 1779. *Lithol. Real u. Verballexik.* vol. II, p. 309.

Geraïsche — WALCH. 1780. *Der Naturforscher*, vol. XIV, p. 24.

Gryphit mit Stacheln. SCHLOTH. 1810. *Gesells. naturf. Freunde zu Berlin*, vol. IV, p. 75, pl. 2, fig. 1.

Gryphites aculeatus. ID. 1813. *Taschenb. für die gesammte Miner.*, von LEONHARD, vol. 7, p. 58, pl. 4, fig. 1 et 2 (*fig. 3 exclusa*), non MART.

— — ID. 1820. *Die Petrefaktenkunde*, p. 293.

Productus horridus. J. SOW. 1823. *Min. Conch.* vol. IV p. 17, pl. 319, fig. 1.

— *humerosus.* ID. *Ibid.* p. 21, pl. 322.

Producta Hoppii. KÖNIG. 1825. *Icones sect. foss.* pl. 9, fig. 108.

Gryphæa aculeata. KRUEGER. 1825. *Naturg. der org. Reiche*, vol. I, p. 310.

Productus horridus. DEFR. 1826. *Dict. des sc. nat.* vol. XLIII, p. 351.

— *humerosus.* ID. *Ibid.* p. 352.

Productus calva. J. D. C. SOW. 1827. *Min. conch.* vol. VI, p. 115, pl. 560, fig. 2, 3, 4, 5, 6.

Leptæna — DALMAN. 1827. *Vetensk. Akad. Handl.* p. 94.

— *aculeata.* ID. *Ibid.* p. 94.

Productus aculeatus. BRONN. 1827. *Zeitschrift*, vol. II, p. 543, non SOW.

— *horridus* FLEM. 1828. *Brit. anim.*, p. 379.

— *humerosus.* ID. *Ibid.* p. 379.

Strophomena aculeata. BRONN. 1835. *Leth. geogn.*, vol. I, p. 86, pl. 3, fig. 1, *a*, *b*, *c*.

Producta aculeata. QUENSTEDT. 1835. *Archiv für Naturg. von* WIEGMANN, vol. II, p. 76, pl. 1, fig. 2, *a*, *b*, *c*.

Productus tubuliferus. DESH. 1836. 2^me^ *édit. des anim. sans vert. de* LAMK. vol. VII, p. 379, non FISCHER.

— *calvus.* ID. *Ibid.* p. 381.

— *aculeatus.* KURTZE. 1839. *De Petref. Mansfeld.* p. 33.

— *aculeatus.* v. BUCH. 1840. *Abhandl. der K. Akad. der Wissens. zu Berlin*, Theil I, p. 35, pl. 2, fig. 13, 14, 15, non id. p. 27.

— *horridus.* POTIEZ et MICHAUD. 1844. *Galer. des moll. de Douai*, vol. II, p. 27.

— — DESOR. 1845. *Trad. de la Min. conch. de* SOW. p. 352, pl. 211-319, fig. 1 et 2.

— *humerosus.* ID. *Ibid.* p. 354, pl. 214-322, fig. 1, 2, 3.

— *calvus.* ID. *Ibid.* p. 577, pl. 365-560, fig. 3, 4, 5, 6, 7.

— *costatus.* E. ROBERT. 1845. *Atlas géol. des voyag. de la comm. sc. du Nord*, pl. 19, fig. D, non SOW.

— . . . . . ? ID. *Ibid.* pl. 19, fig. J. M.

Strophomena aculeata. SCHMIDT. 1846. *Petrefacten-Buch*, p. 25, pl. 4, fig. 6, *a*, *b*.

Productus horridus. Geinitz. 1846. *Grundr. der Versteinerungsk.* p. 521, pl. 21, fig. 17, *a*, *b* et pl. 22, fig. 8.

Cette coquille est de toutes ses congénères, celle qui a le mieux conservé son éclat nacré. Elle est ordinairement transverse, d'une forme subpentagonale et assez gibbeuse. Sa valve dorsale est divisée dans son milieu par un sinus bien prononcé, ayant son origine à l'extrémité du crochet. Celui-ci est régulièrement recourbé sur lui-même, très-court et ne se projette que bien peu au delà du bord cardinal. Le prolongement antérieur est faible et n'occupe que le quart environ de la longueur totale de la valve. Les côtés sont très-rapides et forment avec le plan qui passe par les bords libres de la coquille, un angle d'environ 110°. Toute la surface est garnie d'un nombre très-considérable de rides concentriques d'accroissement, très-irrégulières et très-peu prononcées, surtout sur le prolongement antérieur ; ces rides sont interrompues çà et là par la racine des tubes qui au nombre de dix à douze ont hérissé la surface. La distribution de ces tubes n'a rien de régulier, mais leur diamètre est d'autant plus grand, qu'ils sont plus rapprochés du bord antérieur. Dans le jeune âge, les oreillettes sont petites et terminées à leurs extrémités par un angle droit, en sorte que le bord cardinal ne dépasse pas la longueur du diamètre transverse. A mesure que l'animal avance en âge, les oreillettes s'élargissent et s'étendent avec une telle rapidité au délà des bords latéraux, que chez les adultes leurs extrémités se terminent par un angle tronqué d'environ 65° et que le bord cardinal devient la partie la plus large de la coquille. La cause principale de cet accroissement si rapide, se trouve dans la présence des gros tubes dont elles sont garnies et dont chacun en soulevant une partie du test, occupe un certain espace que le bord du manteau est obligé de contourner, avant que l'animal puisse continuer la secrétion normale de sa coquille. Ces tubes dont l'épaisseur est d'autant plus forte qu'ils sont plus distants du crochet et dont les plus gros peuvent atteindre un diamètre de deux millimètres, sont au nombre de 10 à 12 et disposés de chaque côté en une série oblique à la charnière ; ils sont en général dirigés obliquement en arrière ; leur longueur est en rapport avec leur épaisseur et il n'est pas rare d'en rencontrer qui aient jusqu'à 6 et même jusqu'à 8 centimètres de long. Ils sont cylindriques dans toute leur étendue, possèdent le même éclat nacré que la coquille et sont

composés selon M. de Buch, du même nombre de feuillets que la partie du test qu'ils traversent. Bien que le filet musculeux qui les a secrétés et qu'ils ont servi à garantir contre les atteintes extérieures, ait été très-mince, il a du exercer une force assez puissante pour soulever et attirer à lui une partie du manteau et produire ainsi sur la valve ventrale, une dépression correspondante à l'origine de chacun des tubes de la valve opposée. La plupart des échantillons sont privés d'area ; chez un très-petit nombre elle existe à l'état rudimentaire ; elle est toujours très-surbaissée et atteint à peine un millimètre de hauteur même chez les adultes ; elle n'occupe guère plus de la moitié de l'étendue du bord cardinal, en sorte que celui-ci ressemble par ses deux extrémités, au bord cardinal des autres espèces.

Lorsqu'on enlève l'épiderme de la valve ventrale, on s'aperçoit facilement que le test est criblé d'une infinité de petites piqûres ou fossettes allongées, peu profondes, formées par l'empreinte des petites pointes dont l'intérieur de la couche enlevée a été hérissé au moment de sa formation et avant qu'il ait été recouvert d'une autre couche secrétée postérieurement. Si l'on continue la même opération, le même phénomène se présentera successivement, jusqu'à ce que l'on soit arrivé au moule intérieur. Celui-ci a été assez bien représenté par Sowerby, qui n'ayant pas reconnu son origine, ni son identité avec l'espèce qu'il avait déjà décrite sous le nom de *P. horridus*, lui a appliqué deux noms nouveaux, dont l'un fait assez bien ressortir la double gibbosité qui le caractérise et démontre à l'évidence que deux cavités assez profondes ont du être creusées dans les parties latérales de la valve. Immédiatement audessus de ces cavités se trouvent les impressions musculaires, profondes, arrondies et couvertes de fortes stries obliques. A en juger par la profonde excavation qu'elles ont produite sur le moule, les apophyses hépatiques ont du être très-saillantes et se sont trouvées placées entre les impressions musculaires; elles ont du n'être au contraire que peu ramifiées et n'être séparées que par un sillon médian peu profond. Le reste de la surface était hérissée de pointes fines, courtes et assez éloignées les unes des autres.

La valve ventrale, est très-peu concave dans sa partie viscérale ; cependant chez les adultes elle parait profondément insérée dans l'autre valve à cause de l'application presqu'immédiate de son prolongement antérieur contre la paroi de cette valve et de l'angle très-prononcé que forment ces deux parties entre elles. La surface est

ridée de la même manière que celle de la valve opposée ; néanmoins les rides y sont souvent mieux prononcées. Le bourrelet médian est ordinairement peu apparent, bien qu'il manque rarement d'une manière absolue. Une rangée de tubes semblables à celle qui garnit chacune des oreillettes de la valve dorsale, orne également les oreillettes de la valve ventrale, mais cette rangée, plus rapprochée du bord cardinal, est presque parallèle à ce bord. Ces tubes bien que se dirigeant assez généralement à peu près dans le même sens que ceux de l'autre valve, se sont, dans certains cas, recourbés immédiatement en avant, ainsi que j'ai pu l'observer sur l'échantillon que j'ai figuré PL. XV, FIG. 1, *b*. Mais en prenant cette direction opposée, ils paraissent n'avoir pu se développer librement, parce que les organes qu'ils abritaient n'ont peut être pas pu exercer les fonctions auxquelles ils étaient destinés, se sont flétris et en ont fermé les extrémités. Immédiatement en dessous de la rangée de tubes, on aperçoit la rangée oblique des dépressions ou des fossettes qui correspondent à l'origine des tubes qui surmontent les oreillettes de la valve dorsale. La structure interne de la valve ventrale est très-curieuse. Une dent bifide et épaisse sert à son articulation avec la valve opposée ; cette dent est soutenue par une crête médiane assez peu saillante, mais occupant les deux tiers de la longueur totale de la valve ; de chaque côté de cette crête s'élève une apophyse hépatique de forme triangulaire, composée de trois rameaux principaux ayant leur origine commune à l'angle supérieur et intérieur de chacune des deux apophyses ; chaque rameau parait être à son tour composé d'un nombre considérable de feuillets minces. Une rangée demicirculaire d'épines allongées et inclinées en avant, entoure inférieurement les apophyses hépatiques, en dessous desquelles, mais un peu en dehors se remarquent les callosités réniformes, dont la surface est irrégulièrement bosselée et dont les bords sont terminés par une crête saillante à l'intérieur. Le bord antérieur de la partie viscérale est hérissé d'un grand nombre de pointes épaisses, un peu allongées et inclinées en avant, dont la surface est granulé de la même manière que celle du prolongement antérieur et des autres parties internes non occupées par les diverses pièces que je viens de décrire (PL. XV, FIG. 1, *d*.).

Dimensions. Elles varient avec l'âge. C'est ainsi que la largeur, la hauteur et l'épaisseur d'un individu parfaitement conservé, mais dont la vie ne s'est pas prolongée au delà du développement complet de sa partie viscérale, sont à sa longueur, qui est de 26 millimètres,

= 100 : 110 : 65 : 50. Sur un individu bien adulte d'une longueur de 42 millimètres, ces dimensions sont dans les rapports suivants : 100 : 126 : 52 : 31. Ces différences dans les rapports dépendent principalement de l'élargissement des oreillettes et de l'extension du prolongement antérieur.

Rapports et différences. Après le *P. giganteus*, c'est celui-ci qui de tous ses congénères est le plus anciennement connu. Décrit en premier lieu par Hoppe, en 1745, il a été l'objet d'un grand nombre de travaux spéciaux, parmi lesquels se distinguent ceux de Walch, de Schlotheim et de M. Quenstedt. En tout temps, il a eu l'avantage de fixer l'attention par la longueur et la distribution de ses tubes, par leur éclat nacré bien prononcé et par celui de son test. En effet, ces deux caractères réunis suffisent pour le distinguer des *P. horrescens*, *Geinitzianus* et *sublœvis* qui sont les seuls avec lesquels il ait quelques rapports. Cependant M. Bronn trouve qu'il existe une si grande analogie entre le *P. horridus* et les *P. Scoticus* et *scabriculus*, qu'il lui a été impossible d'en indiquer les caractères distinctifs (1), quoique rien n'eut été plus facile, s'il s'était donné la peine de les comparer. M. E. Robert, persuadé comme tous les autres géologues, que les *Productus* qu'il a rapportés du Spitzberg provenaient d'un calcaire carbonifère, a confondu cette espèce avec le *P. sulcatus* dont il diffère par l'absence de toute trace de côtes sur sa surface.

Gis. et loc. Selon M. de Buch ce *Productus* est l'une des coquilles les plus caractéristiques des assises inférieures du Zechstein en Allemagne ; il s'y trouve principalement aux environs de Könitz, entre Bucha et Gosswitz ; à Gräfenhain et à Schmerbach près de Gotha ; aux environs de Gera, surtout à Röpsen, à Schwaare et à Corbusen près de Ronnebourg ; en Silésie à Lauban sur la Queis. Dans toutes ces localités on ne rencontre pas les *Fenestella* et autres polypiers si abondants dans les couches permiennes de Glücksbrunn et de la lisière méridionale du Thüringer Wald. Le *Productus horridus* existe encore en grande abondance et dans un état de parfaite conservation, à Büdingen en Vetteravie. En Angleterre il semble aussi n'appartenir qu'aux couches inférieures de la même formation.

---

(1) Après une semblable déclaration, doit on s'étonner encore de la confusion qui règne partout dans la synonymie des diverses espèces d'animaux fossiles mentionnées dans la *Lethœa geognostica* ?

Bredon dans le Derbyshire, Humbleton, Midderidge et Nosterfield sont les localités où on le recueille le plus abondamment. Je l'ai reconnu à tous ses caractères et principalement à ses tubes longs et nacrés, parmi les fossiles que M. E. Robert a rapportés de la rade de Bell-Sound au Spitzberg. Il s'y trouve dans un calcaire dolomitique noirâtre, très-compact, dans lequel il est associé aux *P. Cancrini* et *Leplayi*.

Explication des figures. Pl. XV, Fig. 1, *a*. Individu adulte provenant des environs de Gera, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 1, *b*. Le même en partie restauré, vu du côté de la valve ventrale.

Fig. 1, *c*. Moule intérieur d'un jeune individu provenant de Humbleton, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

Fig. 1, *d*. Intérieur de la valve ventrale d'un individu provenant des environs de Gera. D'après M. Geinitz.

I. *PRODUCTI MESOLOBI.*

54. PRODUCTUS MESOLOBUS.

Pl. XVII, Fig. 2, *a*, *b*, *c*.

Producta mesoloba. Phill. 1836. *Geol. of Yorks.* vol. II, p. 215, pl. 7, fig. 12 et 13, non id. 1841, *Palæoz foss. of Cornwall*, p. 61, pl. 125, fig. 102, *a*, *b*.

Productus mesolobus. de Kon. 1843. *Descript. des anim. foss. du terr. carb. de Belg.*, p. 198, pl. 12, fig. 8, *a*, *b*.

Leptæna mesoloba. Fahrenkohl. 1844. *Bullet. de la soc. des nat. de Moscou*, vol. XVII, p. 786.

Producta — M'Coy. 1844. *Syn. of the carb. limest. foss. of Ireland*, p. 112.

Productus mesolobus. de Vern. 1845. *Russia and the Ural mount.*, vol. II, p. 278, pl. 16, fig. 8, *a*, *b*.

Cette coquille, l'une des mieux caractérisées et des plus faciles à reconnaître, est transverse et entièrement dépourvue de côtes longitudinales. Sa valve dorsale est gibbeuse, géniculée vers le tiers de sa longueur et couverte jusqu'à cet endroit de plis transverses et concentriques. Un sinus médian bien prononcé, la divise dans toute sa longueur en deux parties égales ; mais ce qui la caractérise avant tout, c'est qu'au fond de ce sinus s'élève un bourrelet arrondi, dont le diamètre varie peu sur tout son trajet. Sa surface est parsemée de tubercules peu nombreux, mais assez gros et percés au sommet. Ils sont irrégulièrement distribués tant sur la partie viscérale que sur le prolongement. Il y en a toujours deux ou trois sur le bourrelet médian. Le crochet est petit, non proéminent. Le bord cardinal est droit et plus long que le diamètre transverse. Les oreillettes sont très-larges; leurs extrémités sont arrondies et prolongées au delà des bords latéraux ; elles sont souvent ornées d'une série oblique de 5 ou 6 petits tubercules insérés à leur base, c'est à dire sur leur ligne de jonction à la partie dorsale.

La valve ventrale est profondement insérée dans l'autre valve ; son disque viscéral est concave et forme avec le prolongement un angle presque droit ; sa surface offre en creux les mêmes ornements qui se trouvent en relief sur la valve dorsale, ce qui est cause que l'on pourrait facilement confondre le moule extérieur de cette valve avec la valve dorsale même. Cependant il s'en distingue par une forme un peu moins bombée et par l'oblitération de ses tubercules.

Dimensions. Longueur 30 millimètres. Rapport de la longueur : à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 156 : 56 : 23.

Rapports et différences. Par sa forme générale ce *Productus* ressemble au *P. plicatilis ;* par l'absence de stries longitudinales et l'existence d'un certain nombre de tubercules épais irrégulièrement distribués sur sa surface et par la série oblique de tubes inserée sur ses oreillettes, il a des rapports avec le *P. horridus.* Il se distingue de l'un et de l'autre par son bourrelet médian. Le *P. Christiani* dont la forme est presque identiquement la même, s'en éloigne par sa forte taille et par les fines stries longitudinales dont sa surface est couverte et dont je n'ai jamais trouvé des traces sur la coquille du *P. mesolobus*, malgré le grand nombre d'échantillons que j'ai eu entre les mains. Ce *Productus* se trouve dans le Musée de l'Université de Bonn sous le nom de *P. corrugatus* Goldf.

Gis. et loc. Cette espèce n'est pas très-rare dans le calcaire carbonifère de Visé, mais il est difficile de l'en extraire intacte. Les

échantillons dont les deux valves sont entièrement dégagés, ont presque toujours perdu leurs oreillettes à cause de la faible épaisseur de la coquille et de la forte concavité de la valve ventrale. Elle est rare dans le calcaire et l'argile carbonifère de Tournay. Elle paraît l'être aussi partout ailleurs où elle a été rencontrée. On la cite du calcaire carbonifère de l'Irlande, du Derbyshire, de Queen's County et de Bolland en Yorkshire. M. de Verneuil dit qu'il ne la connaît en Russie que dans une seule localité, à Ilinsk sur le Tchusovaya (Oural). Elle s'y trouve dans des cherts ou silex impurs qui sont disséminés au milieu des couches du calcaire carbonifère. Cependant M. Fahrenkohl la cite du calcaire carbonifère des environs de Moscou. Je doute fort que l'espèce dévonienne que j'ai recueillie à Chimay et rapportée en 1843 au *P. mesolobus*, soit identique avec lui. Il est beaucoup plus petit, moins transverse, à sinus plus large et à tubercules arrondis et beaucoup plus petits. Il n'est donc pas bien certain encore que le *P. mesolobus* descende jusque dans les couches inférieures au système carbonifère, car la coquille du Devonshire que M. Phillips a décrite sous ce nom, en est différente et n'est très-probablement qu'un jeune individu de la *Leptæna depressa*. Je ne puis admettre avec M. Morris que l'*Orthis concentrica*, MUENSTER, soit identique avec le *P. mesolobus;* cette espèce me paraît devoir aussi se placer dans le genre *Leptæna*.

Explication des figures. PL. XVII, FIG. 2, *a*. Individu adulte provenant du calcaire carbonifère de Visé, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.

FIG. 2, *b*. Le même vu du côté de la valve ventrale.

FIG. 2, *c*. Le même vu de profil.

55. PRODUCTUS CHRISTIANI.

PL. XVII, FIG. 3, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

Cette belle et grande coquille rappelle parfaitement la forme de l'espèce précédente, bien qu'elle soit plus allongée et d'une taille beaucoup plus forte. Sa valve ventrale est très-bombée et régulièrement recourbée sur elle-même. Le sinus qui la divise dans son milieu est peu profond, mais il s'étend jusqu'à l'extrémité du crochet. Au fond de ce sinus, se trouve un bourrelet assez étroit et peu

saillant, dont le diamètre ne s'accroit que très-lentement. La surface est ornée de plis transverses, concentriques, assez irréguliers dans le tiers supérieur de sa longueur, qui correspond à sa *partie viscérale*. Ces plis s'effacent progressivement et sont remplacés sur le prolongement antérieur par des légères rides d'accroissement. Toute la surface est couverte en outre d'un nombre très-considérable de stries longitudinales extrêmement fines, très-régulières et à peine visibles à l'œil nu. Des tubercules peu nombreux, assez petits, faiblement allongés et percés à leur sommet, se trouvent épars sur la surface. La plupart sont insérés sur la partie viscérale, sauf 3 ou 4 qui garnissent le bourrelet médian. Le crochet est fortement recourbé sur lui-même et assez saillant. Les oreillettes sont grandes et séparées de la voûte dorsale par un pli assez brusque, au fond duquel on remarque une série oblique de petits tubercules arrondis, ouverts, ayant servi de base à autant de tubes. Il est probable que le bord cardinal est plus long que le diamètre transverse.

La valve ventrale est composée d'un disque viscéral applati, peu convexe, se raccordant au moyen d'une courbe très-prononcée au prolongement antérieur dont la direction est perpendiculaire à la sienne (Pl. XVII, Fig. 3, *e.*). La surface offre en creux exactement les mêmes ornements que ceux qui se trouvent en relief sur la valve dorsale et de même que celle de cette dernière, elle est très-finement striée en long ; elle ne parait pas avoir porté des tubercules.

Dimensions. La longueur est d'environ 70 millimètres. Les rapports de la longueur, à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur sont approximativement = 100 : 128 : 5 : 20.

Rapports et différences. Cette espèce pourrait être facilement confondue avec la précédente, dont elle possède la forme générale, si on ne faisait attention à sa taille et aux stries longitudinales dont sa surface est couverte et dont il n'existe jamais des traces sur la surface du *P. mesolobus*.

Gis. et loc. Ce magnifique *Productus* est encore très-rare. Je n'en connais que deux échantillons, dont l'un se trouve dans la collection de M. de Verneuil et dont l'autre m'a été donné par M. A. Lewis, qui par le grand nombre d'objets dont il a enrichi ma collection, a beaucoup facilité mes recherches et m'a rendu des services pour lesquels je ne saurais trop lui exprimer ma reconnaissance. Ce dernier provient du calcaire carbonifère du pays de Galles ; l'autre a été rapporté d'Angleterre par M. de Verneuil,

mais le lieu de provenance en est inconnu ; cependant comme la nature de la roche est la même pour l'un et pour l'autre, il est probable qu'ils proviennent tous deux d'une même couche.

J'ose espérer que l'auguste Souverain à qui les devoirs du trône ne font point oublier l'étude des sciences qui ont pour but de faire connaître la composition de notre globe, et les diverses révolutions auxquelles il a été successivement assujeti, daignera me permettre de lui dédier l'une des plus belles espèces du genre.

Explication des figures. PL. XVII, FIG. 3, *a*. Echantillon provenant d'Angleterre, vu du côté de la valve dorsale. De la collection de M. de Verneuil.

FIG. 3, *b*. Le même vu de profil.

FIG. 3, *c*. Le même vu du côté du crochet.

FIG. 3, *d*. Autre échantillon provenant du pays de Galles. Moule extérieur de la valve ventrale, vu en dessus. De ma collection.

FIG. 3, *e*. Le même vu de profil.

K. *PRODUCTI LÆVES.*

56. PRODUCTUS LEONHARDI.

PL. XVII, FIG. 4, *a*, *b*, *c*.

Producta Leonhardi. WISSMANN. 1841. *Beitr. zur Petrefactenk. von* MUENSTER, vol. IV, p. 18, pl. 6, fig. 21, *a*, *b*, *c*, *d*.

— *dubia*? MUENSTER. 1841. *Ibid.* p, 68, pl. 6, fig. 24.

— *alpina.* v. KLIPSTEIN. 1845. *Beitr. zur geol. Kenntn. der östl. Alpen*, p. 236, pl. 15, fig. 20, *a*, *b*, *c*, et fig. 21, *a*.

Petite coquille subquadrangulaire, gibbeuse. Valve dorsale fortement recourbée sur elle-même, quelquefois légèrement déprimée dans son milieu. Sa surface est entièrement lisse, sauf quelques

stries d'accroissement imperceptibles à l'œil nu (1) ; elle ne porte aucune trace de tubercule ni de tube. Les côtés sont assez rapides et les bords latéraux sont fréquemment droits ; souvent ils forment une courbe peu prononcée. Le crochet est pointu et assez proéminent. Les oreillettes sont petites, très-minces et très-caduques ; leurs extrémités sont ordinairement terminées par un angle obtus. Le bord cardinal est en général plus court que le diamètre transverse.

La valve ventrale est très-concave et très-rapprochée de l'autre valve. D'après M. v. Klipstein elle offrirait à l'intérieur des traces des bras spiraux, qui seraient séparés par une crête médiane destinée à renforcer la dent cardinale de la valve.

Dimensions. Longueur 10 à 12 millimètres. Rapports de la longueur à la largeur, à la hauteur et à l'épaisseur = 100 : 91 : 50 : 8.

Rapports et différences. Cette espèce se distingue de toutes ses congénères par l'absence de toute trace de tube et de côtes longitudinales sur sa surface ; cette structure anomale est cause que l'on conserve encore quelques doutes sur sa détermination générique. Le *P. dubius* Muenster, qui lui est associé, n'en paraît être qu'une variété.

Gis. et loc. Ce *Productus* est le seul qui se soit rencontré jusqu'ici dans des assises supérieures à celles du terrain palæozoïque. On le trouve fréquemment dans le dépôt de St.-Cassian, qui paraît appartenir à l'époque du *Muschelkalk*.

Explication des figures. Pl. XVII, Fig. 4, *a*. Echantillon légèrement grossi, vu du côté de la valve dorsale. De ma collection.
Fig. 4, *b*. Le même vu du côté opposé.
Fig. 4, *c*. Le même vu de profil.

RÉSUMÉ GÉOLOGIQUE.

En récapitulant les 56 espèces de *Productus* que je viens de décrire, on remarquera facilement qu'aucune ne passe d'un système géologique dans un autre et que parconséquent toutes sont caractéristiques du système auquel elles appartiennent. Parmi ces 56

(1) M. v. Klipstein prétend que la surface ne paraît lisse que parce que les coquilles ont été roulées ; il possède dit-il, quelques échantillons dont la surface est couverte de stries longitudinales dichotomes.

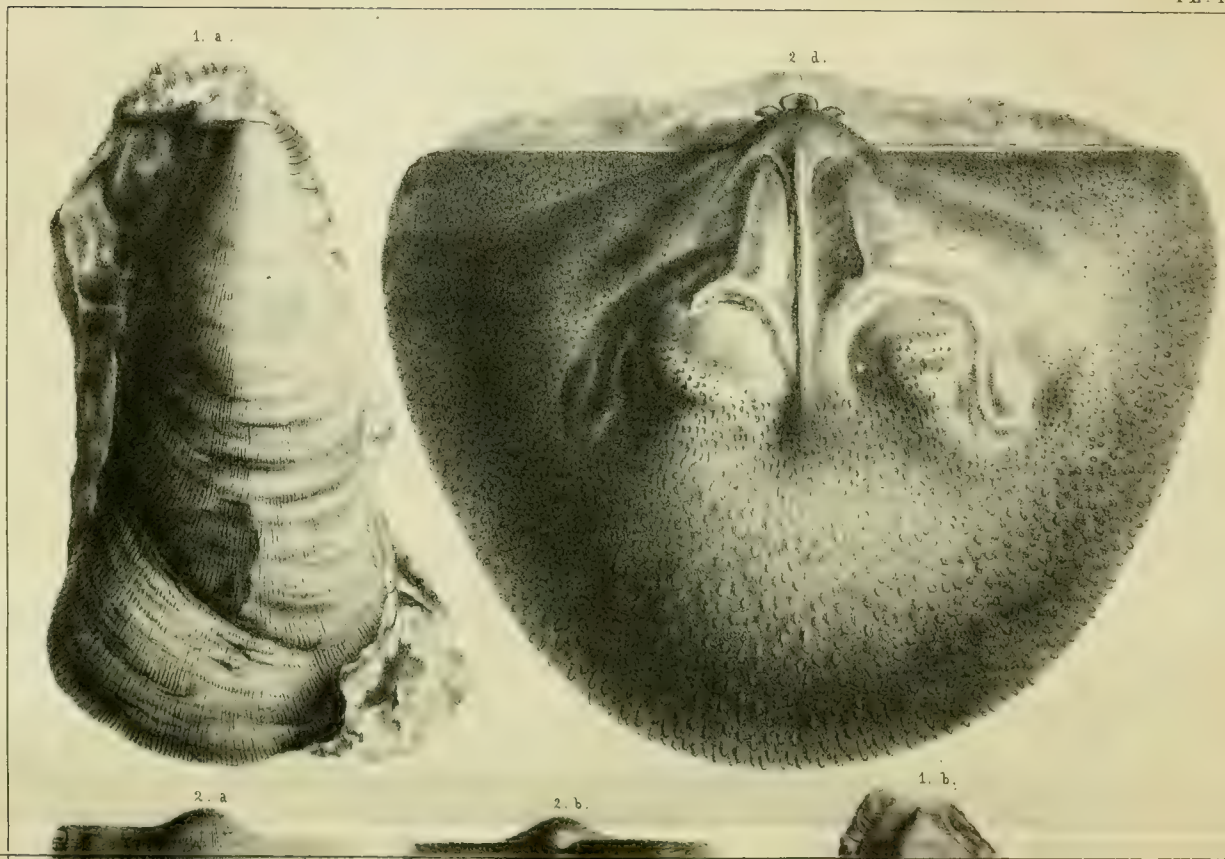
espèces, 3 appartiennent au système dévonien, 42 au système carbonifère, 10 au système permien (1) et une seule au muschelkalk. Voici comment elles se partagent sous ce rapport

SYSTÈMES

DÉVONIEN.		CARBONIFÈRE.		PERMIEN.		TRIASIQUE.	
	Pag.		Pag.		Pag.		Pa.
1. *P. Murchisonianus.*	245	1. *P. striatus.*	123	1. *P. Hemisphærium.*	155	1. *P. Leonhardi.*	27
2. — *subaculeatus.*	249	2. — *giganteus.*	128	2. — *Leplayi.*	178		
3. — *dissimilis.*	253	3. — *latissimus.*	137	3. — *Cancrini.*	208		
		4. — *margaritaceus.*	141	4. — *spiniferus.*	212		
		5. — *flexistria.*	144	5. — *Goldfussii.*	237		
		6. — *mammatus.*	146	6. — *horrescens.*	259		
		7. — *Cora.*	148	7. — *Lewisianus.*	262		
		8. — *arcuarius.*	152	8. — *Morrisianus.*	264		
		9. — *undiferus.*	155	9. — *Geinitzianus.*	id.		
		10. — *undatus.*	156	10. — *horridus.*	266		
		11. — *porrectus.*	158				
		12. — *proboscideus.*	160				
		13. — *Nystianus.*	163				
		14 — *genuinus.*	166				
		15. — *Medusa.*	169				
		16. — *plicatilis.*	171				
		17. — *sublævis.*	174				
		18. — *Boliviensis.*	177				
		19. — *expansus.*	181				
		20. — *semicticulatus*	185				
		21. — *costatus.*	192				
		22 — *Flemingii*	196				
		23. — *carbonarius.*	202				
		24. — *subquadratus.*	203				
		25. — *spinulosus.*	205				
		26. — *Villiersi.*	211				
		27. — *tessellatus.*	215				
		28. — *scabriculus.*	214				
		29. — *Humboldtii.*	218				
		30. — *pyxidiformis.*	220				
		31. — *pustulosus.*	222				
		32. — *Leuchtenbergensis.*	226				
		33. — *punctatus.*	228				
		34. — *fimbriatus.*	233				
		35. — *Deshayesianus.*	336				
		36. — *marginalis.*	238				
		37. — *Keyserlingianus.*	239				
		38. — *brachythærus.*	241				
		39. — *granulosus*	243				
		40. — *aculeatus.*	252				
		41. — *mesolobus.*	272				
		42. — *Christiani.*	274				

Il résulte de ce tableau que c'est dans le système carbonifère que le genre *Productus* pris le plus grand développement et que le nombre des espèces qui s'y trouvent est comparativement à celui que renferment les trois autres systèmes dans le rapport de 100 : 7, pour le système dévonien, de 100 : 23,81 pour le système permien et de 100 : 2,38 pour système triasique. (*Décembre* 1846.)

(1) Je crois devoir faire observer que quatre de ces espèces sont douteuses et devront peut être disparaître de la liste des *Productus*. Ce sont les *P. subquadratus piniferus*, *Morrisianus* et *Geinitzianus*.


1. a.
2 d.
2. a
2. b.
1. b.

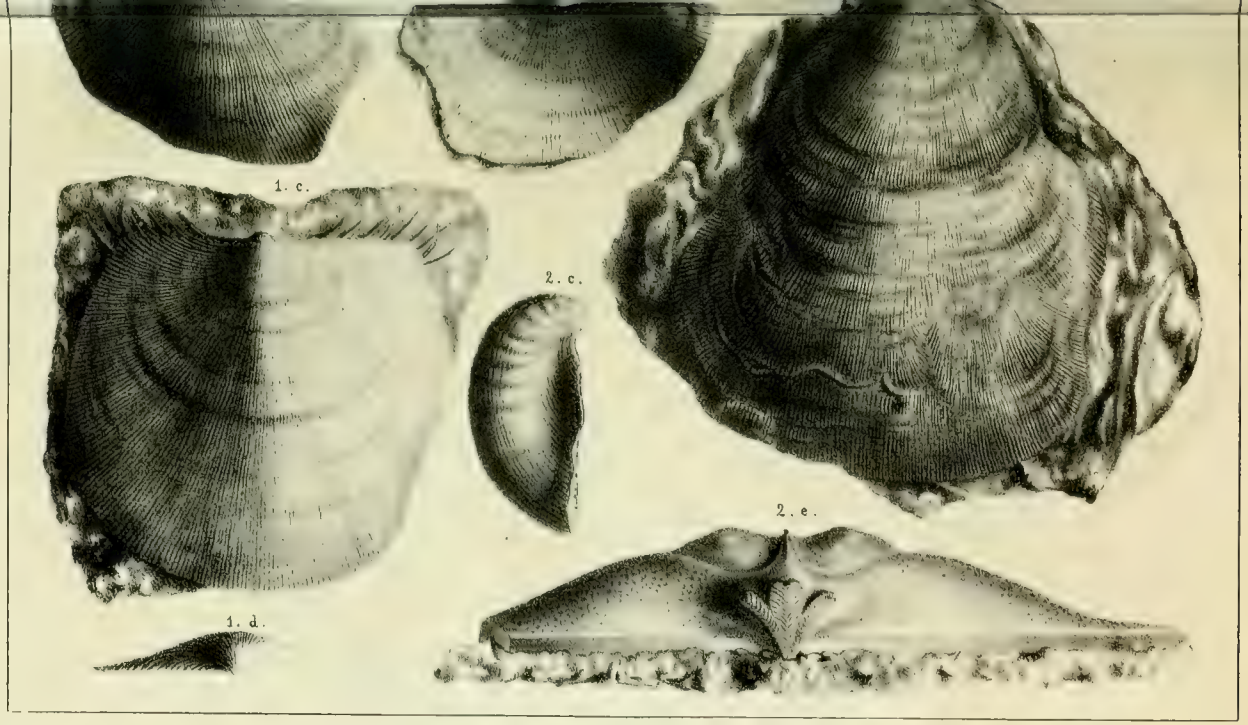


Fig. 1. Productus striatus. Fischer. sp. | Fig. 2. Productus giganteus. Martin. sp

NATURAL HISTORY

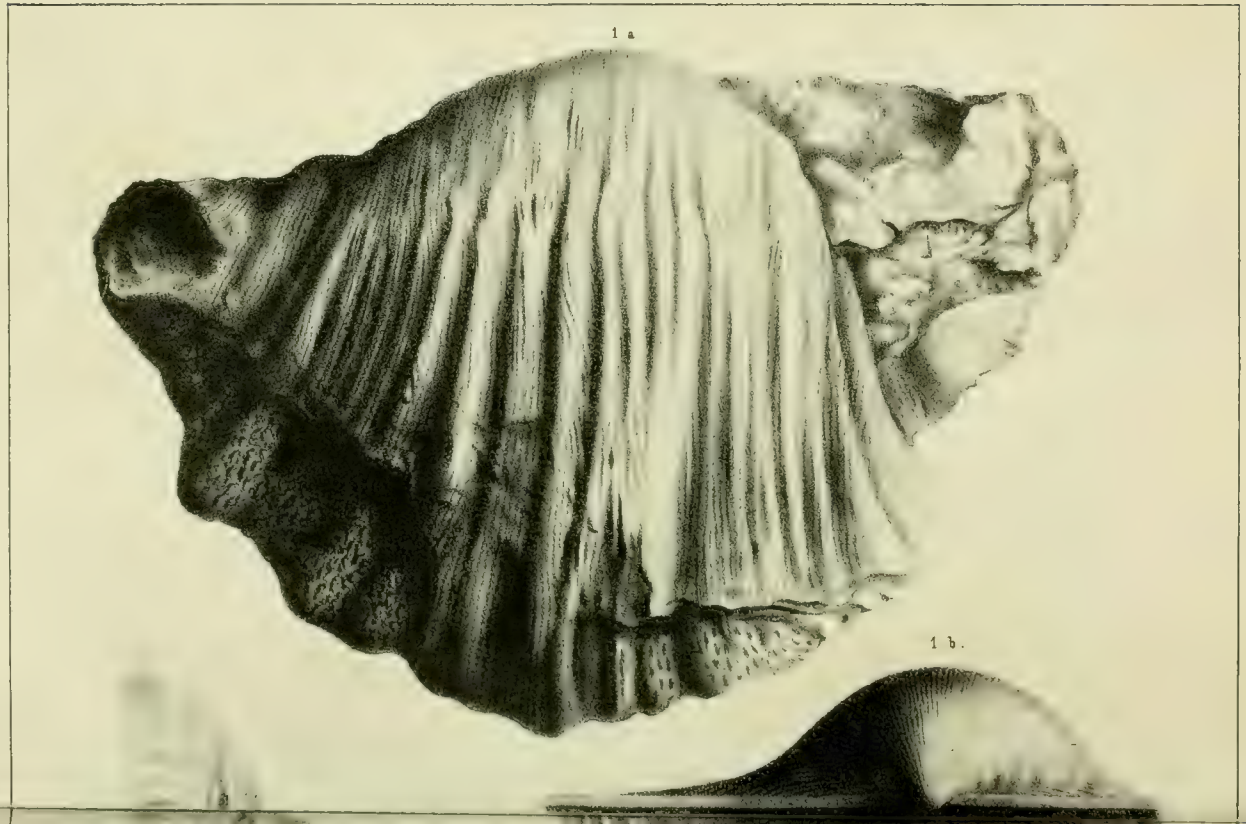
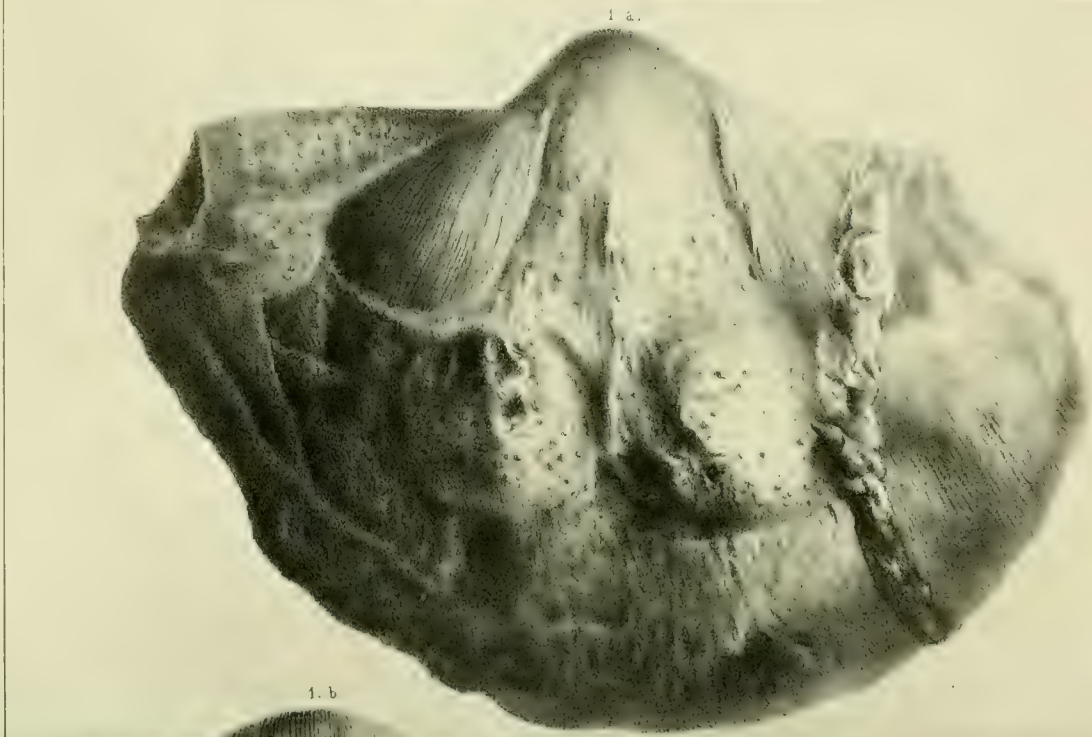

1 a.
1 b.

Fig. 1 Productus giganteus Martin. sp. | Fig. 2 Productus latissimus Sow.


1 a.
1. b

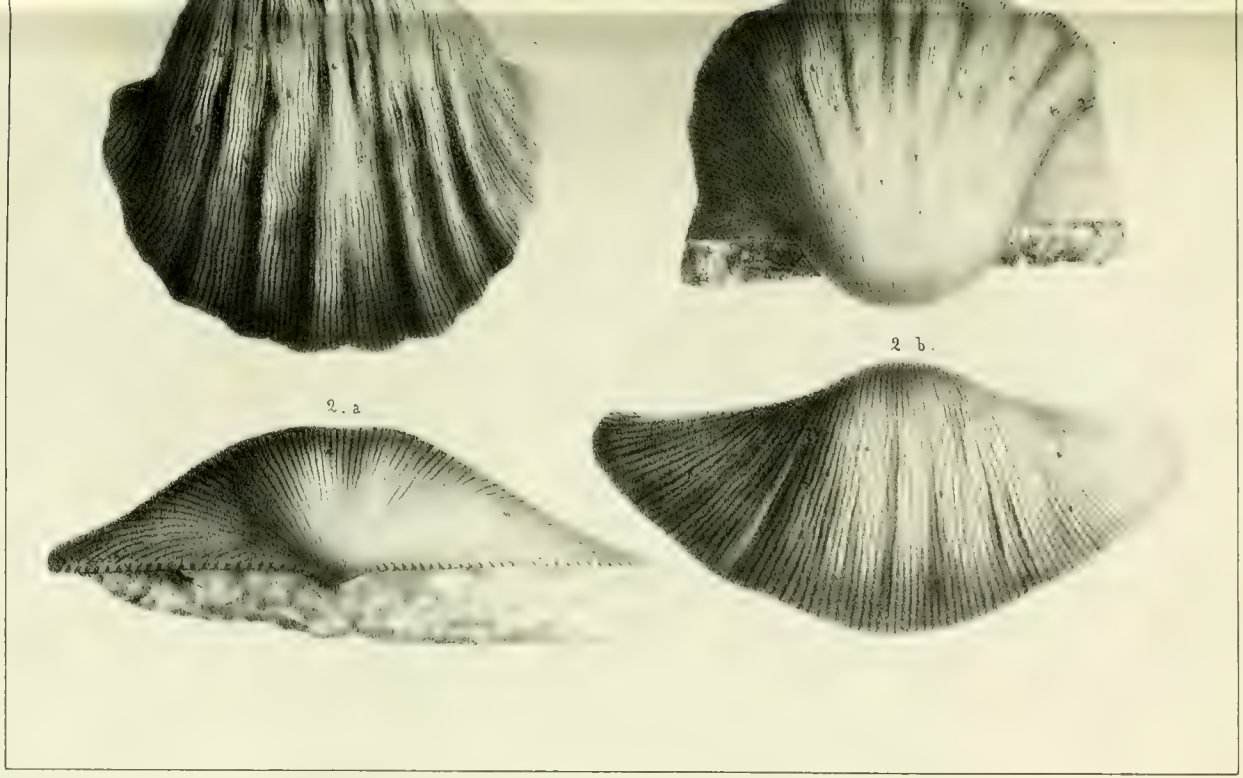
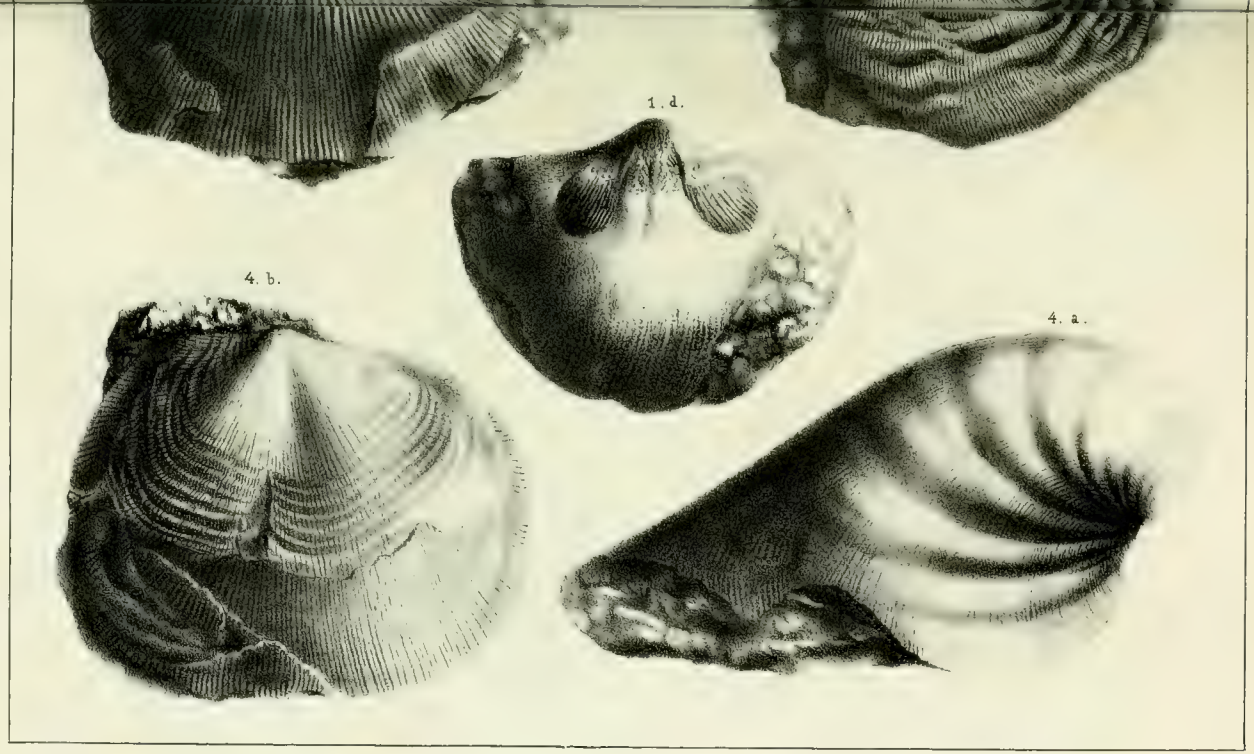
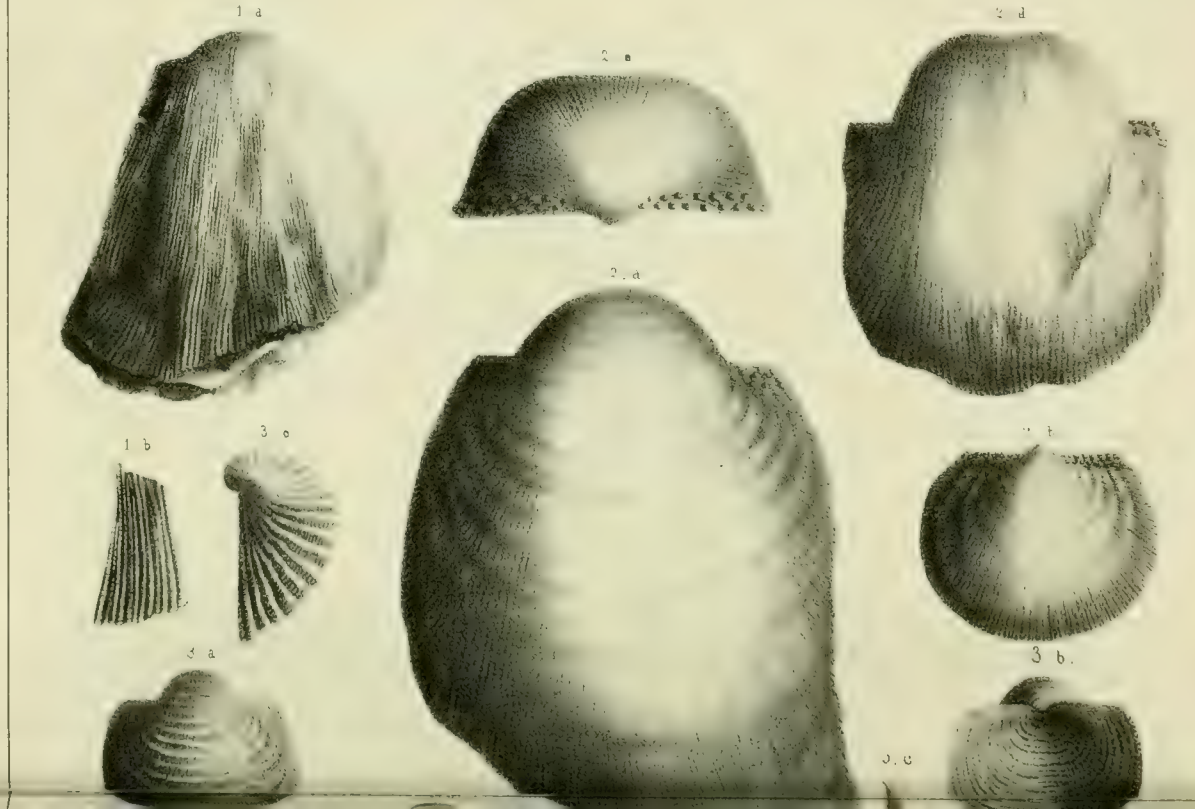


Fig. 1. Productus giganteus. Martin. sp. | Fig. 2. Productus latissimus. J. Sow

1 c
2 e
2 d
2 a
2 c.
2 b
3 a
2 b
1 b.
1 c


1. d.
4. b.
4. a.


1 a
2 a
2 d
2 d
1 b
3 c
3 a
3 b.
3 c

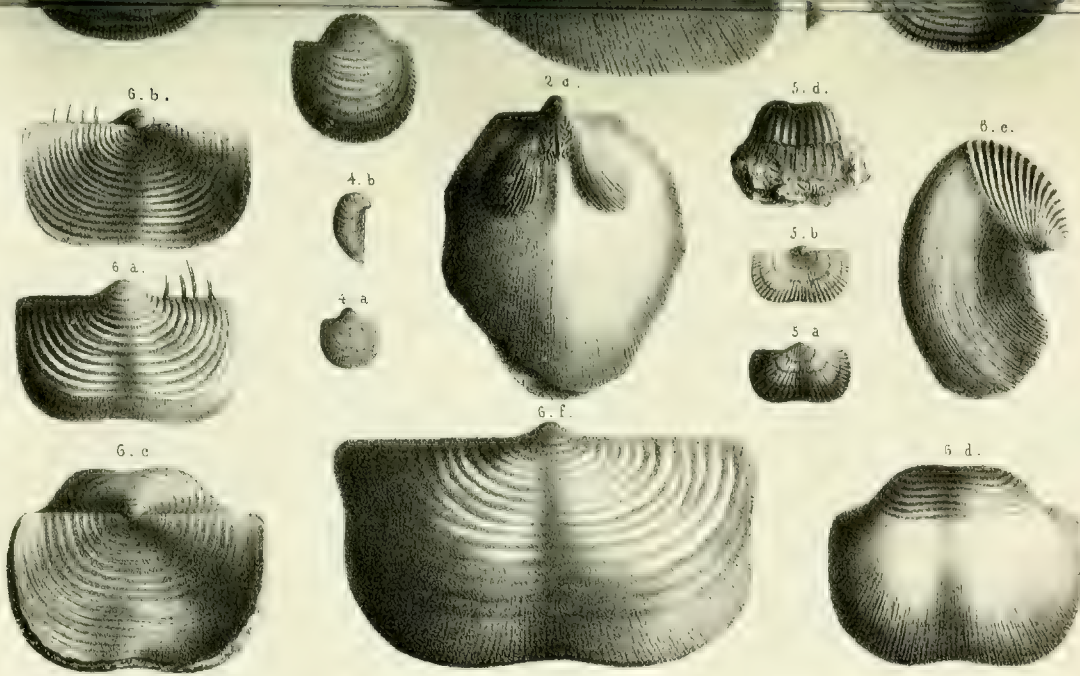
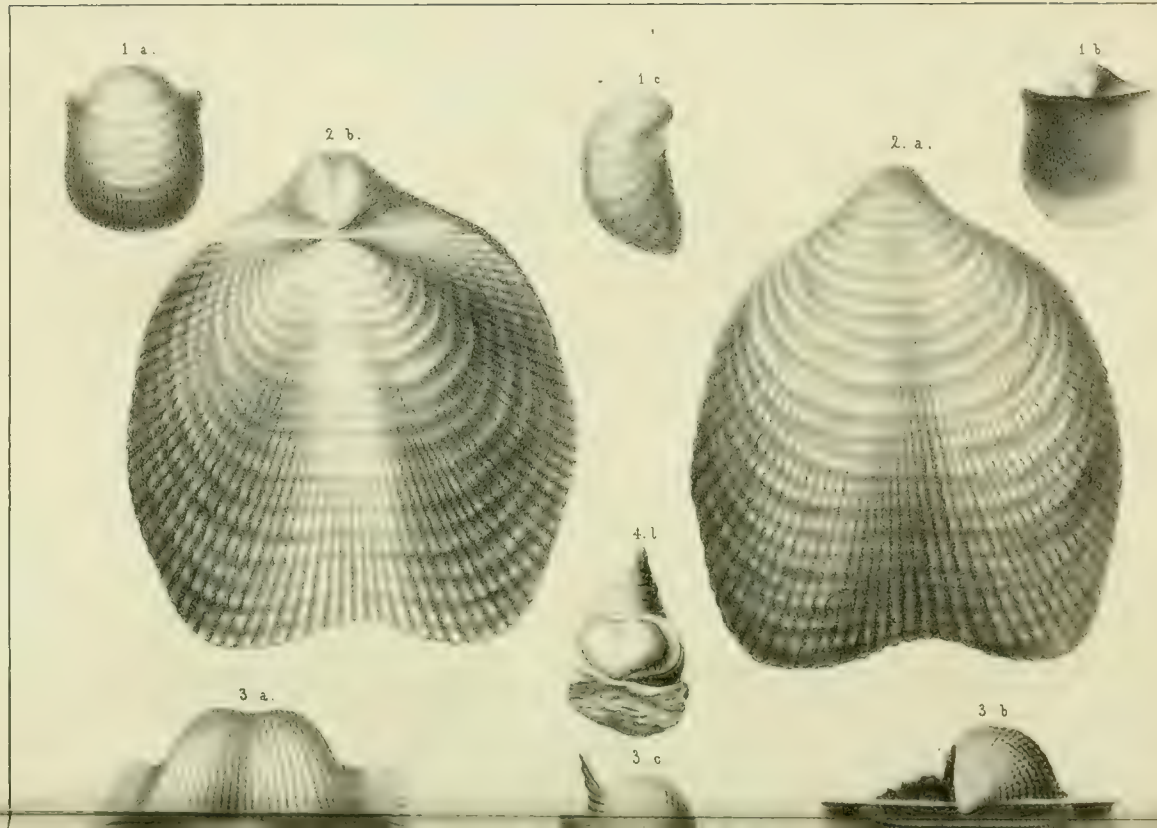


Fig. 1 Pro[illegible]ctus [illegible] | Fig. 3 Productus [illegible]datus [illegible] | Fig. 5 [illegible]
Fig. 2 [illegible] | Fig. 4 — undiferus d K | Fig. 6 — — [illegible]


1 a.
1 c
1 b
2 b.
2. a.
4. l
3 a.
3 b
3 c

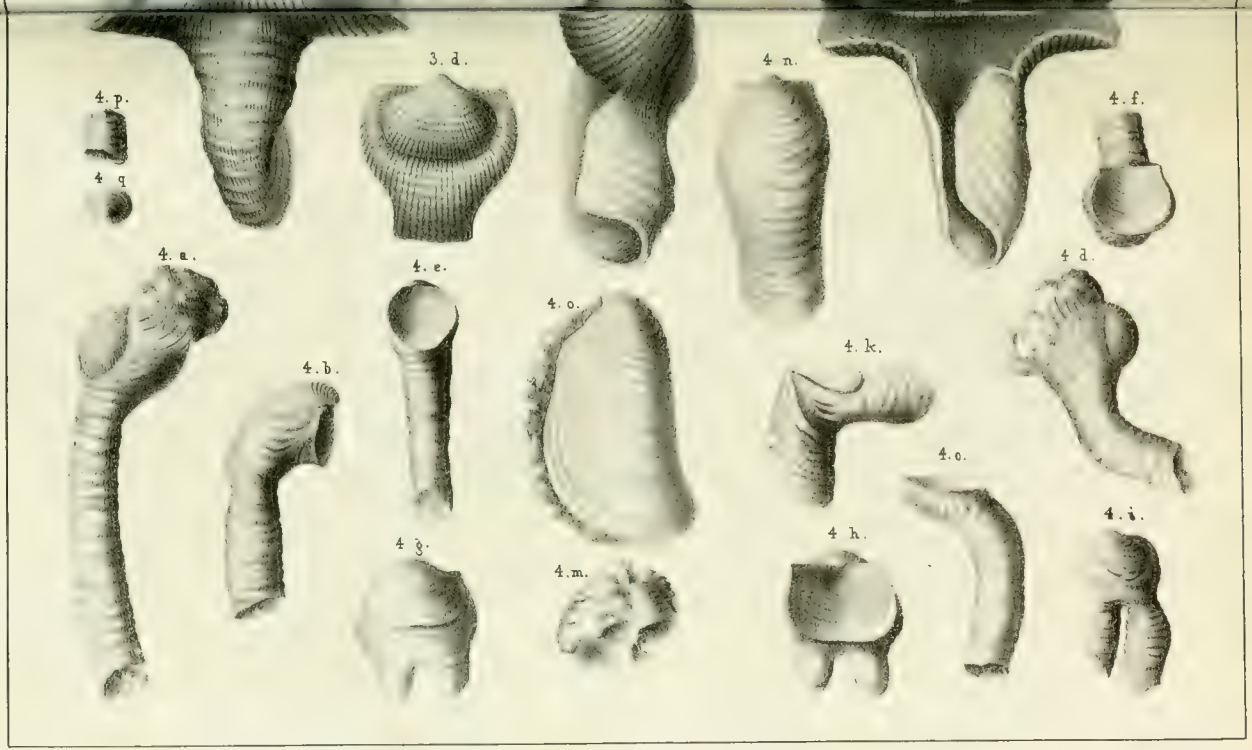
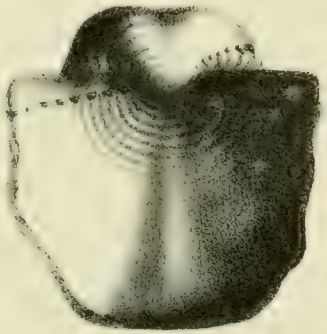
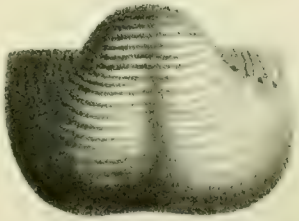


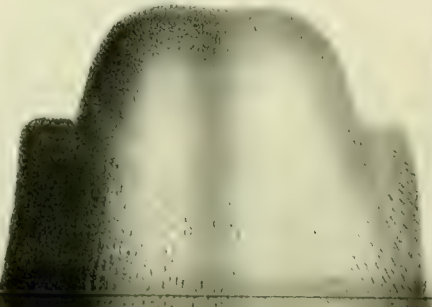
Fig. 1 Productus hemisphœrium. Kutorga.
Fig. 2 —— porrectus id
Fig. 3. Productus genuinus. Kutorga.
Fig. 4. —— proboscideus de Verneuil

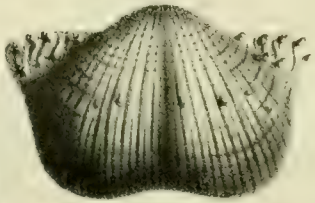
1. b.

1. d

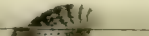

1. c


1. e.


1. a.


2. a.

1. f


2. b.

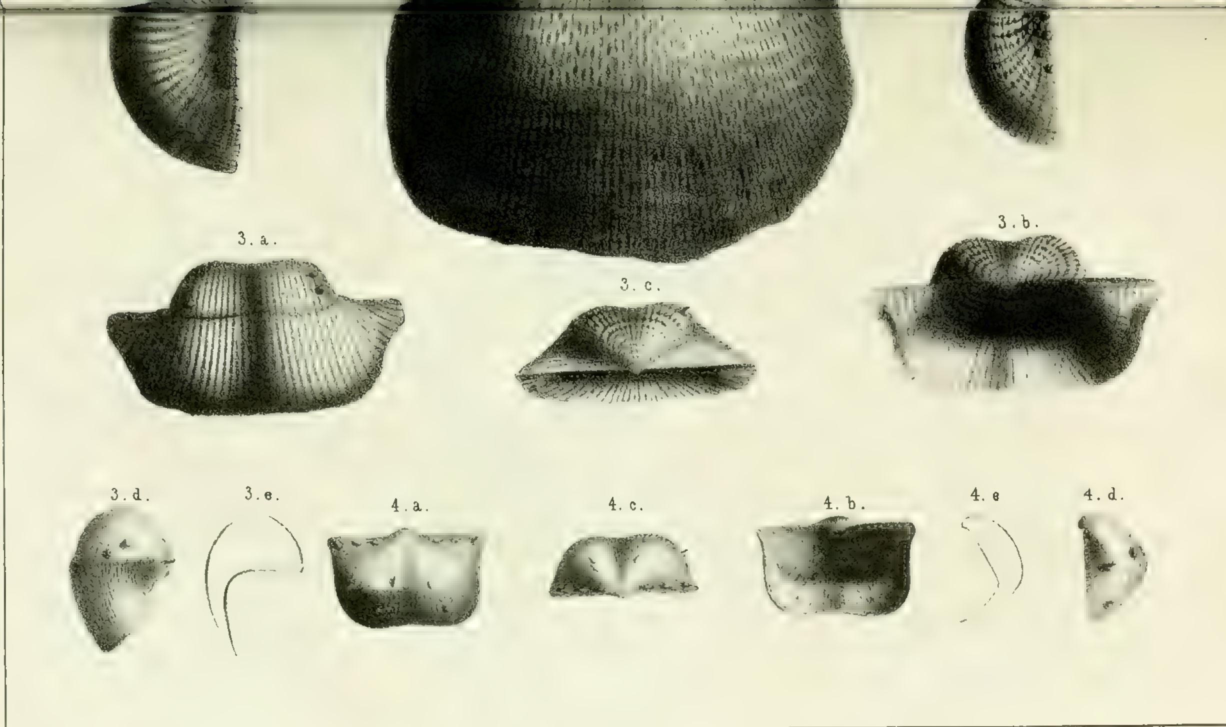
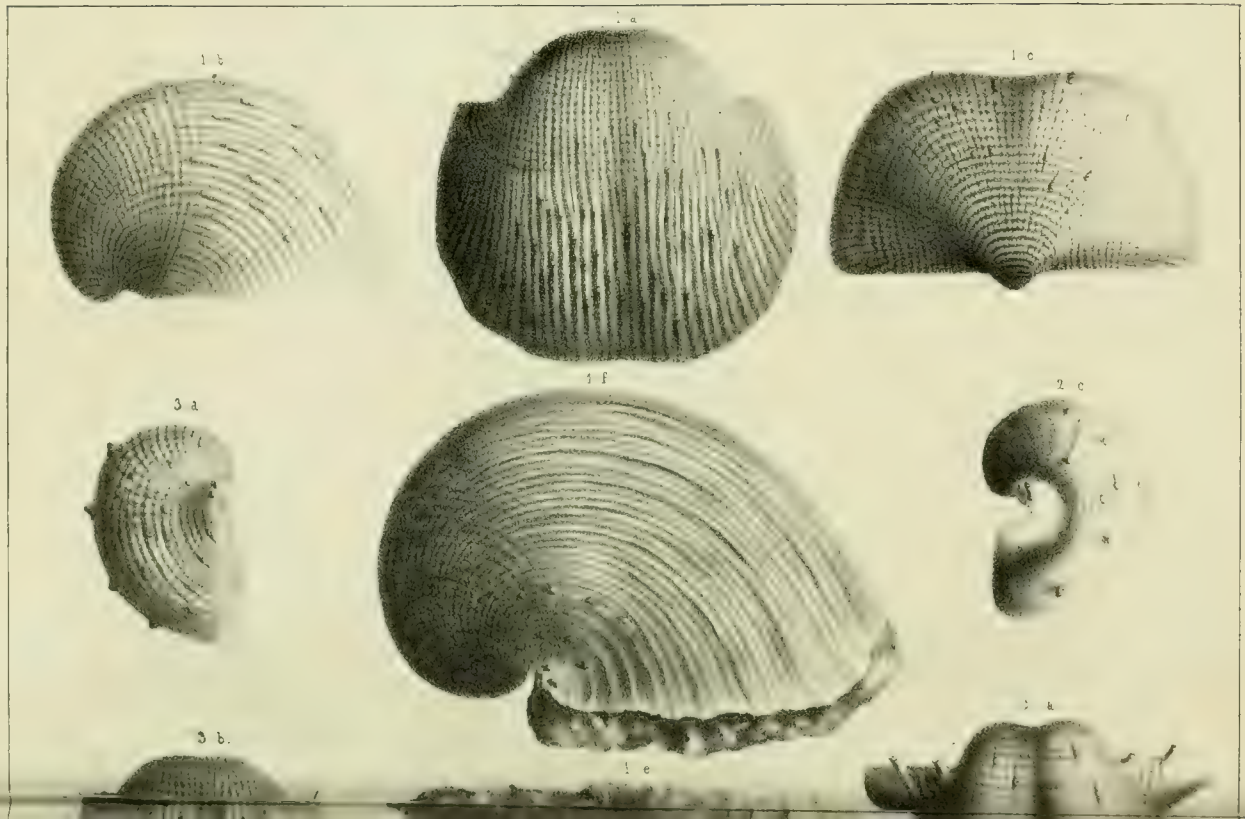


Fig. 1 Productus sublaevis d. K. | Fig. 3 Productus expansus d. K.
Fig. 2 —— Le Playi de Vern. | Fig. 4. —— mammatus Keyserling


1 a
1 b
1 c
1 f
3 a
2 c
3 b.
1 e
2 a

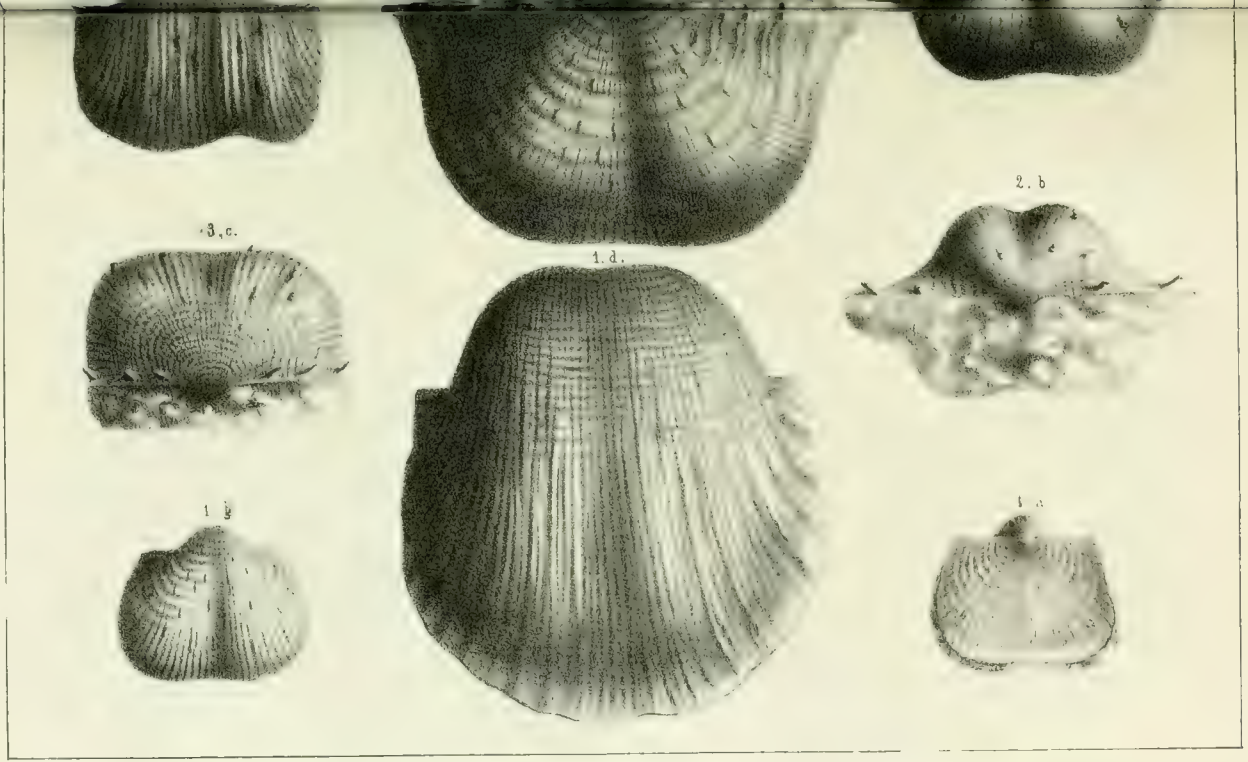
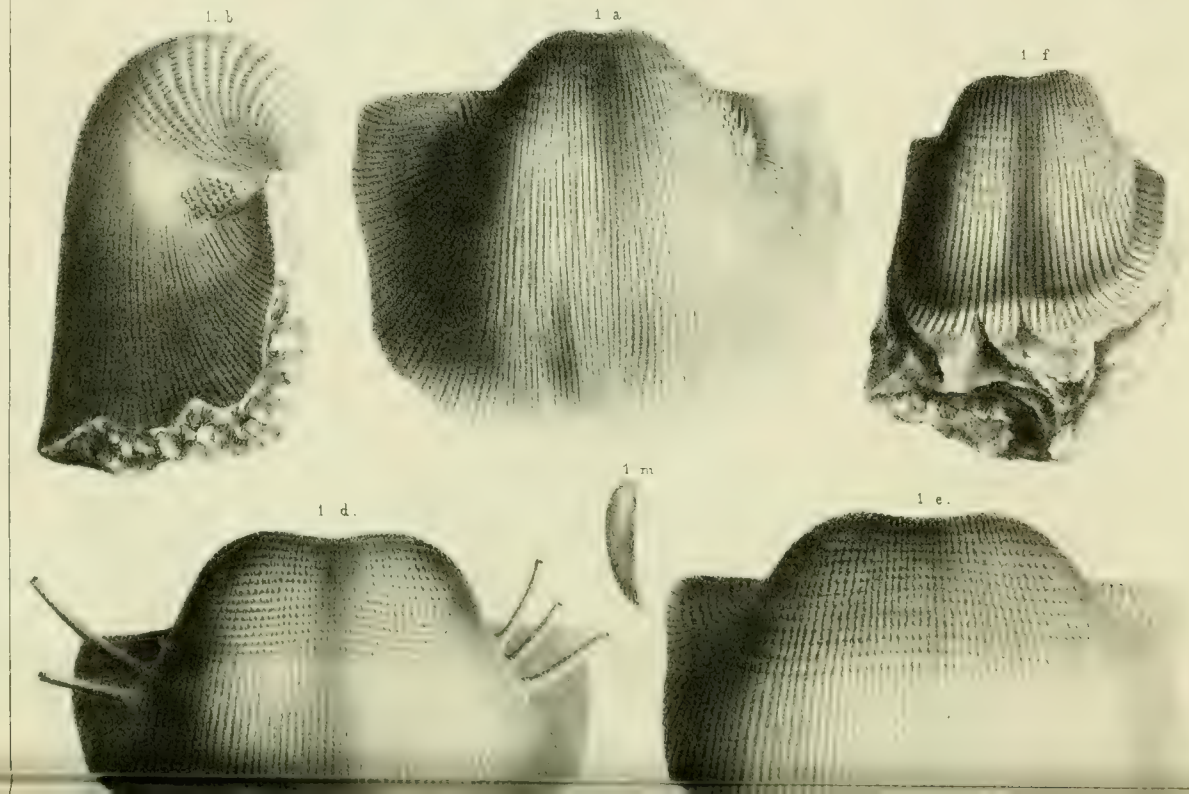
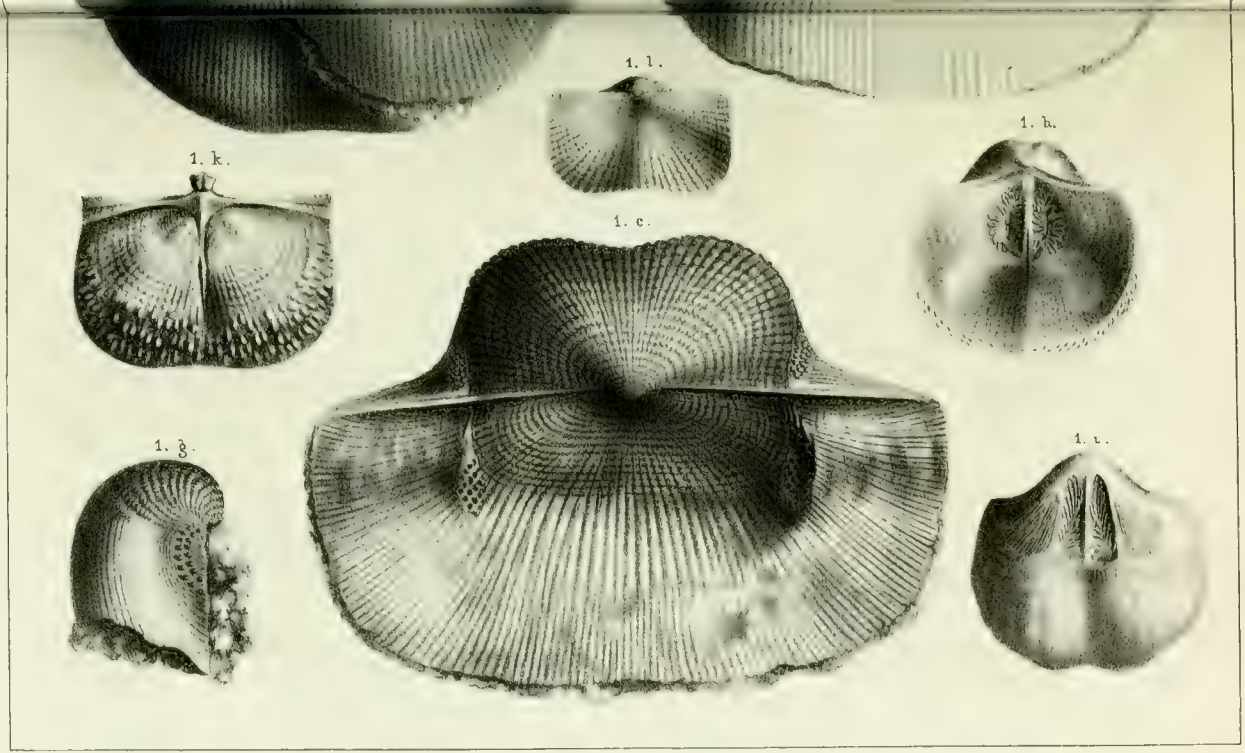


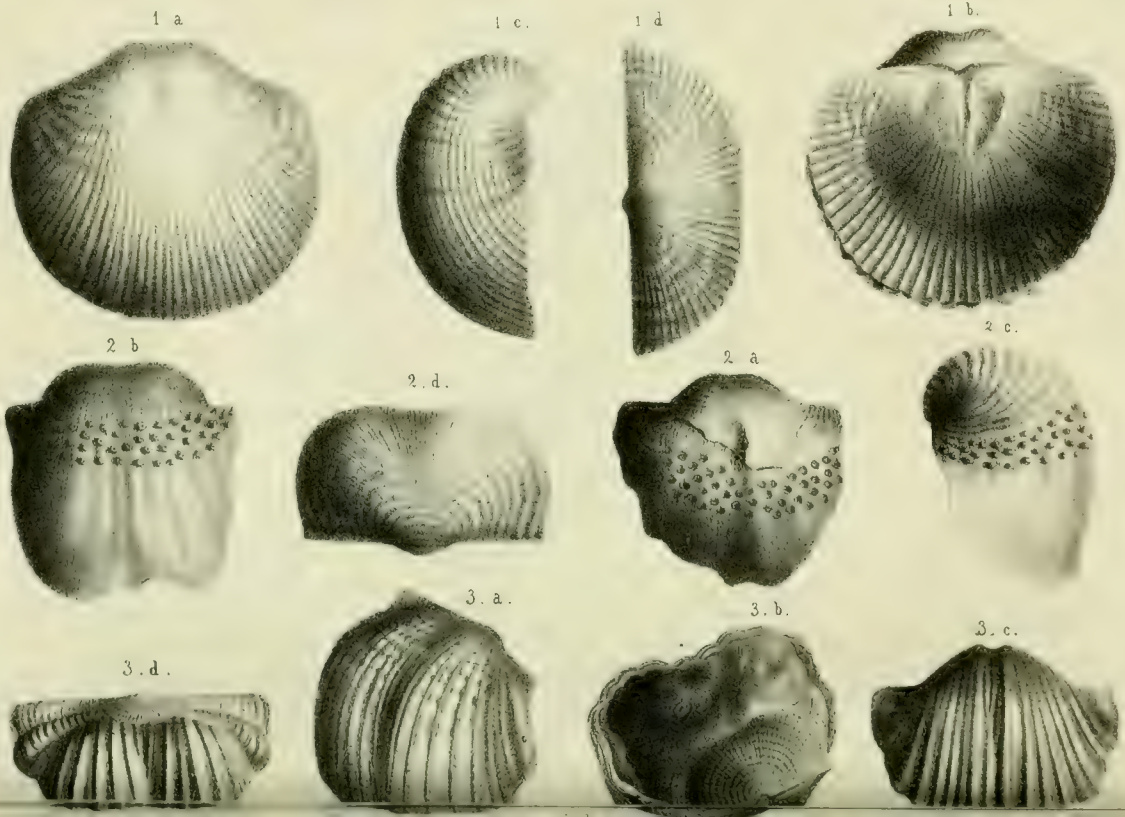
Fig. 1. Productus semireticulatus Martin sp. Fig. 2. Productus [illegible] d'Orb. Fig. 3. Productus costatus. J. Sow.

NATURAL HISTORY


1. b
1 a
1 f
1 m
1 d.
1 e.



Productus semireticulatus . Martin . sp


1 a
1 c.
1 d
1 b.
2 b
2. d.
2 a
2 c.
3. a.
3. b.
3. d.
3. c.

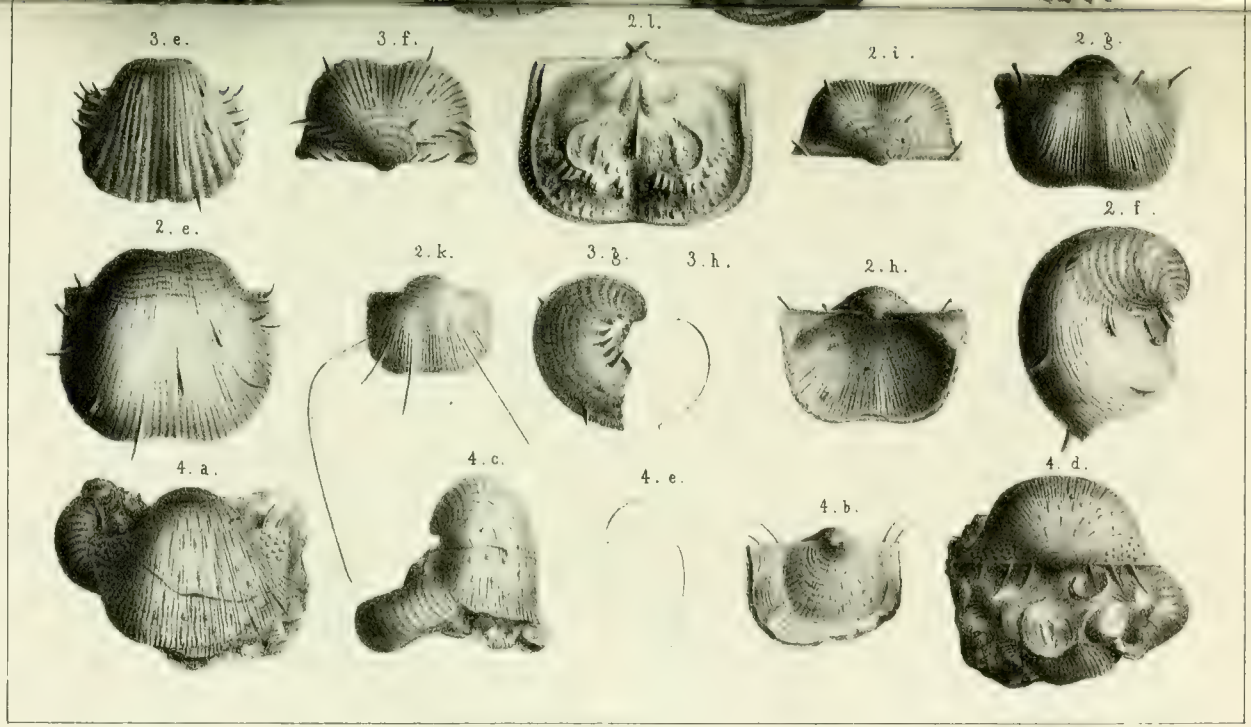


Fig. 1. Productus semireticulatus Martin. sp. | Fig. 3. Productus corrugatus J. Sow.
Fig. 2. ——— longispinus J. Sow. | Fig. 4. ——— [illegible]

NATURAL HISTORY

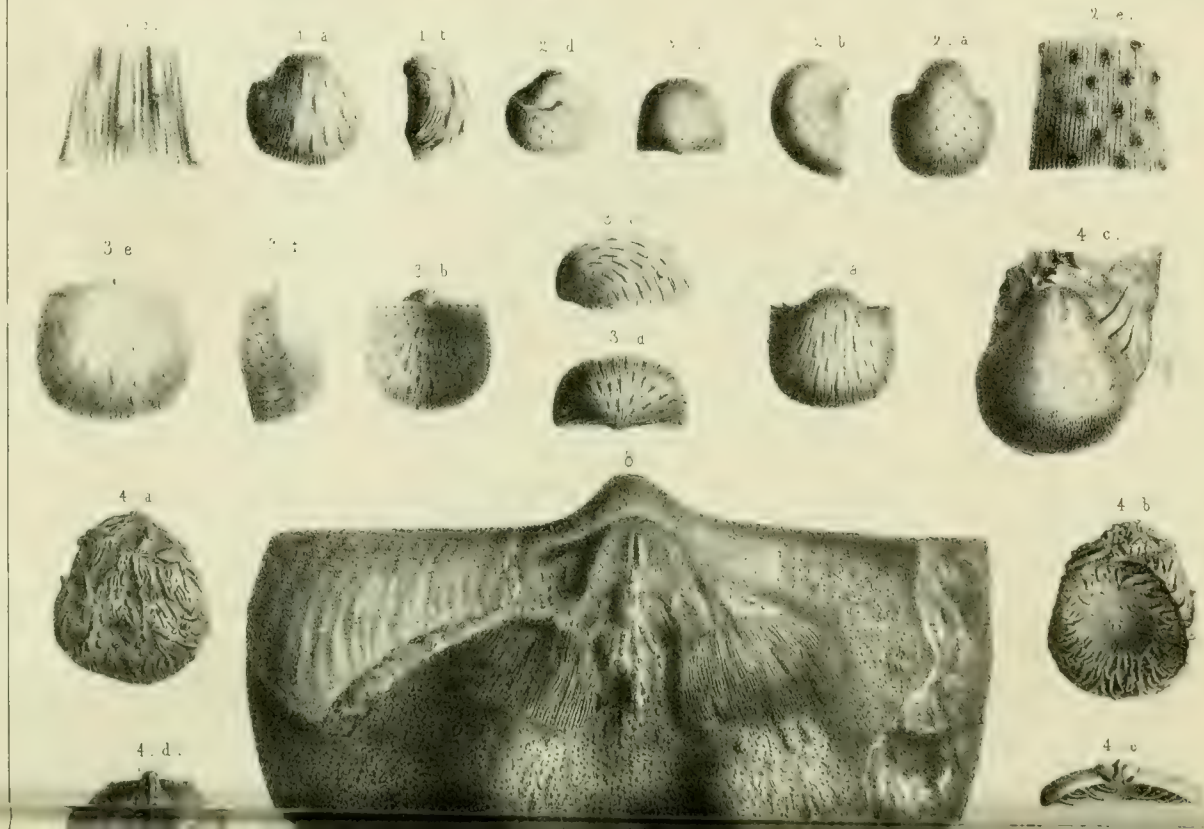
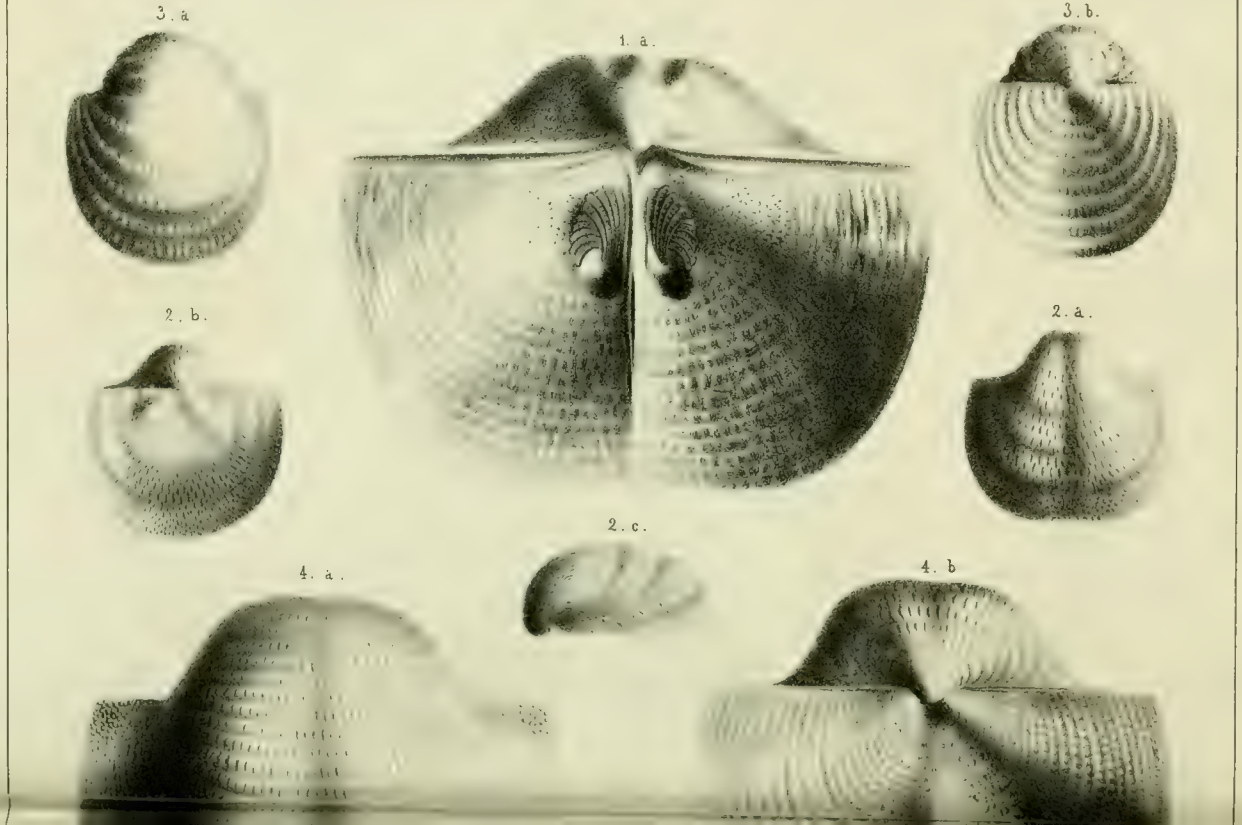

1 c.
1 a
1 b
2 d
2 c
2 b
2 a
2 e.
3 e
3 c
3 b
3 a
a
4 c.
4 a
b
4 b
4 d.
4 e

Fig. 1 Productus Villiersi ... | Fig. 3 Productus cancrini de Vern. | Fig. 5 Productus undiferus ...
Fig. 2 —— spinulosus J. Sow. | Fig. 4 —— Goldfussi Munster sp. | Fig. 6 —— scabriculus Martin sp.
Fig. 7 Productus pyxidiformis ... | Fig. 8 Productus ... Martin. sp.

NATURAL HISTORY


3. a
1. a.
3. b.
2. b.
2. a.
2. c.
4. a.
4. b

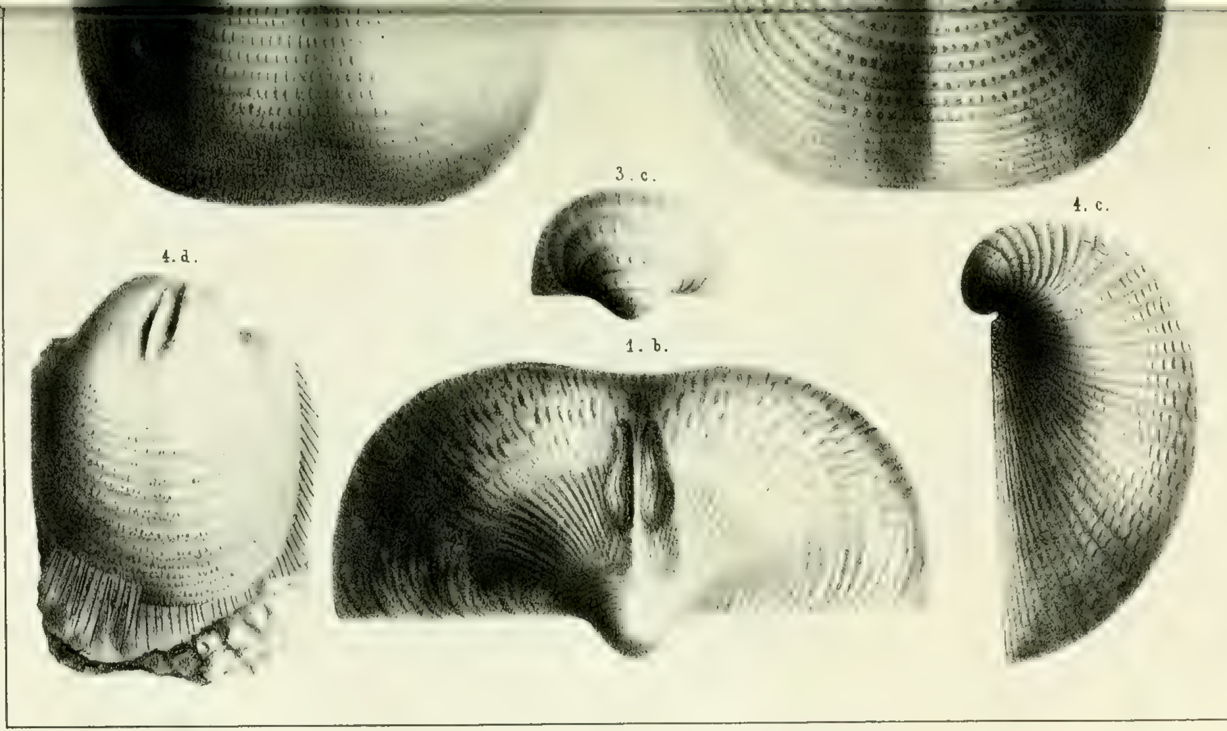
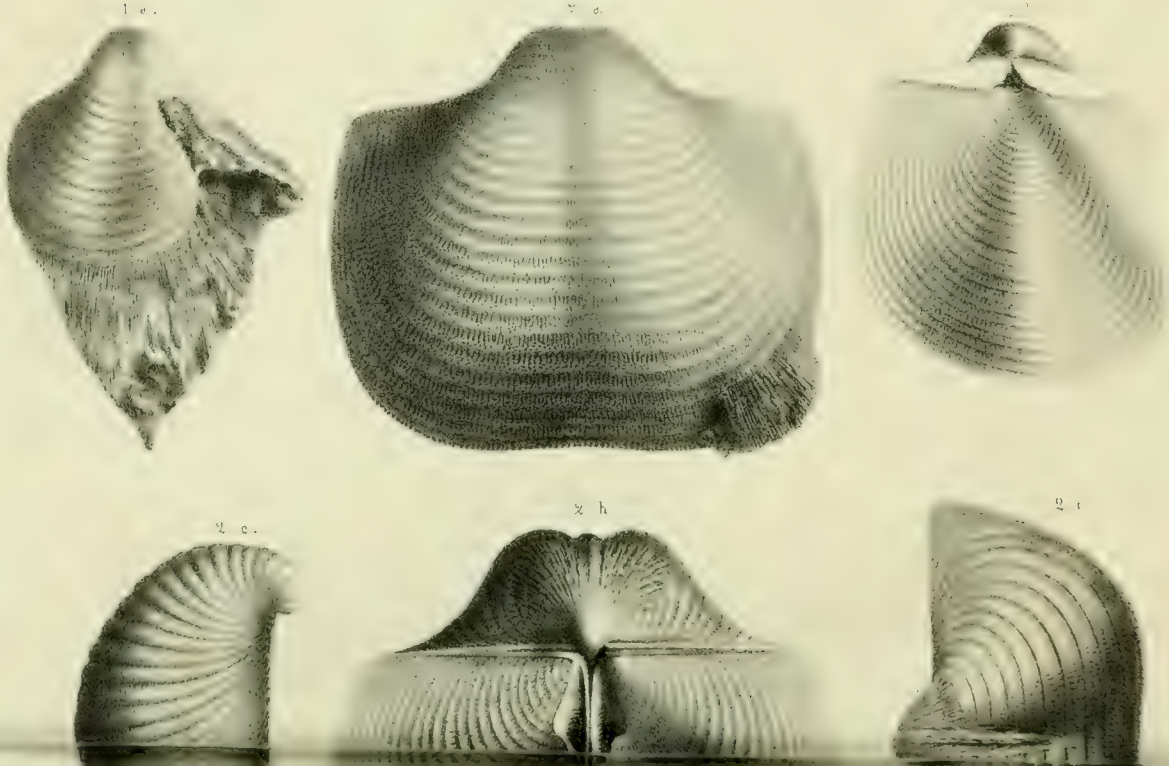


Fig. 1 Productus pyxidiformis d. K. | Fig. 3 Productus fimbriatus J. Sow.
Fig. 2 —— Humboldti A. d'Orb. | Fig. 4 —— pustulosus Phill.

NATURAL HISTO


1 a.
2 g.
2 e.
2 h
2 i

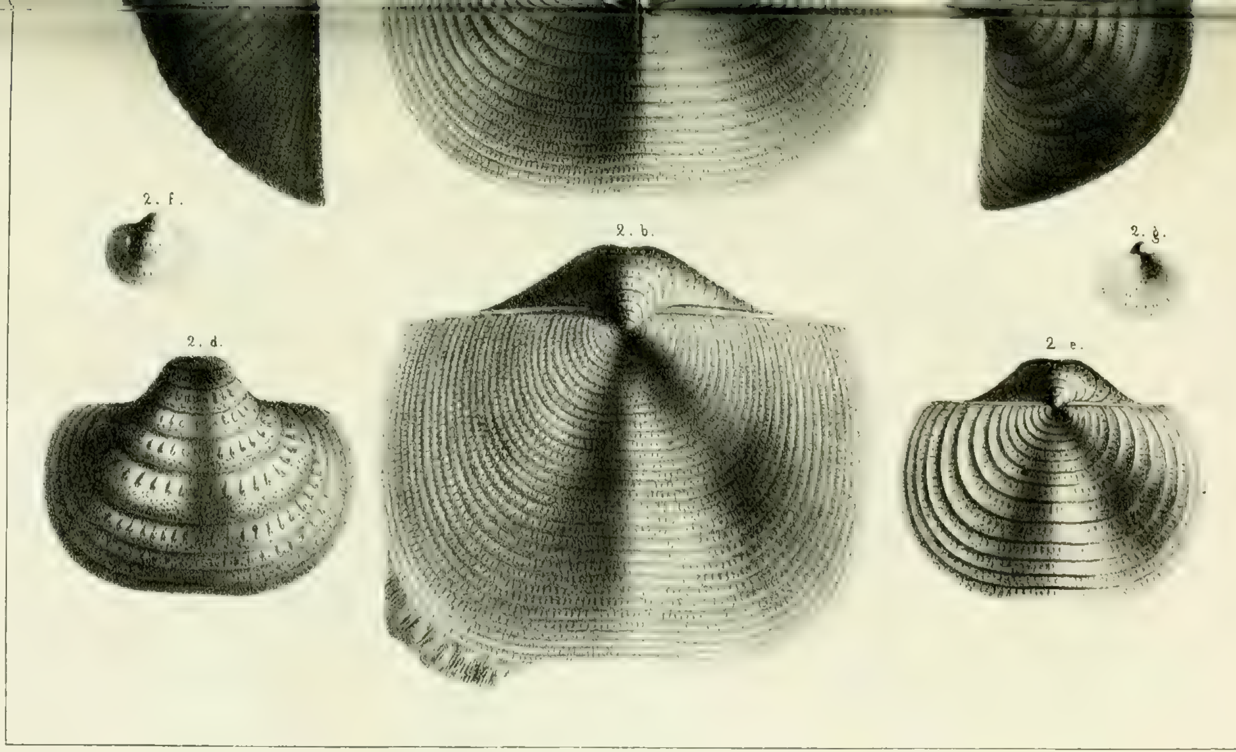
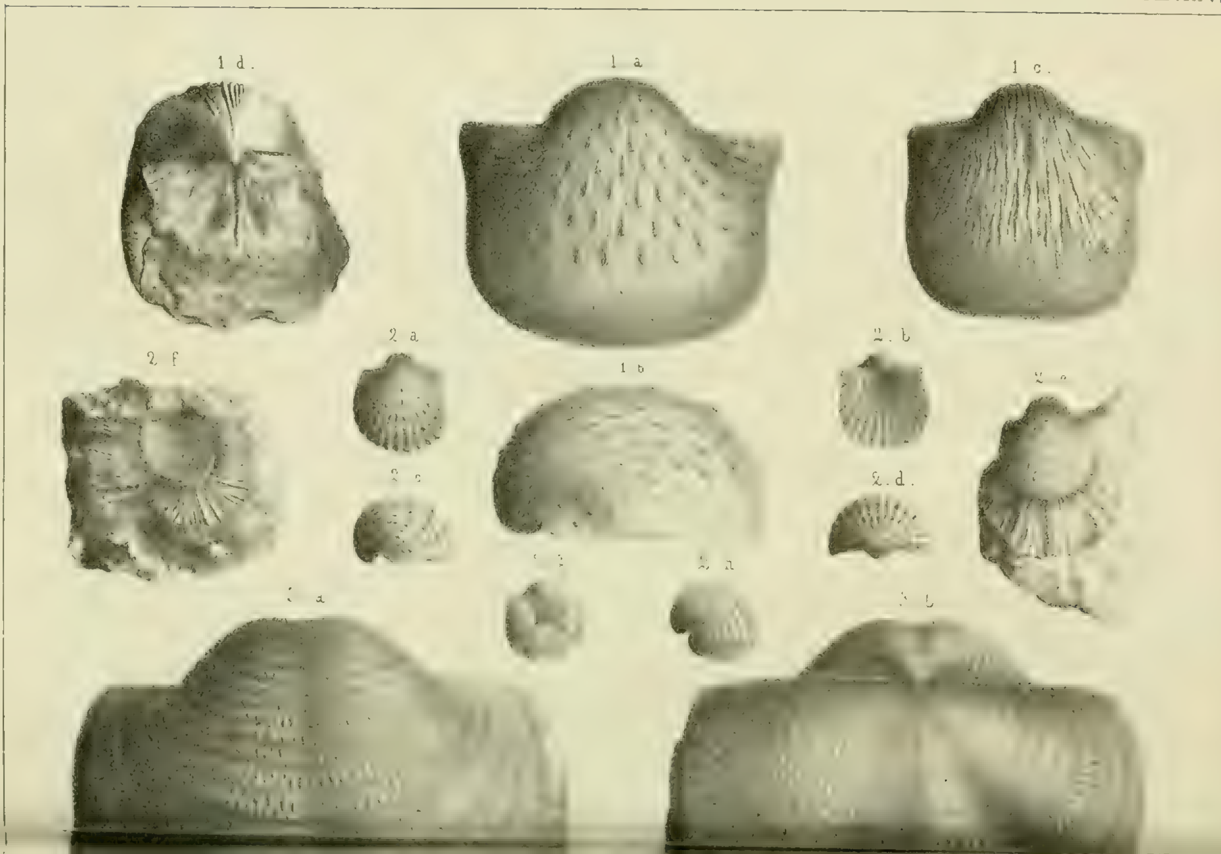


Fig. 1 Productus pustulosus Phill.


1 d.
1 a
1 c.
2 f
2 a
1 b
2. b
2. d.

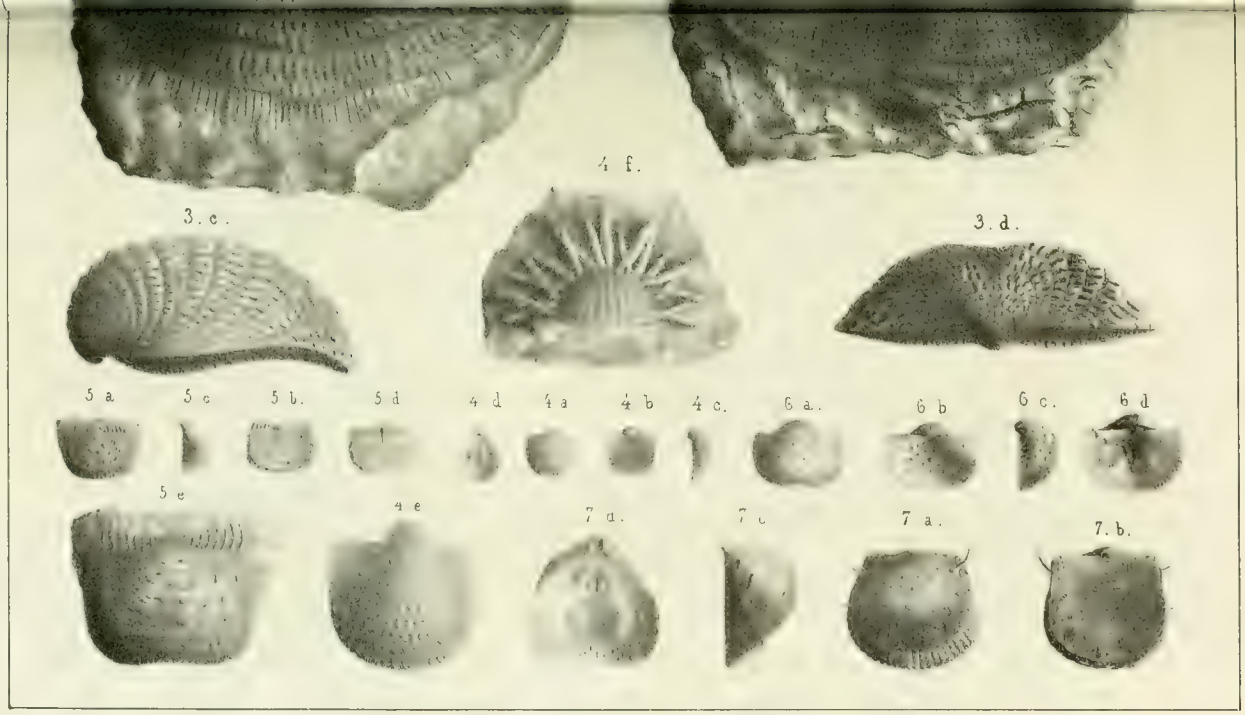
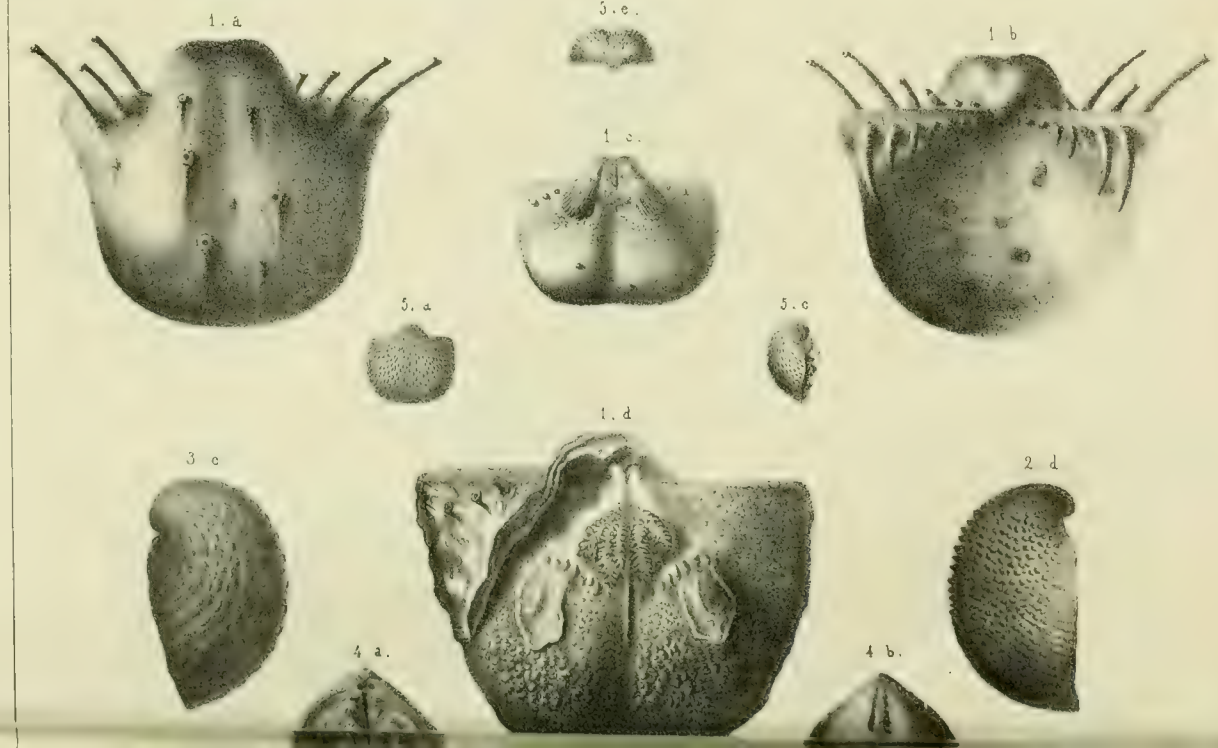


Fig. 1 Productus sub-quadratus J. Sow
Fig. 2 —— tessellatus d. K

Fig. 3. Productus Leuchtenbergensis d. K
Fig. 4 —— Deshayesianus id

Fig. 5 Productus Nystianus d. K
Fig. 6 —— Keyserlingianus id.

Fig. 7. Productus marginalis . . . d. K.


1. a
3. e.
1 b
1 c.
5. a
5. c
1. d
3 c
2 d
4 a.
4 b.

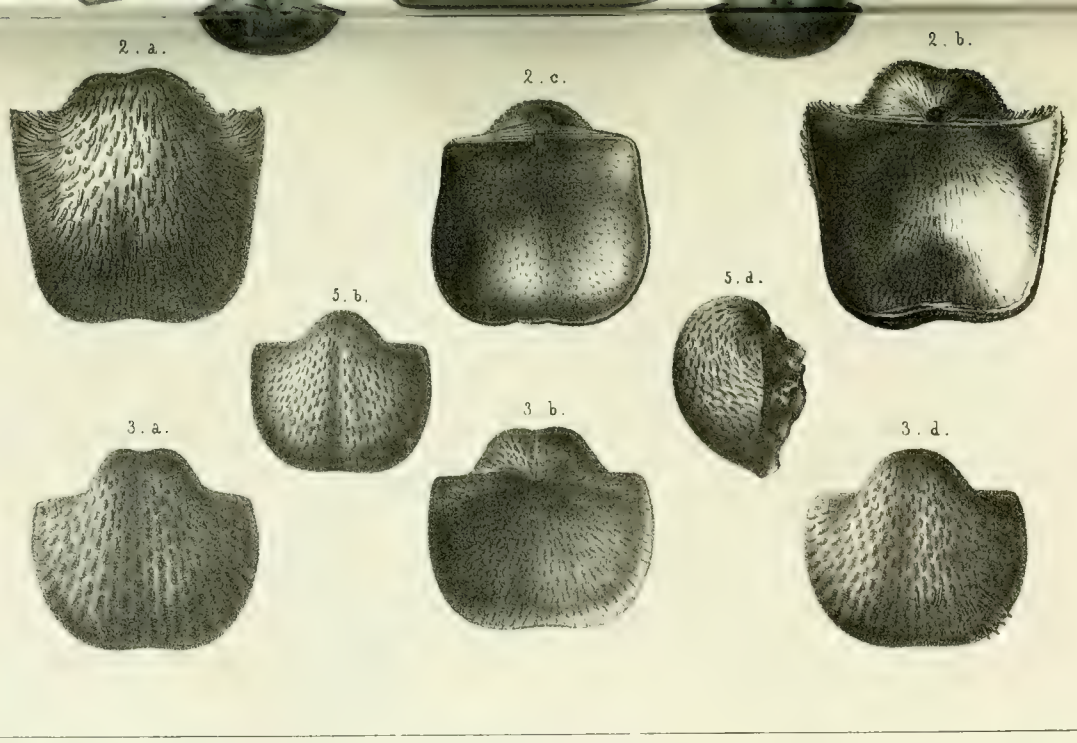
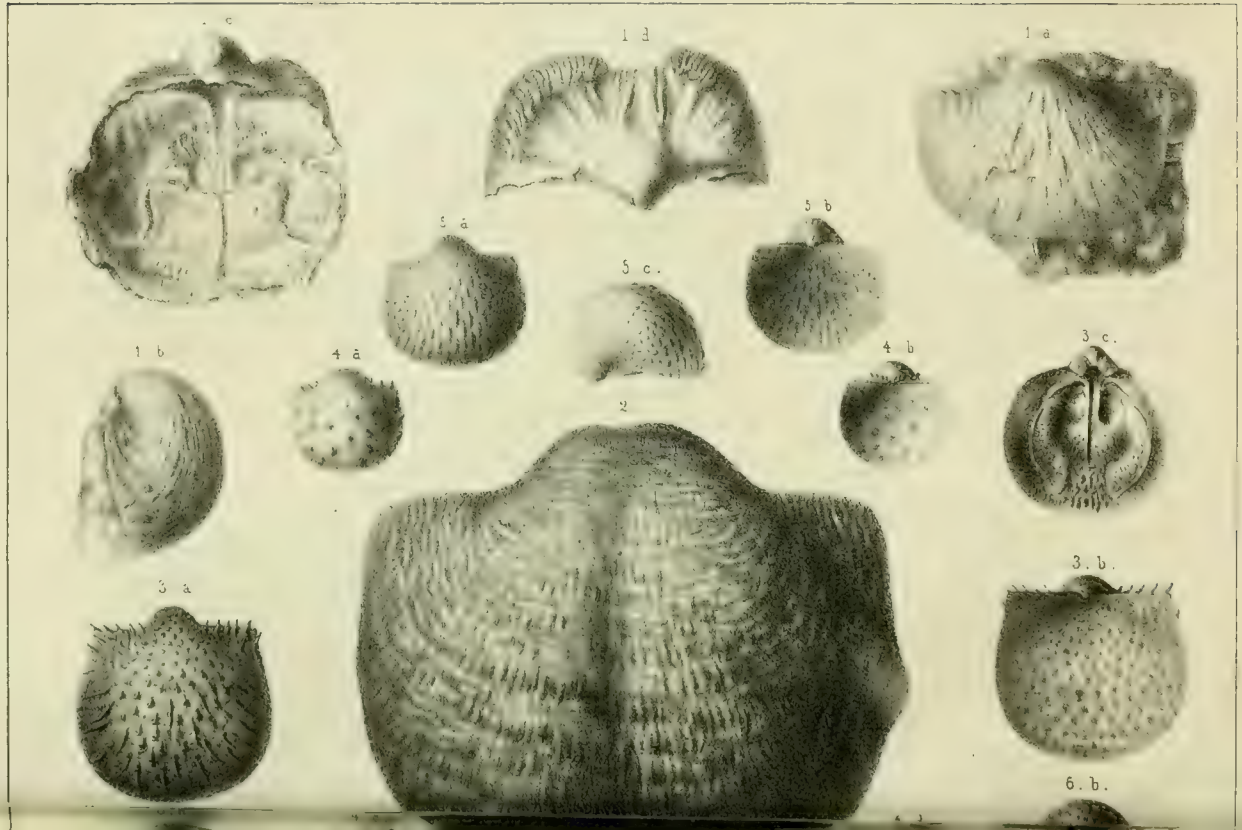


Fig. 1. Productus latirostris J. Sow. | Fig. 2. Productus horrescens. de Vern. | Fig. 3 Productus Gemmitzianus. d. K.
Fig. 4 Productus Gallicus. Münster. | Fig. 5. Productus Lewisianus. d. K.


1 c
1 d
1 a
5 a
5 b
5 c.
1 b
4 a
4 b
3 c.
2
3 a
3. b.
6. b.

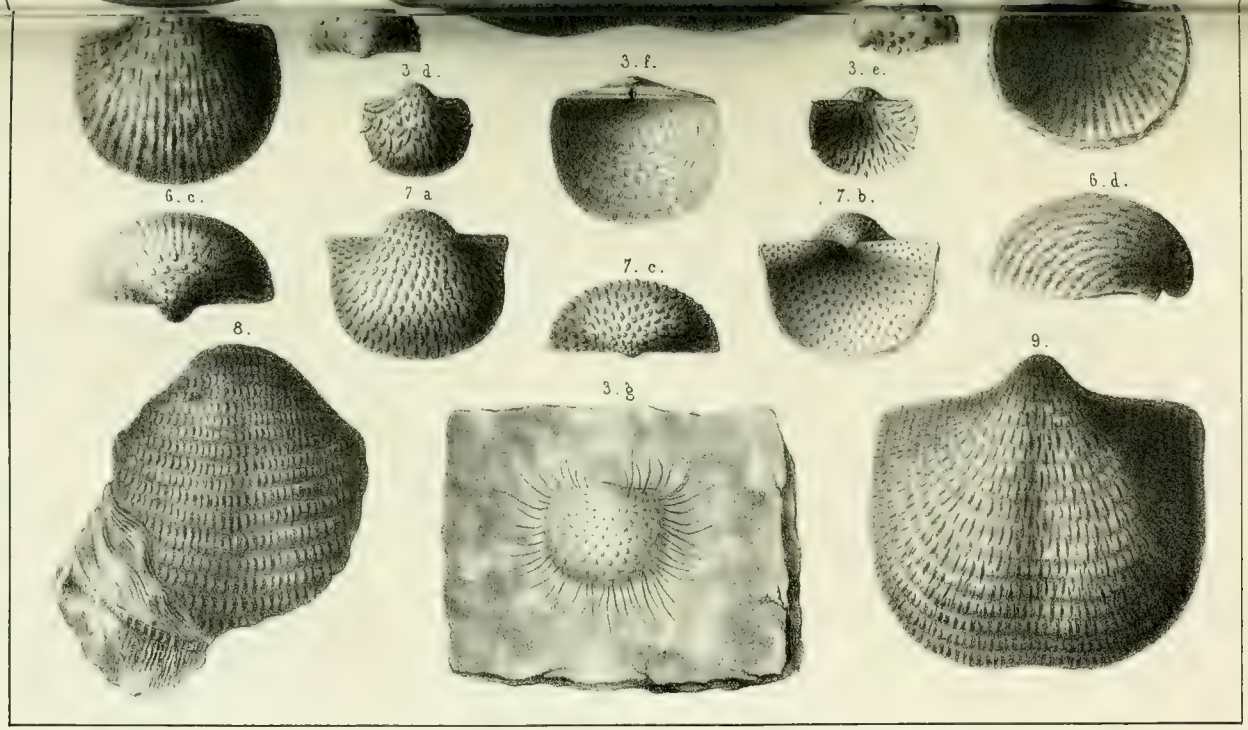
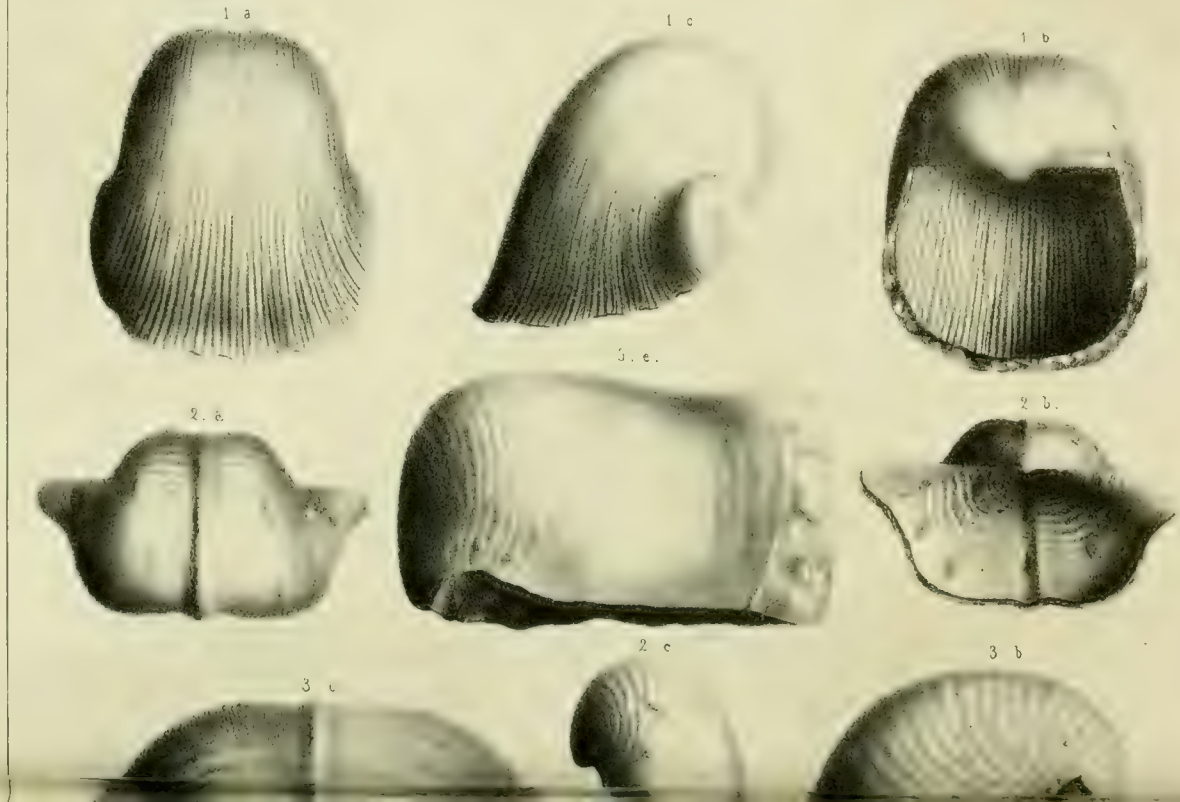


Fig. 1 Productus brachythærus. J. Sow
Fig. 2 ——— pyxidiformis d. K
Fig. 4 ——— Murchisonianus d. K
Fig. 4 Productus subaculeatus Murch
Fig. 5. ——— dissimilis. d. K.
Fig. 6 ——— aculeatus. Martin. sp.
Fig. 7 Productus granulosus. Phill
Fig. 8. ——— pustulosus. Phill
Fig. 9. ——— ——— Var.

NATURAL HIST.


1 a
1 c
1 b
3. e.
2. a.
2 b.
2 c
3 b
3 c

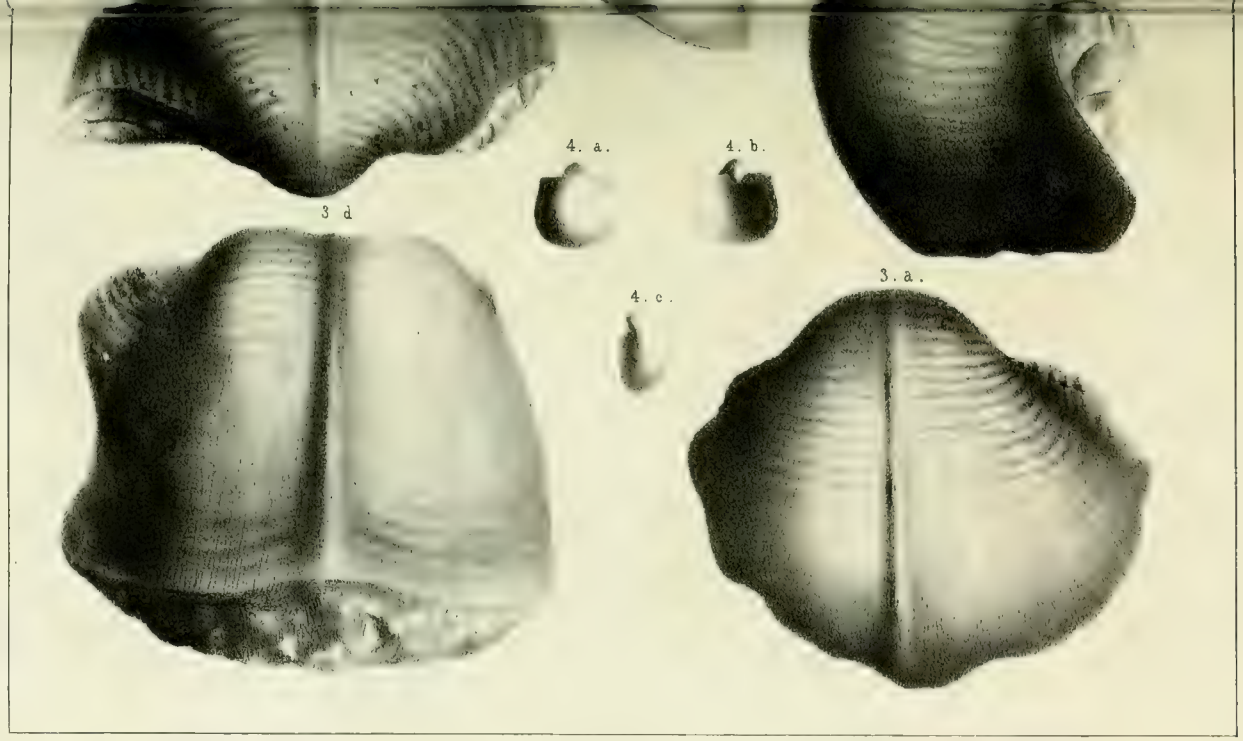


Fig. 1. Productus flexistria. M'Coy.
Fig. 2. ——— mesolobus. Phill.
Fig. 3. Productus [illegible]
Fig. 4. ——— Leonhardi. Wissmann.

NATURAL HISTORY

VI. — *De la quantité de travail absorbée par les frottements dans le forage des Bouches-à-feu à la Fonderie royale de canons de Liége ;*

Par M. COQUILHAT, Capitaine d'artillerie.

Dans une brochure que nous avons publiée en 1843 (Expériences sur la résistance produite dans le forage des Bouches-à-feu faites à la fonderie royale de canons à Liége, en 1840 et 1841, par Coquilhat, capitaine d'artillerie. Liége, imprimerie de Desoer), nous avons déterminé expérimentalement et théoriquement la quantité de travail utile dépensée dans le forage des bouches-à-feu. Comme complément de ce Mémoire nous nous proposons de déterminer la quantité de travail absorbée par les frottements qui ont lieu sur les bancs de forerie.

Les notions vagues que l'on possédait sur la force nécessaire pour vaincre la résistance due au forage, ont été cause que l'on a négligé jusqu'ici d'en tenir compte dans le calcul des frottements. On considérait les pressions produites par le poids du système comme étant les seules causes de frottement. On verra que l'erreur commise en négligeant la force motrice est assez notable lorsqu'il ne s'agit que d'un seul banc, et qu'elle est très considérable lorsque plusieurs bancs sont juxtaposés et que leurs roues motrices engrènent les unes dans les autres.

Dans le calcul des dimensions des roues, il est très-important de connaître les pressions supportées par les tourillons et par les dents. Les résultats de nos expériences et les formules que nous en avons déduites nous permettent de résoudre complètement ces divers problèmes.

Description sommaire d'un banc de forerie.

Un banc de forerie se compose :

1°. De deux fortes jumelles ou longs côtés du banc solidement établis sur une fondation en maçonnerie ou en pierres de taille.

2°. D'une roue motrice parallèle à l'un des petits côtés du banc : son axe est horizontal et à égale distance des jumelles. L'arbre de cette roue est supporté par deux coussinets de bronze placés à quelque distance de ses extrémités. Le bout de l'arbre voisin du banc a une forme carrée, pour l'ajustement d'un manchon, et est terminé par une petite saillie cylindrique et concentrique, appelée le *teton*. L'extrémité opposée de l'arbre, également tournée en cylindre, pivote contre une crapaudine de bronze qui a un appui dans la maçonnerie. Cette dernière disposition a pour objet d'empêcher la roue de céder à la pression que lui transmet la bouche-à-feu lors du forage.

3°. D'une entretoise ou support mobile entre les longs côtés du banc, avec un *collier* en fonte ou en bronze pour supporter la pièce. On fixe l'entretoise à une distance convenable sous la volée de la pièce.

4°. D'un charriot de forerie qui se meut sur un chemin de fer adapté avec jumelles, poussé par une crémaillère. La boîte du charriot soutient l'extrémité de la tige du forêt et son centre est un peu au-dessus du prolongement de l'axe de la roue motrice, afin d'éviter que la tige du forêt en s'infléchissant, par l'effet de son poids et de la pression, ne touche les parois de l'ame de la bouche-à-feu.

5°. D'une crémaillère adaptée au charriot de forerie et mise en mouvement par une roue à rochets ou par tout autre système tel qu'un engrénage, une vis sans fin, etc.

6°. De diverses traverses fixes ou mobiles, pour assembler toutes les parties du banc et pour la facilité du service.

Pour qu'une pièce puisse tourner sur le banc de forerie autour d'un axe unique, on y creuse, concentriquement à cet axe, la *portée* ou le *trou de portée*.

La portée est une entaille circulaire faite à la volée dans la partie excédante de métal, d'un diamètre égal à celui du *collier* qui se trouve sur l'entretoise mobile.

Le trou de portée est cylindrique et pratiqué dans le carré du faux bouton : il peut emboîter parfaitement le *teton* de l'arbre de la roue motrice.

(Le carré du faux bouton est une tige carrée, de même dimension que celle de l'arbre de la roue motrice, que l'on a ménagée à l'extrémité du bouton de culasse, lors du moulage de la pièce, et qui, ne devant servir que pour l'opération du forage, est coupée ensuite.)

Le canon placé sur le banc a deux appuis : par la portée il repose sur un collier, et par le trou de portée, dans lequel entre le teton, il est supporté par l'arbre de la roue motrice. On glisse ensuite un manchon qui enveloppe le carré de l'arbre et celui du faux bouton, et la pièce participe au mouvement de la roue.

Formules générales du frottement.

Soient
f le coefficient du frottement,
Q la pression qu'exerce un corps posé sur une surface :
la résistance qu'opposera le frottement sera

$$Qf;$$

la quantité de travail qu'il absorbera le long du chemin l parcouru par le corps frottant sera

$$Qfl.$$

Pour un pivot d'un rayon $=r$, tournant dans sa crapaudine, le frottement qu'il éprouvera sera également

$$Qf;$$

et il s'exercera uniformément sur toute la base du pivot : mais si nous le supposons comme concentré en une seule force, son point d'application sera situé sur les $\frac{2}{3}$ du rayon à partir de l'axe du pivot, et il agira avec ce bras de levier unique, appelé *bras de levier moyen du frottement.* Le moment de ce frottement pris relativement à l'axe du pivot sera donc

$$\tfrac{2}{3}rQf.$$

Représentons par
T la traction exercée tangentiellement à une roue qui en engrène une autre ;
m et m' le nombre des dents de chacune de ces roues.

Cette traction T produira sur les dents de la roue voisine un frottement de glissement dont on devra tenir compte et dont la valeur sera

$$f\Gamma\pi\frac{m+m'}{mm'} : \text{(formule de Poncelet)}$$

pour le cas où $m = m'$, cette valeur devient

$$\frac{2\pi f T}{m}.$$

V étant la vitesse de rotation d'une roue ;

e le rayon de cette roue :

T étant toujours l'effort exercé tangentiellement à la roue ; on aura pour la quantité de travail consommé par la force T pendant l'unité de temps

$$2\pi e V T.$$

Frottement sur des bancs de forerie, dont les roues motrices, de diamètres quelconques, engrènent les unes dans les autres.

Nous allons calculer les frottements qui ont lieu sur un banc de forerie ; et pour plus de généralité, d'un même côté de celui que nous considérerons, se trouveront n autres bancs dont les roues motrices engrèneront les unes avec les autres et avec celle du banc considéré. Toutes les roues seront supposées parallèles et ayant leurs axes dans un même plan. Cette disposition pourrait être celle d'un atelier où se trouveraient des bancs de forage ou de tour de différentes grandeurs, suivant la dimension des objets à forer, à aléser, ou à tourner extérieurement.

Représentons généralement, pour le banc qui en a n après lui, par :

a_n le rayon de la portée ;

b_n le rayon du devant de l'arbre de la roue motrice, ou en d'autres termes, le rayon de la partie de l'arbre voisine du carré ;

c_n le rayon du derrière de l'arbre de la roue motrice ;

d_n le rayon du bout id. id. qui pivote contre une crapaudine de bronze, pour résister à la pression produite dans le forage ;

e_n le rayon de la roue motrice ;

m_n le nombre des dents de la roue motrice ;

x_n la longueur du carré de l'arbre de la roue, ou la distance horizontale du teton (point de suspension de la pièce) au coussinet de la roue ;

y_n la distance entre les deux coussinets ou appuis de la roue, prise de milieu en milieu :

f le coefficient du frottement. Les corps frottans dans une forerie sont de fer ou de fonte ; les surfaces en sont lubrifiées à la manière ordinaire, avec du vieux oing ou de l'huile de pied de bœuf. Il en résulte que dans un banc de forerie le coefficient du frottement est le même pour deux surfaces planes glissant l'une sur l'autre, ou pour des tourillons ou pivots tournant dans leurs coussinets ou contre leurs crapaudines (Voir le manuel de mécanique pratique de Morin).

A_n le poids du canon. Nous le supposerons non foré.

B_n le poids de la roue motrice.

P_n la pression exercée par le foret contre la pièce, et transmise par celle-ci contre l'arbre de la roue motrice.

S_n la puissance appliquée verticalement et tangentiellement à la roue motrice, de haut en bas ou de bas en haut, selon le sens du mouvement de la roue.

Q_n la pression ou l'effort exercé de haut en bas ou de bas en haut, par la roue motrice sur celle qui la suit. Q_n étant la puissance qui met en mouvement la roue qui en ayant $n-1$ après elle, on a $Q_n = S_{n-1}$.

La roue considérée ne peut communiquer à celle qui la suit un effort Q_n, sans en éprouver une résistance précisément égale. Ainsi relativement à la roue considérée, S_n est une puissance et Q_n une résistance.

M_n le moment de la force nécessaire au forage.

M_n sur e_n la force nécessaire au forage, exercée verticalement et tangentiellement à la roue motrice, de haut en bas ou de bas en haut.

T_n la traction ou l'effort exercé de haut en bas ou de bas en haut, tangentiellement à la roue motrice, pour vaincre les divers frottements.

Lorsque le mouvement du canon est parvenu à l'uniformité, la quantité d'action ou de travail transmise à la circonférence de la roue motrice pour vaincre les frottements, doit être à chaque instant égale à la somme des quantités d'action consommées par les frottements des différentes parties du système. Il doit donc y avoir égalité entre le moment de la force T_n, pris relativement à l'axe de la roue motrice et de la bouche-à-feu, et les moments des divers frottements partiels pris relativement au même axe. Nous évaluerons ces derniers séparément et nous égalerons leur somme au moment de la force T_n.

Moments des divers frottements partiels.

1° La bouche-à-feu reposant par une de ses extrémités sur un collier et par l'autre sur le teton de l'arbre de la roue motrice, on peut, sans erreur sensible, considérer la charge comme également répartie entre ces deux appuis. La pression sur le collier sera $\frac{1}{2}A_n$: il en résultera un frottement égal à $\frac{1}{4}fA_n$, qui agira sur un bras de levier égal au rayon a_n de la portée.

Le moment de ce frottement pris relativement à l'axe de la bouche-à-feu sera

$$\tfrac{1}{2}fA_n a_n.$$

2° La pression exercée sur l'appui du devant de l'arbre de la roue motrice a pour composantes : la moitié de la puissance et de la résistance exercées sur les dents de la roue (on suppose celle-ci à égale distance de ses deux coussinets) ou $\frac{1}{2}(S_n+Q_n)$; la moitié $\frac{1}{2}B_n$ du poids de la roue, et la pression provenant de la moitié du poids de la pièce. Or celle-ci étant suspendue à l'extrémité du carré de l'arbre, agit sur le coussinet d'appui avec un bras de levier égal à la longueur du carré. Dans cette position la bouche-à-feu tend à soulever la roue et à la faire tourner autour du coussinet voisin du carré.

Soit X la force appliquée au tourillon opposé de l'arbre pour faire équilibre à la moitié du poids de la pièce. Les forces $\frac{1}{2}A_n$ et X se faisant équilibre sur un levier du premier genre ont pour point d'appui le coussinet voisin du carré et pour bras de levier, d'une part la longueur du carré de l'arbre et d'autre part la distance entre les deux coussinets prise de milieu en milieu. L'égalité qui doit exister entre les moments de ces forces donne lieu à l'équation

$$\tfrac{1}{2}A_n x_n = Xy_n ;$$

d'où l'on déduit

$$X = \tfrac{1}{2}\frac{A_n x_n}{y_n}.$$

La résultante de $\frac{1}{2}A_n$ et de X passant par le coussinet du devant de l'arbre, il en résulte que celui-ci supporte par suite du poids de la pièce une pression égale à

$$\tfrac{1}{2}A_n + X = \tfrac{1}{2}A_n \frac{y_n + x_n}{y_n}.$$

La pression sur le coussinet de devant étant la somme des diverses pressions que nous venons d'évaluer, elle sera représentée par :

$$\tfrac{1}{2}B_n+\tfrac{1}{2}(S_n+Q_n)+\tfrac{1}{2}A_n\frac{y_n+x_n}{y_n};$$

le frottement

$$\tfrac{1}{2}f\left\{B_n+(S_n+Q_n)+A_n\frac{y_n+x_n}{y_n}\right\}$$

qui en résultera, agira sur un bras de levier égal au rayon b_n du tourillon et on aura pour son moment relatif à l'axe de la roue

$$\tfrac{1}{2}fb_n\left\{B_n+(S_n+Q_n)+A_n\frac{y_n+x_n}{y_n}\right\}. \qquad (1)$$

On remarquera qu'il est avantageux de faire le carré de l'arbre le plus petit possible. Si l'arbre était en fer forgé on pourrait même supprimer entièrement le carré : le teton serait placé au centre de la partie antérieure du tourillon, et celle-ci aurait vers la circonférence des entailles dans lesquelles viendraient se loger des griffes ou des saillies correspondantes du manchon.

3° La pression sur le coussinet du derrière de l'arbre de la roue motrice a pour composantes : la moitié du poids de la roue, $\frac{1}{2}B_n$; la moitié de la puissance et de la résistance, $\frac{1}{2}(S_n+Q_n)$; enfin la force X qui, dirigée de bas en haut, tend à soulever la roue. Cette pression sera donc imprimée par

$$\tfrac{1}{2}B_n+\tfrac{1}{2}(S_n+Q_n)-X=\tfrac{1}{2}\left\{B_n+(S_n+Q_n)-A_n\frac{x_n}{y_n}\right\};$$

il en résultera un frottement

$$\tfrac{1}{2}f\left\{B_n+(S_n+Q_n)-A_n\frac{+x_n}{y_n}\right\}$$

qui, agissant avec un bras de levier égal au rayon c_n du tourillon, aura pour moment relatif à l'axe du système

$$\tfrac{1}{2}fc_n\left\{B_n+(S_n+Q_n)-A_n\frac{x_n}{y_n}\right\}. \qquad (2)$$

4° La pression P_n que le foret exerce contre la pièce se transmettant au pivot de l'arbre de la roue motrice, celui-ci éprouvera contre sa crapaudine un frottement égal à fP_n, et dont la résulsante agissant autour de l'axe du pivot sur un bras de levier égal à $\frac{2}{3}d_n$ aura pour moment

$$\tfrac{1}{3} d_n P_n.$$

5° La puissance S_n exercée tangentiellement à la roue motrice réagit sur les dents de la roue voisine et produit sur celles-ci un frottement de glissement dont le moment *moyen* relatif à l'axe de la roue sera, d'après la formule de Poncelet,

$$fS_n \frac{\pi(m_n + m_{n+1})e_n}{m_n m_{n+1}}.$$

Equation générale du frottement.

Les frottements que nous venons d'évaluer tendant tous à faire tourner le système de la pièce et de la roue motrice en sens contraire de son mouvement réel, la somme de leurs moments devra être égale à celui de la force T_n nécessaire pour détruire les résistances nuisibles.

Le moment de la force T_n est égal à $T_n e_n$, parce qu'il agit à l'extrémité du rayon e_n de la roue motrice ; on pourra donc établir la relation

$$T_n e_n = \tfrac{1}{2} f A_n a_n + \tfrac{1}{2} f b_n \left\{ B_n + A_n \frac{y_n + x_n}{y_n} + (S_n + Q_n) \right\} + \tfrac{1}{2} f c_n \left\{ B_n - A_n \frac{x_n}{y_n} + (S_n + Q_n) \right\} + \tfrac{2}{3} d_n f P_n + f S_n \frac{\pi(m_n + m_{n+1})e_n}{m_n m_{n+1}}. \qquad (3).$$

La puissance S_n doit être égale à toutes les résistances partielles éprouvées par la roue motrice. Ces résistances sont la résultante T_n de tous les frottements, la résistance utile $\frac{M_n}{e_n}$ produite dans le forage, la réaction Q_n qu'éprouve la roue motrice en transmettant une force égale à la roue voisine.

On a donc l'égalité

$$\left.\begin{aligned} S_n &= T_n + \frac{M_n}{c_n} + Q_n \text{ ou} \\ S_n &= T_n + \frac{M_n}{e_n} + S_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

Substituant cette valeur de S_n dans l'équation (3), on a

$$T_n e_n = \tfrac{1}{2} f A_n a_n + \tfrac{1}{2} f b_n \left\{ B_n + A_n \frac{y_n + x_n}{y_n} + \left(T_n + \frac{M_n}{e_n} + 2Q_n \right) \right\} +$$

$$\tfrac{1}{2} f c_n \left\{ B_n - A_n \frac{x_n}{y_n} + \left(T_n + \frac{M_n}{e_n} + 2Q_n \right) \right\} + \tfrac{2}{3} d_n f P_n + f \left(T_n + \frac{M_n}{e_n} + Q_n \right) \frac{\pi (m_n + m_{n+1}) e_n}{m_n m_{n+1}} \qquad (5)$$

Résolvant cette équation par rapport à T_n et mettant S_{n-1} à la place de Q_n, on obtient

$$\left[e_n - \tfrac{1}{2} f b_n - \tfrac{1}{2} f c_n - f\pi \frac{(m_n + m_{n+1}) e_n}{m_n m_{n+1}} \right] T_n = \tfrac{1}{2} f A_n a_n$$

$$+ \tfrac{1}{2} f b_n \left\{ B_n + A_n \frac{y_n + x_n}{y_n} + \left(\frac{M_n}{e_n} + 2S_{n-1} \right) \right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2} f c_n \left\{ B_n - A_n \frac{x_n}{y_n} + \left(\frac{M_n}{e_n} + 2S_{n-1} \right) \right\}$$

$$+ \tfrac{2}{3} d_n f P_n + f \left(\frac{M_n}{e_n} + S_{n-1} \right) \pi \frac{(m_n + m_{n+1}) e_n}{m_n m_{n+1}} \ldots \quad (6)$$

Lorsque l'impulsion S_n et la résistance Q_n, au lieu d'agir sur la roue motrice de haut en bas, agiront de bas en haut, leur direction sera opposée à celle du poids de la roue et de la pièce, et les pressions qui en résulteront sur les coussinets d'appui, seront pour chaque tourillon, l'excès des forces agissant dans un sens sur celles dirigées en sens contraire. Les seules forces réellement considérées dans les équations (5) et (6) sont les frottements qui résultent de ces diverses pressions. Ces frottements tendent tous à faire tourner le système en sens contraire de son mouvement, ils sont donc nécessairement de mêmes signes et ils doivent être considérés comme positifs, lorsque l'on égale la somme de leurs moments à celui de leur résultante T.

D'après cela, lorsque la force motrice de la roue sera dirigée de bas en haut, on établira, pour le moment (1), la différence des quantités $S_n + Q_n$ et $B_n + A_n \frac{y_n + x_n}{y_n}$; et la plus grande des deux sera prise positivement. Dans le même cas, pour le moment (2), on établira la différence des quantités B_n et $S_n + Q_n + A_n \frac{x_n}{y_n}$; et la plus grande des deux sera également affectée du signe +.

En considérant ensuite l'équation (6) et faisant attention à la manière dont elle dérive de l'équation (5), on remarquera facilement que le terme $\frac{1}{2}fb_n$ du dénominateur devra être négatif toutes les fois que $\frac{M_n}{e_n}+2S_{n-1}$ seront facteurs positifs de cette quantité, au numérateur, et réciproquement, $\frac{1}{2}fb_n$ devra être positif au dénominateur toutes les fois qu'au numérateur son facteur $\frac{M_n}{e_n}+2S_{n-1}$ sera pris négativement.

Il en est de même pour le terme $\frac{1}{2}fc_n$ du dénominateur et pour la quantité $\frac{M_n}{e_n}+2S_{n-1}$, considérée comme facteur de $\frac{1}{2}fc_n$ au numérateur.

Dans les inégalités ci-dessous :

$$S_n+Q_n=T_n+\frac{M_n}{e_n}+2S_{n-1}\gtrless B_n+A_n\frac{y_n+x_n}{y_n},$$

$$S_n+Q_n+A_n\frac{x_n}{y_n}=T_n+\frac{M_n}{e_n}+2S_{n-1}+A_n\frac{x_n}{y_n}\gtrless B_n,$$

on ne connait pas la valeur de T_n ; mais on pourra sans erreur sensible, pour la détermination des signes dont ces expressions doivent être affectées, prendre la valeur de T_{n-1} à la place de T_n.

De l'équation (4) on déduit

$$S_{n-1}=T_{n-1}+\frac{M_{n-1}}{e_{n-1}}+S_{n-2};$$

$$S_{n-2}=T_{n-2}+\frac{M_{n-2}}{e_{n-2}}+S_{n-3};$$

$$S_1=T_1+\frac{M_1}{e_1}+S;$$

$S=T+\frac{M}{e}$; d'où il vient :

$$S_{n-1}=T_{n-1}+T_{n-2}+\ldots+T_1+T+\frac{M_{n-1}}{e_{n-1}}+\frac{M_{n-2}}{e_{n-2}}+\ldots+\frac{M_1}{e_1}+\frac{M}{e}. \quad (7)$$

En substituant la valeur précédente de S_{n-1} dans l'équation (6) on aura T_n exprimé en fonction de quantités connues, quand on aura calculé préalablement les valeurs de $T_{n-1}T_{n-2}$ ..... etc. En effet, les autres éléments du calcul sont les données de l'établissement des bancs, et les valeurs de $P_n,P_{n-1},\ldots,\frac{M_n}{e_n},\frac{M_{n-1}}{e_{n-1}}$,.....,

que nous avons fait connaître, dans notre brochure sur la résistance utile produite dans le forage.

On reconnaîtra facilement à la forme des équations (6) et (7) :

1° Que le frottement augmente à mesure qu'on fait engréner un plus grand nombre de roues les unes dans les autres.

2° Que pour diminuer les frottements et ménager ainsi la force motrice, il est avantageux, lorsque l'on fore des pièces de différents calibres, de placer les plus gros calibres près de l'arbre moteur de la machine qui fait mouvoir tous les bancs. Ce dernier point est très-important à observer.

3° Que la grandeur du rayon a_n de la portée a une grande influence sur la valeur du frottement, et qu'il convient de la réduire au strict nécessaire. Généralement ce rayon devra excéder le demi-calibre de 3 à 6 centimètres, en ayant soin de l'augmenter à mesure que le calibre devient plus fort, afin de pouvoir remédier à l'usure de la partie qui est quelquefois très-considérable. Il est rare cependant que l'on observe cette prescription, parce que le moteur possède généralement un excès de force, et que l'on trouve plus avantageux d'employer au forage le temps qu'il faudrait consacrer à creuser de petites portées.

Equation du frottement, dans la supposition que tous les bancs sont identiques et que toutes les pièces sont de mêmes calibres.

Habituellement, dans une forerie, tous les bancs sont identiques, d'où il résulte que :

$$\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1} \ldots\ldots = b_1 = b,\\
B_n &= B_{n-1} \ldots\ldots = B_1 = B,\\
y_n &= y_{n-1} \ldots\ldots = y_1 = y,\\
x_n &= x_{n-1} \ldots\ldots = x_1 = x,\\
c_n &= c_{n-1} \ldots\ldots = c_1 = c,\\
d_n &= d_{n-1} \ldots\ldots = d_1 = d,\\
e_n &= e_{n-1} \ldots\ldots = e_1 = e,\\
m_{n+1} &= m_n \ldots\ldots = m_1 = m.
\end{aligned}$$

Tous les bancs étant occupées par des pièces de mêmes calibres, on aura en outre :

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} \ldots\ldots = a_1 = a\\
A_n &= A_{n-1} \ldots\ldots = A_1 = A\\
\frac{M_n}{e_n} &= \frac{M_{n-1}}{e_{n-1}} \ldots = \frac{M_1}{e_1} = \frac{M}{e}
\end{aligned}$$

$$S_{n-1}=T_{n-1}+T_{n-2}+\ \ldots\ +T_1+T+\frac{nM}{e}$$

$$P_n=P_{n-1}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ =P_1=P.$$

L'équation (6), combinée avec les précédentes, devient

$$\left[e-\tfrac{1}{2}fb-\tfrac{1}{2}fc-\frac{2f\pi e}{m}\right]T_n=\tfrac{1}{2}fAa+$$

$$\tfrac{1}{2}fb\left\{B+A\frac{y+x}{y}+\left((2n+1)\frac{M}{e}+2(T_{n-1}+T_{n-2}+\ldots+T)\right)\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}fc\left\{B-A\frac{y}{x}+\left((2n+1)\frac{M}{e}+2(T_{n-1}+T_{n-2}+\ldots+T)\right)\right\}$$

$$+\tfrac{2}{3}dfP+\left\{(n+1)\frac{M}{e}+T_{n-1}+T_{n-2}+\ldots+T\right\}\frac{2f\pi e}{m}\ \ldots\ (8)$$

Soient

V la vitesse de rotation par minute ;

F la quantité de travail consommée par minute, dans les frottements de n bancs de forerie. On a la relation :

$$F=2\pi eV\left\{T+T_1+\ \ldots\ldots\ +T_{n-1}\right\}. \qquad (9)$$

Equation du frottement, pour un seul banc de forerie.

Fesant, dans l'équation (8), $n=o$, on obtient

$$T=\frac{\tfrac{1}{2}fAa+\tfrac{1}{2}fb\left\{B+\frac{y+x}{y}A+\frac{M}{e}\right\}+\tfrac{1}{2}fc\left\{B-A\frac{x}{y}+\frac{M}{e}\right\}+\tfrac{2}{3}d_1P\ +\ \frac{M2\pi fe}{cm}}{c-\tfrac{1}{2}fb-\tfrac{1}{2}fc-\frac{2\pi fe}{m}} \qquad (10)$$

Equation du frottement, pour un seul banc de forerie, appliquée à la Fonderie de canons de Liége.

Voici les données de cet établissement :

$b=0^m,054$;

$c=0^m,044$;

$d=0,\ 044$;

$e=0,\ 825$;

$m=102$;

$B=525$ kilog.

Les engrenages étant graissés à la manière ordinaire, avec de l'huile de pieds de bœuf, et les surfaces frottantes étant de fonte ou de bronze, on a d'après l'aide-Mémoire de mécanique pratique de Morin,

$f=0,075$.

Le rapport $\frac{x}{y}$ ne nous est pas exactement connu : il est à peu de chose près égal à $\frac{1}{4}$. Mais comme sa présence n'influe pas d'un demi-kilogramme sur la valeur de T, pour le plus fort calibre, nous pourrons le négliger et nous poserons

$$x=0.$$

Ces données étant appliquées à l'équation (10), on obtient

$$T=A(0,0459a+0,0025)+0,0111M+2,36+0,0027P. \qquad (11)$$

Lorsque l'on supposera que la pièce tourne sans être forée, on devra poser, dans l'équation précédente,

$M=0$ et $P=0$.

Enfin si l'on suppose que le banc soit vide, on devra poser, dans l'équation (11),

$M=0$, $P=0$ et $A=0$.

Le tableau suivant indique le frottement produit dans le forage des pièces de divers calibres, à la fonderie de Liége. Les valeurs de M et de P sont extraites de mon mémoire sur la résistance utile produite dans le forage.

DÉSIGNATION DU CALIBRE.	Valeur de A en poids du canon, non foré.	Valeur de a ou rayon de la portée.	Valeur de M ou du moment de la résistance produite dans le travail utile du forage.	Valeur de P ou de la pression exercée contre le foret.	Valeurs de la vitesse V, nombre de tours par minute.	Effort vertical exercé tangentiellement à la roue motrice. Pour produire le travail utile du forage ou valeur de $\frac{M}{e}$.	Effort vertical exercé tangentiellement à la roue motrice. Pour vaincre la résistance produite par les frottements ou valeur de T.	Effort vertical exercé tangentiellement à la roue motrice. Total.	Quantité d'unités dynamiques dépensées par minute (kilogrammes-mètres). Pour produire le travail utile du forage ou valeur de $2\pi MV$.	Quantité d'unités dynamiques dépensées par minute (kilogrammes-mètres). Pour vaincre la résistance produite par les frottements ou valeur de F.	Quantité d'unités dynamiques dépensées par minute (kilogrammes-mètres). Totales.	*Observations.*
La pièce étant enlevé du banc . . .	»	»	»	»	5	»	2,56	»	»	61	61	
Canon de 6 en fonte	1000	0,103	58	1509	id.	46,06	14,00	60,06	1190	565	1555	
Id. tournant sans être foré.	1000	0,103	»	»	id.	»	10,00	»	»	259	259	
Canon de 12 en fonte	1870	0,153	86	2358	id.	104,24	26,00	150,24	2705	674	3377	
Id. tournant sans être foré.	1870	0,153	»	»	id.	»	19,00	»	»	495	495	
Canon de 18 en fonte	2650	0,153	117	2708	id.	141,82	37,00	178,82	3567	959	4526	
Id. tournant sans être foré . .	2650	0,153	»	»	id.	»	28,00	»	»	726	726	
Canon de 24 en fonte	5500	0,168	159	2990	id.	168,48	46,00	214,48	4349	1192	5541	
Id. tournant sans être foré . .	5500	0,168	»	»	id.	»	36,00	»	»	955	955	
Canon à bombes de 10e anglais en fonte	5400	0,18	216	5040	4	»,264,24	77,00	341,24	9650	4596	11220	
Id. tournant sans être foré .	5400	0,18	»	»	id.	»	61,00	»	»	1264	1264	

Frottements qui ont lieu à la forerie de Liége, lorsque plusieurs bancs successifs sont occupés par des canons de 24.

On déterminera ces frottements au moyen de l'équation (8), en y appliquant les données de la forerie de Liége. Mais comme deux roues qui engrènent l'une dans l'autre ont des mouvements opposés, il en résulte que pour les différents bancs de forerie, la force motrice agit alternativement de haut en bas et de bas en haut. Il faudra donc avoir égard, en appliquant l'équation (8), aux observations que nous avons faites à l'occasion de l'équation générale (6).

On trouve, tout calcul fait;

$T=46$ kilog.
$T_1=44$
$T_2=52$
$T_3=45$
$T_4=58$
$T_5=47$
$T_6=64$

On remarquera que le frottement est moindre aux roues de rang pair, parce que la force motrice agissant en sens contraire de la pesanteur, tend à alléger le système.

A la forerie de Liége, 7 bancs se trouvent à droite et trois autres à gauche de l'arbre de couche de la nouvelle machine à vapeur.

La quantité d'unités dynamiques consommées par les frottements, dans le forage de 10 canons de 24, est égale à

$$(T+T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T+T_1+T_2)2\pi Ve=4982.\pi Ve=$$
12908 kilog. mèt.,

ou en nombre rond, à trois chevaux-vapeur.

Si l'on n'avait eu égard ni à la force motrice ni à la réaction des engrenages les uns sur les autres, on aurait trouvé

$$36\times 10\times 2\pi Ve=9331.$$

Ce dernier résultat, qui diffère du précédent de plus d'un quart, est loin d'être négligeable et prouve l'importance de faire entrer l'action du moteur dans le calcul des frottements.

Frottements qui ont lieu à la forerie de Liége, lorsque plusieurs bancs successifs sont occupés par des canons à bombes de 10'.

On trouve, tout calcul fait,

$T=77$ kilog.
$T_1=75$
$T_2=86$
$T_3=77$
$T_4=96$
$T_5=78$
$T_6=105.$

Les dix bancs étant occupés par des canons à bouches de 10°, on consommerait, dans les frottements, une quantité d'action égale à

$$(T+T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T+T_1+T_2)2\pi eV=17256 \text{ kilog. mètres.}$$

La quantité de travail absorbée par la résistance utile produite dans le forage de ces bouches-à-feu, équivaut à 96300 kilog. mèt. En y ajoutant le travail absorbé par les frottements, on arrive à un total de 113556 kilogrammes-mètres ; ce qui fait un peu plus que la force de 25 chevaux-vapeur.

Il résulte de ceci que la nouvelle machine à vapeur de la forerie de Liége, suffit pour le forage de 10 canons à bombes de 18°. Mais nous devons faire observer que nous supposons la vitesse, de 4 tours par minute, obtenue par un juste rapport entre le rayon du pignon de l'arbre moteur et celui des roues motrices des bancs de forerie. Il arrive souvent dans les ateliers que pour diminuer la vitesse, on retrécit les ouvertures destinées au passage de la vapeur lorsqu'elle se rend dans le cylindre. Mais par ce procédé, on perd en force toute la vapeur qui n'est pas utilisée ; et si on agissait de même pour la nouvelle machine à vapeur de la forerie de Liége, celle-ci serait impuissante pour le forage de 10 canons à bombes.

Pressions supportées par les arbres des roues motrices.

La pression que supporte l'arbre de la roue, en ayant n après elle, est exprimée par

$$S_n+S_{n-1}.$$

En admettant que tous les bancs de la forerie de Liége soient occupés par des canons à bombes, ce qui répond au plus grand travail que l'on puisse effectuer avec la nouvelle machine à vapeur, on aura, pour la pression sur l'arbre de la roue voisine de l'arbre moteur,

$$S_n+S_{n-1}+B.$$

Substituant à S_n et S_{n-1} leurs valeurs données à l'occasion de l'équation (8), il vient :

$$S_n+S_{n-1}+B=B+T_6+2(T_5+T_4+T_3+T_2+T_1+T)+(2n+1)\frac{M}{e}$$

Introduisant les valeurs numériques relatives à un canon à bombes de 10°, à la place des lettres qui les représentent, on obtient

$$S_n+S_{n-1}+B=525+105+2(78+96+77+86+75+77)+13\times 264{,}24;$$

d'où $S_n+S_{n-1}+B=4554$ kilog.

Connaissant l'intervalle qui sépare les coussinets d'appui de la roue motrice, il sera facile de calculer quel doit être le diamètre de l'arbre pour résister à cette énorme pression.

Pressions supportées par les dents des roues motrices.

La pression que supportent les dents de chaque roue est représentée par :

$$S_n.$$

Dans l'hypothèse que tous les bancs soient occupés par des canons à bombes de 10°, la pression supportée par les dents de la roue motrice voisine de l'arbre de la machine sera :

$$S_6=T_6+T_5+T_4+T_3+T_2+T_1+T+\frac{7M}{e}=2444 \text{ kilog.}$$

Cette pression de 2444 kilogrammes sera supportée par une seule

dent, ou par plusieurs, selon qu'il y en aura une ou plusieurs constamment en contact avec celles de la roue voisine. Quoiqu'il en soit, il sera toujours facile de calculer les dimensions des dents pour qu'elles offrent la résistance convenable.

Dans les différents calculs que nous avons faits relatifs, soit aux frottements qui ont lieu dans une forerie, soit aux pressions supportées par les arbres des roues et à celles supportées par les dents, on a pu voir le rôle important que joue le moment M de la force nécessaire pour vaincre la résistance utile produite dans le forage. Sans la considération de cette quantité, il eut été absolument impossible de résoudre les divers problèmes qui font le sujet de ce Mémoire.

VII. — EXERCICES

DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ;

PAR J. N. NOËL,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Géométrie plane.

I. DISTANCES NÉGATIVES. La plupart des problèmes de *géométrie numérique* se réduisent finalement à calculer la distance x d'un point inconnu P d'une droite AB, nommée *axe* des x, à un point fixe O de cette droite, d'après certaines conditions ; et ce point O est dit l'*origine* des x.

A P O P B

De plus, quelles que soient les équations du problème proposé, il en existe toujours une autre, le plus souvent *implicite* ou sous-entendue, exprimant la *relation* de la distance $OP=x$ avec les deux distances, aussi grandes qu'on veut, savoir $AO=n$ et $AP=v$; et cette relation dépend uniquement de la *position* de P à l'égard de l'origine O. Suivant donc que le point P est *à gauche* du point O, entre O et A, où *à droite*, entre O et B, on aura nécessairement

$$v=n-x \text{ ou } v=n+x.$$

Or, on passe de la première de ces relations à la seconde en changeant simplement x en $-x$, dans cette première ; laquelle, en effet, devient $v=n-(-x)$ ou $v=n+x$; c'est-à-dire la seconde relation proposée. Donc aussi on passe de la formule du problème, où P est à la gauche de O, à la formule du problème renfermant les mêmes données et les mêmes conditions générales, mais où P est à la droite de O, en changeant simplement x en $-x$, dans la première formule, et en *mesurant* la longueur x en *sens directement opposé*, de O vers B, au lieu de O vers A.

Réciproquement, si en résolvant le problème proposé, où l'on suppose le point P à gauche de O, on trouve la valeur négative $x=-a$, le problème est impossible ; vu qu'on ne saurait affectuer la soustraction de a, pour avoir x. Mais comme $x=-a$ n'est au fond que $-x=a$, l'impossibilité vient de ce que l'on désignait par x

ou $+x$ ce qu'il aurait fallu représenter par $-x$; c'est-à-dire de ce que l'on supposait P à gauche de O, tandis qu'il aurait fallu le supposer à droite.

Si l'on change, en effet, x en $-x$ dans les équations proposées et dans $v=n-x$, ce sera changer x en $-x$ dans toutes les équations qui s'en déduisent et par conséquent dans $x=-a$; laquelle devient $-x=-a$ et $x=a$. Cette valeur a de x n'est plus impossible ; et comme alors elle répond à $v=n-(-x)$, c'est-à-dire à $v=n+x$, on voit que toute distance négative $-a$, résout le problème que donne le proposé quand, faisant abstraction du signe —, on mesure la longueur a de x en *sens directement opposé*.

De là donc ce double principe des distances négatives : *Si des longueurs sont mesurées sur une même droite et à partir du même point fixe ; celles mesurées dans un sens étant positives, les longueurs mesurées dans le sens directement opposé sont négatives ;* et réciproquement, *les longueurs négatives doivent être portées en sens directement contraire à celui des longueurs positives ;* et cela chaque fois, *lors même que la droite tournerait autour du point fixe ;* car pour toutes les positions de AB autour de O, les deux relations $v=n-x$ et $v=n+x$ ont toujours lieu.

Il importe d'observer toutefois qu'une distance négative $x=-a$ peut ne pas changer de sens ; mais cela n'arrive que quand le signe — provient du changement de signes de quelques longueurs données ; et celles-ci alors, en vertu du double principe ci-dessus, doivent être mesurées chacune en sens directement opposé. Or, pour savoir quelles sont ces longueurs, il suffit de changer x en $-x$, dans les équations du problème, et d'*interpréter* les nouvelles équations.

II. Le double principe des distances négatives sert de base à l'application de l'algèbre à la géométrie, c'est-à-dire à la trigonométrie, à la géométrie analytique et, en un mot, à la *géométrie numérique*, dont il généralise et simplifie en même temps les différentes recherches.

Ce principe fondamental n'était pas démontré complètement, ni énoncé d'une manière aussi générale, lorsque Carnot, dans sa géométrie de position, opposait à la théorie des *symboles négatifs*, les difficultés de divers genres que l'on connait. C'est qu'alors on n'avait pas encore la *véritable notion* de cette sorte de symboles ; et, pour le double principe, on ne voyait pas que la droite AB peut tourner autour du point O, et ce point, origine des x, glisser sur cette

droite. Il est même dit, dans un traité de géométrie analytique, d'ailleurs remarquable, sous beaucoup de rapports, et recommandé aux Professeurs, que le principe (restreint à une droite et à un point fixes) « n'est pas de ceux qu'on puisse démontrer *à priori*. On y parvient par analogie et par extension d'idées, et les applications viennent ensuite la confirmer. »

Cependant les raisonnements et les considérations, développés dans ce qui précède, nous paraissent démontrer complètement le double principe proposé; lequel, bien que très-général, n'est encore qu'une particularité de l'*interprétation* des symboles négatifs, dont le calcul d'ailleurs se démontre rigoureusement d'après les *définitions*, convenablement posées et généralisées, en vertu de l'analogie et d'une extension d'idées.

Qu'est-ce, en effet, qu'un symbole négatif, tel que $-a$, par exemple? C'est simplement une *soustraction indiquée*, actuellement *impossible;* vu que *le plus grand nombre inconnu de cette soustraction est sous-entendu, comme n'étant pas l'objet particulier du calcul actuel.*

Les opérations à exécuter sur le symbole $-a$ peuvent donc toujours se démontrer en faisant reparaître le plus grand nombre n inconnu, ce qui donne la binome $n-a$; puis en supprimant ce nombre n dans le résultat, comme ne pouvant se trouver dans l'expression demandée; et cela revient à y poser $n=0$.

De plus, si en résolvant un problème où x désigne le nombre inconnu, on trouve $x=-a$, d'où $-x=a$; ce problème est impossible en ce qu'on désignait par x ou $+x$, ce qu'il aurait fallu représenter par $-x$; c'est-à-dire en ce qu'on regardait x comme *augmentant* la grandeur n, de même nature et sous-entendue, tandis que x devait *diminuer* cette grandeur et avoir, par suite, *un mode opposé d'existence.*

D'ailleurs, le signe — de x peut provenir du changement de signe de l'un des nombres donnés du problème proposé; et alors ce nombre doit recevoir un *mode opposé d'existence*, et non pas x, dans l'interprétation du symbole $-a$ de x.

Enfin, l'interprétation des symboles négatifs fournit immédiatement, comme on sait, l'interprétation de plusieurs autres symboles, provenant de soustractions, et notamment l'interprétation des symboles *imaginaires*.

III. Points sur un plan. On sait que le système de deux équations, à deux inconnues x et y, représente autant de points diffé-

rents, sur le plan, qu'il y a de couples de valeurs réelles des *coordonnées* x et y, capables de satisfaire à ces équations. La recherche des points, à l'aide de la *géométrie analytique plane*, d'après certaines conditions, conduit donc à résoudre différents systèmes d'équations, à deux inconnues.

Comme chaque droite, représentée par une lettre, est *numérique*, c'est-à-dire que cette lettre est censée divisée par l'unité linéaire u, entièrement arbitraire, mais la même pour toutes les droites et toujours *sous-entendue*; il est clair que chaque équation, ne dépendant pas de la valeur particulière de l'unité u, est nécessairement *homogène*; car s'il en était autrement, c'est-à-dire si tous les termes n'étaient pas du même *degré*, l'équation cesserait d'exister pour une valeur double de u, par exemple; ce qui est contraire à l'hypothèse de u entièrement arbitraire. Chaque équation doit donc être homogène; et si elle ne l'est pas, c'est que des droites données sont égales à l'unité u et ont chacune 1 pour *valeur numérique*; vu que $u : u = 1$.

Dans ce cas, si l'on veut *construire* les valeurs des coordonnées de chaque point, il faut, pour que ces valeurs soient des termes de *proportions* ou des côtés de *triangles rectangles* à décrire, rétablir l'*homogénéité* en introduisant un nombre suffisant de facteurs u dans chaque terme de degré inférieur.

Observons toutefois que les constructions, avec le compas et la règle, ne donnent souvent que de médiocres approximations; fort incertaines, à moins que ces constructions ne soient très-simples. Le calcul est donc toujours préférable, pour la détermination exacte des points inconnus; et voici plusieurs exemples de la recherche de points sur un plan.

1° Par un point (a, a), donné sur la bissectrice de l'angle θ des deux axes des coordonnées obliques, mener une droite telle, que sa portion entre les deux axes ait la longueur donnée c.

Soient h et k les distances inconnues de l'origine aux points où la droite cherchée rencontre les axes des y et des x : on a évidemment le système d'équations *symétriques* :

$$hk = a(h+k) \text{ et } h^2 + k^2 - 2hk \cos\theta = c^2;$$

d'où $(h+k)^2 - 2a(1+\cos\theta)(h+k) = c^2$.

Prolongeant l'ordonnée a jusqu'au pied de la perpendiculaire, abaissée sur elle, de l'origine, il est clair que ce prolongement est $a\cos\theta$, et qu'ainsi la droite $p = a + a\cos\theta = 2a\cos^2\frac{1}{2}\theta$ est construite et peut se calculer par logarithmes. On a donc

$$h+k=p\pm\sqrt{(c^2+p^2)}=p\pm q\ ;\ \text{d'où}$$
$$h+k=p+q=b \text{ et } h+k=p-q=-d.$$

Les valeurs q, b et d peuvent aisément se construire ou se calculer ; et il en résulte les deux systèmes d'équations :

$$h+k=b \text{ et } hk=ab,\ h+k=-d \text{ et } hk=-ad.$$

Considérons le premier système, dont il suffit de tirer les deux valeurs de k, pour pouvoir mener ensuite les deux droites cherchées. Or, la *discussion* de ces deux valeurs apprend qu'elles sont toujours *positives* et quelles sont *réelles*, si $b>4a$; *égales* à $2a$, si $b=4a$, et *imaginaires*, si $b<4a$. Dans le second cas, le *minimum* de c est donné par $p+\sqrt{(c^2+p^2)}=4a$; et quant au troisième cas, les valeurs imaginaires de k ne prouvent pas l'impossibilité absolue du problème proposé : elles prouvent seulement que ce problème n'a pas de solution dans l'angle θ des coordonnées positives. Si en effet, on *interprète* les valeurs imaginaires de k, ce qui se fait en changeant simplement b en $-d$; non seulement les deux valeurs de k sont alors réelles, l'une positive et l'autre négative, mais elles sont précisément les deux solutions fournies par le second système précédent. Ainsi le problème a toujours deux solutions, et peut en avoir trois ou quatre, faciles à construire chaque fois. — On pourrait demander que le triangle intercepté par la droite cherchée fût équivalent à un carré donné b^2, ou que la somme des deux autres côtés du triangle eût la longueur donnée $2d$: chaque fois, il y aurait à discuter, à interpréter et à construire.

2° Lorsque a est une droite numérique donnée et p un nombre inconnu, on peut calculer et construire les quatre points réels qui répondent au minimum de p, dans le système :

$$xy=a^2 \text{ et } x^3-y^3-2a(x^2+y^2)-a^2p(x-y)+4a^3=0.$$

Mais pour n'avoir que des équations du second degré à résoudre, il faut d'abord poser $x-y=v$, puis élever les deux membres de cette équation *auxiliaire* au carré et au cube ; etc.

3° Considérons les deux systèmes d'équations homogènes :

$$x^3+y^3=2a^3 \text{ et } xy=a^2,\ x^3+y^3=2a^3 \text{ et } x^2+y^2=2a^2.$$

Si l'on pose $x+y=v$ dans le premier système, et $xy=v$ dans le second ; chaque fois, par des éliminations appropriées aux deux systèmes, on trouve une équation finale du troisième degré en v, ayant trois racines réelles, dont une rationnelle, sinon les trois. — Le premier système représente un point *réel* et deux points *imaginaires* : quelle modification faut-il introduire dans la seconde équation, pour que ces deux derniers points soient réels ?

4° Les coordonnées étant rectangulaires, quelle est la distance des deux points réels fournis par le système :

$$x-y=2 \text{ et } x^6+y^6=730?$$

(On pose d'abord $xy=v$, pour avoir $x^2+y^2=4+2v$; etc.)

5° Enfin, quelle est la distance des deux seuls points réels représentés par le système d'équations

$$x-y=1 \text{ et } x^7-y^7=127?$$

Quelle est l'équation de la droite passant par ces deux points? Et comment calculer l'aire du triangle rectangle que cette droite intercepte sur les axes rectangulaires des coordonnées?

IV. Points sommets de rectangles. Démontrer par le calcul, que si les coordonnées sont rectangulaires, les quatre points réels représentés par chacun des systèmes d'équations :

$$x^4+y^4=79 \text{ et } x^2+y^2+2xy=25,$$
$$x^2y+xy^2=6 \text{ et } x^3+y^3=\pm 9,$$
$$x^2+y^2-2xy=1 \text{ et } x^6+y^6=65,$$
$$x^3-ax^2-a^2x+a^3=0 \text{ et } y^3+ay^2-a^2y-a^3=0,$$

sont les sommets d'un rectangle dont l'aire est 10, dans le premier système ; $2\sqrt{10}$ dans le second ; 36 dans le troisième et $4a^2$ dans le quatrième.

V. Losange et octogone. L'angle des coordonnées étant quelconque dans le système d'équations :

$$x^4+y^4+x^2y^2=243 \text{ et } x^2y^2=81 ;$$

calculer le périmètre, l'aire et les équations des diagonales du losange, dont les sommets sont les quatre point réels, déterminés par ce système.

Mais si les coordonnées étant rectangulaires, on a

$$x^4+y^4=a^2b^2 \text{ et } x^2y^2=c^2d^2,$$

on peut aisément construire les huit points réels, sommets d'un octogone ; et calculer le périmètre et l'aire de celui-ci, si $x^4+y^4=97$ et $x^2y^2=36$.

VI. Rectangle inscrit. L'angle des coordonnées étant droit dans le système d'équations :

$$x^2+y^2=25 \text{ et } x^3y+xy^3=300 ;$$

il en résulte les sommets du rectangle inscrit dans le cercle représenté par la première équation. Décrire ce rectangle et calculer son aire, aussi bien que les équations de ses diagonales.

VII. Trapèze inscrit. Les coordonnées étant rectangulaires, démontrer, par le calcul, que les quatre points représentés par le système :

$y^2=x^2+2x+1$ et $x^2+y^2=61$;

sont les intersections des deux droites rectangulaires, exprimées par la première équation, avec la circonférence que désigne la seconde : ce sont les sommets d'un trapèze isocèle, *inscrit* dans cette circonférence. Or, comment construire ce trapèze ? comment en calculer le périmètre, l'aire et la longueur de ses diagonales ?

VIII. Losange circonscrit. Les coordonnées étant obliques, considérons le système :

$$x^2+y^2+2xy=36 \text{ et } x^2+y^2+xy=36.$$

La première de ces équations représente deux droites parallèles, coupant la circonférence désignée par la seconde équation, aux sommets d'un *rectangle inscrit*, et contacts d'un *losange circonscrit*. Cela posé, calculer les équations des tangentes, côtés du losange ; calculer le contour et l'aire tant du rectangle que du losange ; enfin, calculer l'angle des deux axes proposés et les angles qu'ils font avec les côtés du rectangle. — Mener à la circonférence $x^2+y^2=a^2$ une tangente telle, que sa portion entre les deux axes des x et des y ait la longueur donnée d. (Discuter, interpréter et construire).

IX. Trapèze isocèle. Si les axes comprennent un angle de 60°, on peut calculer le périmètre et l'aire du trapèze isocèle, ayant pour sommets les quatre points réels donnés par le système d'équations :

$$x^2+y^2=5 \text{ et } x^4+y^4=17.$$

Quelle est l'équation de la circonférence circonscrite, rapportée au même système d'axes obliques ?

X. Cercles tangents. Calculer les centres et les rayons des cercles inscrit, exinscrits et circonscrit au triangle rectangle, intercepté sur l'angle droit des deux axes, par la droite :

$$\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{4}x=1.$$

Quels sont le centre et le rayon de la circonférence passant, soit par les centres des trois cercles exinscrits, soit par deux de ces centres et celui du cercle inscrit ?

XI. De l'ellipse. L'ellipse jouissant d'un grand nombre de propriétés utiles, donne lieu à beaucoup d'exercices remarquables ; et en voici plusieurs, applicables aux deux autres courbes, sauf quelques modifications, comme on sait.

I. Considérons d'abord la *courbe* représentée par l'équation

$$Py+Qx^2=1,$$

P et Q désignant deux nombres donnés *positifs* et l'angle θ des axes des coordonnées étant quelconque. Menant, par l'origine, une droite

de direction n arbitraire, on reconnait que cette droite est terminée en deux points à la courbe et que la *corde* résultante est divisée en deux parties égales par l'origine; celle-ci est donc le *centre* de la courbe et la corde, un de ses *diamètres*. De sorte que la courbe proposée, appelée *ellipse*, n'a qu'un centre unique et une infinité de diamètres : elle est *fermée* et *rentrante* sur elle-même, comme la *circonférence ;* mais tous ces diamètres ne sont pas égaux entre eux.

2. Soient a et b les distances de l'origine ou du centre aux points où la courbe rencontre les axes des x et des y obliques, d'où $Qa^2=1$ et $Pb^2=1$. Il est clair que $2a$, sur l'axe des x, et $2b$, sur l'axe des y, sont deux *diamètres*, et que l'ellipse proposée est représentée par l'équation homogène :

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\ldots \quad (1)$$

Or, la *discussion* des valeurs de x et de y, tirées de cette équation, apprend que *les deux diamètres* $2a$ *et* $2b$ *sont tels, que chacun est bissecteur de toute corde de la courbe parallèle à l'autre, et chacun parallèle aux tangentes menées par les extrémités de l'autre diamètre.*

Ces deux propriétés appartiennent aux diamètres situés sur les deux axes des coordonnées, dans chaque système ; et voilà pourquoi $2a$ et $2b$ sont appelés *diamètres conjuguées*. Les quatre tangentes aux extrémités de $2a$ et $2b$, forment un parallélogramme *circonscrit* P, dit parallélogramme *conjugué*, comme ayant ses côtés respectivement égaux et parallèles aux deux diamètres conjugués $2a$ et $2b$; propriété qui n'a lieu que pour ce genre de parallélogrammes circonscrits : aussi a-t-on l'aire $P=4ab \sin \theta$.

3. Si l'angle θ varie, les valeurs des coefficients P et Q doivent aussi varier, pour que l'équation $Py^2+Qx^2=1$ représente toujours la même ellipse. *Cette courbe admet donc une infinité de couples de diamètres conjugués, dont un seul rectangulaire*; vu que θ ne peut avoir qu'une seule valeur de 90°.

Dans ce cas, comme en changeant l'une dans l'autre les dénominations des deux axes, on peut toujours faire qu'on ait $P>Q$; il est clair que si A et B désignent les distances du centre aux points où l'ellipse proposée coupe les axes des x et des y rectangulaires, d'où $QA^2=1$ et $PB^2=1$; 2A et 2B seront les deux seuls diamètres conjugués à angles droits et l'on aura $2A>2B$. L'ellipse proposée est donc alors représentée par l'équation où $\theta=90°$, savoir :

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2\ldots(2)$$

Par cette équation, on reconnaît que 2A et 2B sont chacun bis-

secteur de toute corde de la courbe qui lui est perpendiculaire : ce sont, par suite, les deux *axes principaux* ou de *symétrie* et simplement les deux *axes* de l'ellipse : 2A le *grand axe* et 2B le *petit*. Les extrémités de 2A et 2B sont appelées *sommets* de la courbe : ce sont les *contacts* du rectangle R *circonscrit*, dit *rectangle des deux axes*, comme ayant ses côtés respectivement égaux et parallèles à 2A et 2B : donc R=4AB.

Soit d un demi-diamètre et (x,y) son extrémité sur l'ellipse proposée : éliminant successivement y et x entre (2) et $d^2=x^2+y^2$ on verra que *de tous les diamètres de l'ellipse*, 2A *est le plus grand et* 2B *le plus petit.*

Enfin, marquant sur 2A deux points F et F', appelés *foyers* de l'ellipse, aux distances c et $-c$ du centre et données par $c^2=A^2-B^2$, on sera conduit à la propriété *caractéristique* de l'ellipse, d'après laquelle on *définit* cette courbe plane et on la *décrit*, soit par *points successifs*, soit d'un *mouvement continu.*

4. Soit d un demi-diamètre de l'ellipse (1) et n sa direction : on a les trois équations simultanées :

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

$$y=nx \text{ et } d^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta.$$

Éliminant x et y entre ces équations ; l'équation finale du second degré en n et d, n'a pas d'autres variables que ces deux nombres. Si donc on la résout par rapport à n, la quantité sous le radical est nécessairement rendue nulle par le *maximum* et par le *minimum* de d; ce qui donne chaque fois

$$(d^2-b^2)n=b^2\cos\theta \text{ et } d^4-(a^2+b^2)d^2+a^2b^2\sin^2\theta=0.$$

Les racines de la seconde équation sont le maximum A^2 et le minimum B^2 de d^2 ; ainsi on a les deux relations connues :

$$a^2+b^2=A^2+B^2 \text{ et } ab\sin\theta=AB.$$

De plus, on a, pour calculer la direction n de A et la direction n' de B :

$$(A^2-b^2)n=b^2\cos\theta \text{ et } (B^2-b^2)n'=b^2\cos\theta ;$$

d'où $a^2nn'=-b^2$ et $a^2(n+n')\cos\theta=b^2-a^2$.

Par conséquent les directions n et n' satisfont à la condition de *perpendicularité*, savoir :

$$1+nn'+(n+n')\cos\theta=0;$$

et cela doit être, puisque le maximum 2A et le minimum 2B de $2d$ sont les axes de l'ellipse proposée, comme on l'a vu (3).

Résolvant l'équation en d^4 et d^2 par rapport à d^2, puis faisant

$$D^2=a^2+b^2-2ab\sin\theta \text{ et } D'^2=a^2+b^2+2ab\sin\theta,$$

on verra ensuite que $2d=D'\pm D$; d'où il vient

$$2A=D'+D \text{ et } 2B=D'-D.$$

Il existe une construction très-simple et très-remarquable des deux droites D et D' : comment effectuer cette construction ?

5. Si les deux points d'intersection de la sécante $y=nx+h$, avec l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, se réunissent en un seul (x', y'); d'où la condition $a^2n^2+b^2=h^2$, il est clair que la droite touche la courbe au point (x',y'); et l'on trouve

$$a^2ny'=-b^2x', \quad a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2.$$

La seconde de ces équations représente la *tangente* au point (x', y') de l'ellipse dont $2a$ et $2b$ sont les diamètres conjugués; tandis que la première équation détermine la direction n, *unique et toujours réelle*, de cette tangente. Il en résulte que *les tangentes aux extrémités d'un diamètre quelconque de l'ellipse sont parallèles entre elles*; *et réciproquement.* Il existe donc une infinité de parallélogrammes circonscrits, non conjugués; et il ne peut y avoir trois tangentes parallèles entre elles.

D'ailleurs, si n' est la direction du diamètre mené au point du contact (x', y'), d'où $y'=n'x'$, il vient $a^2nn'+b^2=0$. Et puisque les tangentes aux extrémités de ce diamètre sont parallèles à son conjugué, on voit que n est la direction de ce conjugué. Ainsi les directions n et n' de deux diamètres conjugués quelconques, et par conséquent les directions de deux *cordes supplémentaires*, respectivement parallèles à ces diamètres, satisfont toujours à la relation

$$a^2nn'+b^2=0.$$

6. L'ellipse étant rapportée à ses deux diamètres conjugués $AB=2a$ et $CD=2b$, soit M le point donné (x', y') de tangence; soient y_1 et y_2 les ordonnées de la tangente en M, répondant aux abscisses $x=a$ et $x=-a$; soient enfin Y_1 et Y_2 les longueurs de ces ordonnées, prolongées jusqu'aux prolongements des droites AM et BM. On démontre aisément que :

$$Y_1=2y_1, \quad Y_2=2y_2, \quad y_1y_2=b^2 \text{ et } y'(y_1+y_2)=2b^2.$$

Le milieu de Y_1 est donc un point de la tangente en M. Et comme la même propriété a lieu pour l'*hyperbole* et pour la *parabole*, il en résulte le moyen le plus simple de mener, à chacune de ces trois courbes, une tangente en un point donné M de cette courbe.

Si donc les deux axes principaux 2A et 2B de l'ellipse sont donnés et que la tangente en M, fesant avec le prolongement de 2A un angle de 60°, aille le couper à la distance connue d du centre; comment calculer le contour et l'air du trapèze rectangle T,

dont y_1 et y_2 sont les bases parallèles? (T pourrait tourner autour de 2A; etc.).

D'après la propriété caractéristique de l'ellipse, on démontre aisément que *la bissectrice du supplément de l'angle des deux rayons vecteurs FM et F'M du point donné M de l'ellipse, touche la courbe en ce point.* Il en résulte que : 1° les rayons vecteurs menés au point de contact M, font avec la tangente et d'un même côté, deux angles égaux ; 2° la *normale* au point M est bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs de ce point M ; 3° la circonférence décrite sur le grand axe, comme diamètre, coupe la tangente aux pieds des deux perpendiculaires, distances des deux foyers à cette tangente; etc. (On peut d'ailleurs démontrer analytiquement chacune de ces propositions).

On sait aussi, d'après la propriété caractéristique de l'hyperbole, que *la bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs d'un point M de la courbe lui est tangente en ce point* ; car tout autre point de cette droite est situé hors de la courbe.

7. L'ellipse étant rapportée à ses axes 2A et 2B, soient a et b deux demi-diamètres quelconques, n et n' leurs directions : on trouve

$$(A^2n^2+B^2)\,a^2=A^2B^2\,(1+n^2),$$
$$(A^2n'^2+B^2)\,b^2=A^2B^2\,(1+n'^2).$$

Si $a=b$, on a $n'=-n$, et réciproquement. L'ellipse admet donc une infinité de couples de diamètres égaux, diagonales d'autant de rectangles inscrits; or, quel est le plus grand de tous ces rectangles?—Il n'y a qu'un seul carré inscrit; comment le construire?—Il n'y a qu'un seul système de diamètre conjugués égaux entre eux ; comment les tracer? — Il existe une infinité de parallélogrammes conjugués, dont un seul losange et un seul rectangle, tous équivalents entre eux et au minimum de tout parallélogramme circonscrit.

Si $nn'+1=0$, il en résulte 1 sur a^2+1 sur $b^2=1$ sur A^2+1 sur B^2. L'ellipse admet donc une infinité de couples de diamètres rectangulaires, diagonales d'autant de losanges inscrits, dont un seul carré ; or, quel est le plus petit de tous ces losanges inscrits?

Enfin, si $A^2nn'+B^2=0$; $2a$ et $2b$ sont deux diamètres conjugués, comprenant un angle θ; et l'on retrouve les relations $a^2+b^2=A^2+B^2$ et $ab\sin\theta=AB$. Comme l'angle θ est quelconque, on voit encore que l'ellipse admet une infinité de systèmes de diamètres conjugués, dont un seul rectangulaire.

8. La détermination des axes principaux 2A et 2B, de position

et de longueur, peut se faire lorsque les deux diamètres conjugués $2a$ et $2b$ sont donnés et tracés. Voici pour cet effet, quatre propriétés, faciles à démontrer :

1° Si n et n' sont les directions des deux demi-diamètres d et d', situés de part et d'autre de l'axe des y, dans l'ellipse (1); ces deux diamètres sont égaux dès que $n' = -n$; et réciproquement.

2° Si les deux diamètres égaux sont en même temps conjugués, ils ont pour équations : $ay = \pm bx$, et pour longueur : $2d = \sqrt{(2a^2 + 2b^2)}$; il est donc facile de les tracer.

3° Les deux axes cherchés 2A et 2B se trouvent sur les bissectrices des angles formés par les deux diamètres conjugués égaux.

4° Enfin les deux demi-axes A et B sont les diagonales respectives des deux carrés, ayant pour côtés les projections orthogonales de d sur les bissectrices des angles compris par les deux diamètres conjugués, égaux à $2d$ chacun.

Pour le demi-diamètre d, on élimine x et y entre les trois équations simultanées: (1), $y = nx$ et $d^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta$. De même pour d', en remplaçant n et $\cos\theta$ par n' et $-\cos\theta$. Quant à la quatrième propriété, on fait $a = b = d$ dans les expressions de D^2 et D'^2 qui ont servi plus haut (4) à construire 2A et 2B. On a ainsi une vérification de cette construction remarquable.

9. Considérons l'ellipse et la circonférence décrite sur le grand axe AB = 2A, comme diamètre, 2B désignant le petit axe. Prenons sur AB la longueur AC = h et menons, par C, sur AC, la perpendiculaire, coupant l'ellipse et la circonférence en D et en G : il en résulte les demi-segments elliptique et circulaire, savoir : CAD = R et CAG = R'.

Les ordonnées, depuis $x = A - h$ jusqu'à $x = A$, divisent h en un nombre n de parties égales à u et rencontrent les *arcs* de R et R' aux sommets de deux polygones P et P' *inscrits*. Or, ces polygones sont composés chacun de n trapèzes rectangles, tous de même hauteur u; si donc t et t' sont deux trapèzes *correspondants*, on sait que leurs bases, en ligne droite, sont dans le rapport de B à A, aussi bien par suite que t et t'; d'où il vient $At = Bt'$. Mais comme P est la somme de tous les t et P' la somme de tous les t', il est clair que AP = BP'.

D'ailleurs, le polygone $P < R$ et $P' > R'$; si donc z et z' désignent les différences, on aura $P = R - z$ et $P' = R' - z'$. Substituant donc, il vient

$$AR = BR' + Az - Bz'.$$

Plus est grand le nombre n des parties u de h, plus les polygones P et P′ ont de sommets communs avec les demi-segments R et R′; plus donc ils approchent de coïncider avec ces derniers et plus les différences z et z' sont petites. Ces différences varient donc, aussi bien que $Az-Bz'$, sans que l'égalité précédente cesse d'être exacte. Or, comme A, B, R et R′ sont des nombres constants, l'égalité proposée est absolument indépendante de la différence variable $Az-Bz'$; car si cette différence devait y être conservée, le nombre constant AR serait toujours égal au nombre variable $BR'+Az-Bz'$; chose évidemment absurde. Donc on a exactement

$$AR=BR';$$

absolument comme si la différence $Az-Bz'$ était rigoureusement nulle, aussi bien que z et z'; c'est-à-dire comme si P et P′ coïncidaient avec R et R′.

Or, pour cela, il faut que les ordonnées, divisant h en n parties égales à u, soient *immédiatement* consécutives; ce qui exige que le nombre n soit *infiniment grand* (ou surpasse le plus grand nombre imaginable) et la partie u, *infiniment petite* (ou moindre que la plus petite partie assignée, si petite qu'elle soit). De sorte que les *arcs* de R et R′ ne sont alors que des *lignes brisées*, ayant un même nombre infini n de *côtés*, chacun *infiniment petit*; et par suite les trapèzes rectangles t et t' coïncident avec les *tranches* T et T′ de R et R′ : donc puisque $AT=BT'$, il en résulte sur-le-champ $AR=BR'$.

De là, si R est le quart de l'aire E limitée par l'ellipse, en même temps R′ est le quart de l'aire du cercle; d'où il vient

$$E=\pi AB=\pi ab \sin\theta.$$

Tout *secteur* elliptique, compris par deux diamètres conjugués $2a$ et $2b$, est déterminé par un secteur circulaire dont l'angle est droit; ainsi *deux diamètres conjugués divisent l'aire de l'ellipse en quatre secteurs équivalents* (à démontrer chaque fois).

Enfin, *deux ellipses sont semblables lorsque leurs axes homologues sont proportionnels*: ce sont deux lignes *brisées semblables*; car elles ont le même nombre infini de côtés (ou *éléments rectilignes*) homologues proportionnels, comprenant des angles homologues égaux (facile à démontrer). Si d'ailleurs les ellipses sont concentriques et les axes homologues, en ligne droite; ces deux ellipses sont *semblables*, de *forme* et de *position* : elles ont alors un même *centre de similitude*.

10. Connaissant numériquement les diagonales $2c$ et $2d$ d'un lo-

sange tracé, calculer et construire les axes principaux 2A et 2B de l'ellipse d'aire maximum, inscrite dans ce losange, et démontrer qu'elle touche les côtés aux extrémités de ses deux diamètres conjugués égaux. — Comment vérifier que l'aire elliptique maximum inscrite surpasse l'aire du cercle inscrit dans le même losange? — Comment décrire l'ellipse, d'aire maximum, inscrite dans le carré dont $2d$ est la diagonale donnée? — Comment calculer l'aire du seul carré circonscrit à une ellipse donnée? Et comment vérifier que l'aire de cette ellipse est moindre que l'aire du cercle inscrit dans le même carré?

Observez d'ailleurs, que la méthode *des projections orthogonales* conduit très-simplement, de l'aire du cercle à celle de l'ellipse, et sert à trouver immédiatement l'ellipse d'aire maximum ou minimum, *inscrite* ou *circonscrite*, soit à un triangle, soit à un parallélogramme donné.

11. Voici encore une suite de propriétés fort remarquables, bien faciles à démontrer, d'après les équations des tangentes :

1° Lorsque le produit nn' des directions des deux côtés adjacents de tout parallélogramme, circonscrit à une ellipse donnée, est un nombre constant et négatif $-p^2$, les sommets de ce parallélogramme variable décrivent une seconde ellipse dont les axes se trouvent sur ceux de la première; et les deux ellipses sont semblables, de forme et de position, si le parallélogramme circonscrit variable est conjugué.

2° Soient E_1, E_2, E_3, E_4..., une suite d'ellipses concentriques et rapportées au même système d'axes rectangulaires, de telle sorte que chacune soit le lieu géométrique des sommets du parallélogramme variable, circonscrit à celle qui la précède immédiatement et dans lequel le produit nn' ou $-p^2$ est constant : si $-p^2$ reste le même pour passer de chaque ellipse à la suivante, toutes ces ellipses, à partir de la seconde, si les parallélogrammes ne sont pas conjugués, et à partir de la première, dans le cas contraire, sont semblables, de forme et de position; de sorte que leurs aires deviennent de deux en deux fois plus grandes.

3° Le parallélogramme variable, circonscrit à l'ellipse E_1, est un rectangle, si $p=1$, c'est-à-dire si $nn'=-1$; et alors les sommets de ce rectangle variable décrivent une circonférence concentrique à l'ellipse E_1, ayant pour rayon le côté du losange des sommets de cette ellipse.

4° Les deux droites, menées des contacts de deux côtés opposés

d'un rectangle R, circonscrit à E_1, à un point du troisième côté de ce rectangle, donnent une somme *minimum*, égale au diamètre du cercle circonscrit à R, lorsque le point du troisième côté est le contact de celui-ci avec l'ellipse proposée.

5° Les deux *cordes de contacts* de l'ellipse E_1 avec les deux couples de tangentes, menées de deux points *infiniment voisins* de la circonférence concentrique, circonscrite au rectangle R, lui-même circonscrit à E_1, se coupent sur une ellipse E'_1, *confocale* avec la première E_1 (et *enveloppe* de chaque corde joignant deux contacts).

6° De cette manière, les ellipses $E_1, E_2, E_3, E_4 \ldots$, semblables de forme et de position (2°), conduisent à la suite d'ellipses, respectivement confocales, E'_1, E'_2, E'_3, E'_4, etc. Or, toutes ces dernières ellipses sont semblables, de forme et de position; et leurs aires deviennent de deux en deux fois plus grandes. — Quel est le rapport des aires de E_1 et E'_1?

7° Si les directions variables n et n', de deux tangentes à la circonférence $x^2+y^2=r^2$, sont telles qu'on ait constamment $nn'=-p^2$, p étant un nombre donné; l'intersection de ces deux tangentes décrit une ellipse. De plus, les deux *cordes de contacts* de la circonférence avec les deux couples de tangentes, menées de deux points immédiatement consécutifs de l'ellipse, se coupent sur une seconde ellipse, semblable à la première, mais inversement située; et l'aire du cercle proposé est moyenne proportionnelle entre les aires des deux ellipses.

8° Enfin, le produit des directions variables n et n' de deux tangentes à une ellipse donnée, étant constant et négatif, l'intersection de ces deux tangentes variables décrit une ellipse concentrique à la proposée. Or, si le produit constant nn' est représenté successivement par $-p^2$ et par -1 sur p^2, le nombre donné p ayant la même valeur dans les deux cas, les deux ellipses résultantes sont semblables entre elles, mais inversement situées. — Ces deux ellipses e et e', comme on l'a vu (5°), en fournissent deux autres, concentriques à la proposée et respectivement *confocales* avec e et e' : ces deux autres ellipses sont-elles semblables entre elles?

12. Lorsque l'angle des coordonnées est de 60°, les deux parallèles représentées par l'équation

$$x^2+y^2+2xy=64,$$

coupent les axes des coordonnées aux sommets d'un rectangle, dont les diagonales sont les diamètres conjugués égaux d'une ellipse circonscrite : quels sont les axes de cette ellipse et quelle est l'expression de son aire?

Si $3c$ et $c\sqrt{3}$ sont les dimensions du rectangle dont le centre est à l'origine des coordonnées, les axes étant respectivement parallèles aux côtés de ce rectangle; calculer les axes et l'aire de l'ellipse circonscrite, ainsi que les équations des tangentes à celle-ci, menées par les sommets du rectangle; et quelle est l'aire du losange circonscrit résultant? — Si le système tourne autour du grand axe prolongé de l'ellipse, on peut aisément calculer, d'après la *méthode infinitésimale*, les volumes engendrés par le demi-rectangle, la demi-aire elliptique et le demi-losange.

13. Propriétés des cordes. 1° Soient $2a$ et $2b$ les axes d'une ellipse; soit c l'excentricité et $2d$ la longueur d'une *corde*, passant par un foyer et faisant avec le grand axe $2a$ l'angle α, d'où $n=\text{tang}\,\alpha$: on trouve la relation :

$$(a^2n^2+b^2)d=ab^2(1+n^2) \text{ ou } (a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)d=ab^2.$$

Ainsi *de toutes les cordes, passant par un foyer, la plus grande est le grand axe et la plus petite, le paramètre.*

2° Soit $2d'$ une autre corde, passant par le même foyer, et soit $n'=\text{tang}\,\alpha'$ sa direction. Soit d'ailleurs m la somme des *inverses* de d et de d': on trouve aisément

$$ab^2m-2b^2=c^2(\sin^2\alpha+\sin^2\alpha')=c^2k.$$

Si les deux cordes font entre elles l'angle donné v, d'où $\alpha'-\alpha=v$; il est clair qu'en posant $\alpha'=u+\frac{1}{2}v$ et $\alpha=u-\frac{1}{2}v$, on trouve

$$2\cos v\,\sin^2u=k-2\sin^2\tfrac{1}{2}v.$$

Suivant donc que l'angle v est aigu ou obtus, le *minimum* ou le *maximum* de k et par conséquent celui de m, est $k=2\sin^2\frac{1}{2}v$; d'où

$$\alpha'=\tfrac{1}{2}v,\ \alpha=-\tfrac{1}{2}v \text{ et } d=d'.$$

Le maximum ou le minimum de la somme des inverses de deux cordes de l'ellipse, passant par un foyer et comprenant un angle donné v, *obtus ou aigu, a donc lieu dès que ces deux cordes sont égales entre elles.*

3° Le maximum ou le minimum de m étant donné par

$$ab^2m=2c^2\sin^2\tfrac{1}{2}v+2b^2,$$

il est clair que ce maximum ou ce minimum est le plus grand possible dès que $v=90°$; et comme les deux cordes sont égales à d, on a alors

$$ab^2m=a^2+b^2 \text{ et } (a^2+b^2)d=2ab^2.$$

4° Le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes, passant par un foyer de l'ellipse dont $2a=20$ et $2b=12$ sont les axes, est une seconde ellipse, *semblable* à la première : quelles sont les valeurs numériques des axes de cette seconde ellipse?

En général le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes,

menées d'un point donné P sur le plan de l'ellipse, est une seconde ellipse semblable, dont le centre est au milieu de la droite OP, O étant l'origine.

5° Enfin, de tous les parallélogrammes inscrits, dont deux côtés opposés passent par les deux foyers, le plus grand est le rectangle : quelle est l'aire de ce rectangle, lorsque $2a=58$ et $2b=42$?

14. Propriétés caractéristiques. Une propriété *caractérise* la courbe plane, lorsqu'elle ne convient qu'à cette courbe. L'ellipse jouit de plusieurs *propriétés caractéristiques*, d'après chacune desquelles on peut la *définir* et la *décrire*. C'est ainsi, par exemple, que *l'ellipse est une courbe plane telle, que le produit des distances P et P' de deux points donnés F et F' à chacune des tangentes à cette courbe, est un nombre constant et positif* b^2.

Soient en effet, (c,o) et (—c,o) les deux points F et F', donnés sur l'axe des x rectangulaires ; soit (x',y') le point de contact de la tangente $y=nx+h$ à la courbe cherchée : si l'on pose $a^2=b^2+c^2$ et si l'on observe que la direction n de la tangente au point (x',y') ne peut avoir qu'une seule valeur, on trouve, pour satisfaire à cette condition, les deux équations :

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2 \text{ et } a^2ny'+b^2x'=0.$$

La première de ces équations représente l'*ellipse* dont F et F' sont les *foyers*, $2a$ et $2b$ les *axes* principaux.

Quant à la seconde équation, elle détermine la direction n de la tangente $y-y'=n(x-x')$ au point (x',y') ; celle-ci a donc pour équation

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2.$$

Pour définir l'*hyperbole*, il faut supposer le produit PP' constamment négatif et égal au monome donné $-b^2$.

L'avantage de ces définitions, c'est de conduire directement à l'équation de chaque courbe et à celle de sa tangente au point (x',y').

XII. Méthode infinitésimale. 1° Le principe fondamental de cette méthode *consiste à regarder comme absolument nulle, et à négliger par suite, toute grandeur à l'égard de celle qui la contient un nombre infini de fois ; comme ne pouvant ni l'augmenter ni la diminuer.*

Soient en effet, a et b deux nombres donnés et *constants* ; x et y deux nombres *variables*, susceptibles de devenir chacun aussi petit qu'on le veut, et par conséquent *infiniment petit*, sans qu'on cesse d'avoir exactement $a=b+x-y$; je dis qu'on a rigoureusement $a=b$.

Car si la différence $x-y$, nécessairement variable avec x et y,

n'était pas nulle, le nombre constant a serait *toujours* égal au nombre variable $b+x-y$; il ne serait donc pas constant; contrairement à l'hypothèse. Il faut donc que $x-y=0$ et $a=b$; absolument comme si les variables x et y, que l'on peut supposer infiniment petites chacune, aussi bien que leur différence, étaient rigoureusement *nulles*. La différence infiniment petite $x-y$ est donc comme nulle et doit se négliger à l'égard de la grandeur b, qui la contient une infinité de fois; d'où il vient exactement $a=b$: c'est le principe fondamental proposé.

2° Les variables x et y devant donc disparaître de l'équation finale $a=b+x-y$, ne peuvent être que des *auxiliaires*, pour faciliter les raisonnements et la mise en équation; de sorte que, même avant d'en faire usage, on avait $a=b$. Mais cette égalité était d'abord inconnue; et la suppression des variables x et y, qui servent à la découvrir, constitue la *règle des variables auxiliaires*.

3° Cette règle est l'une des plus simples, des plus claires et des plus exactes, parmi les méthodes élémentaires de la géométrie : elle fournit directement la proportion entre les circonférences et leurs diamètres, aussi bien que les expressions de l'aire du cercle et de l'aire de tout secteur circulaire; elle fournit les expressions des aires dans les corps ronds et l'expression du volume, soit de toute pyramide, de tout cylindre et de tout cône, soit de tout segment sphérique, etc. Mais on peut souvent abréger les raisonnements et les calculs *en supprimant d'abord, d'après la méthode infinitésimale, ce qui doit disparaître à la fin, en vertu de la règle ci-dessus.*

1. Par exemple, soit T l'aire du *segment* de la *parabole* $y^2=2px$, limité par l'*arc* de la courbe, depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$; et de plus limité par l'axe des y et par la parallèle à l'axe des x, menée de l'extrémité de h. Soit k la longueur de cette parallèle, donnée par $2pk=h^2$; soit s le sinus de l'angle des coordonnées, compris par les côtés h et k du parallélogramme P : celui-ci est divisé par l'*arc diagonal* de la courbe en deux parties T et T', appelées *segments* de la parabole proposée; d'où $T'=P-T$. Il s'agit de calculer l'aire T.

Or, les parallèles à l'axe des x, depuis $y=0$ jusqu'à $y=h$, divisent h en n parties égales à u, d'où $h=nu$, et divisent T en n *tranches*, à bases parallèles et toutes de même hauteur us. Soit t la v ième de ces tranches, à partir de l'origine : ses deux bases x' et x'' répondent donc à $y=uv$ et à $y=u(v-1)$; d'où $2px'=v^2u^2$ et $2px''=(v-1)^2u^2$.

La v ième tranche t est moindre que le parallélogramme sux',

comme y étant contenue; mais elle est plus grande que le parallélogramme sux'', comme le renfermant. On a donc $t=sux'-<su(x'-x'')$; d'où en multipliant par $2p$ et substituant, il vient

$$2pt=su^3v^2-<su^3[v^2-(v-1)^2].$$

Or, on a $v^2=\frac{1}{3}[v^3-(v-1)^3]+<[v^2-(v-1)^2]$; donc

$$2pt=\tfrac{1}{3}su^3[v^3-(v-1)^3]-<su^3[v^2-(v-1)^2].$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4,\ldots, n$, ajoutant et réduisant, on trouve

$$2p\mathrm{T}=\tfrac{1}{3}sh^3-<suh^2.$$

Cette équation, toujours exacte, n'a que le seul terme en u, variable avec n; il faut donc que ce terme disparaisse : cela donne exactement

$2p\mathrm{T}=\frac{1}{3}sh^3$; d'où $\mathrm{T}=\frac{1}{3}shk=\frac{1}{3}\mathrm{P}$ et $\mathrm{T}'=\frac{2}{3}\mathrm{P}$.

2. Maintenant, pour voir les abréviations que la méthode infinitésimale apporte à la règle des variables auxiliaires, observons d'abord que $v^2-(v-1)^2=2v-1$, et que par suite on a

$$2pt=su^3v^2-<2su^3v.$$

Ensuite, puisque le nombre, dû à $2su^3v$, disparaît de l'expression de $2p\mathrm{T}$, comme on vient de le démontrer; on voit qu'on simplifiera les calculs *en négligeant d'abord tous les termes où, comme dans* $2\mathrm{su}^3\mathrm{v}$, *l'exposant de* u *surpasse de plus d'une unité celui de* v. Or, cela revient ici à supposer d'abord n infini et u infiniment petit, puis à regarder la v ième tranche t (dont alors les deux bases parallèles sont immédiatement adjacentes, et par suite égales) comme un parallélogramme infiniment petit. Par cette première abréviation, on a simplement

$$2pt=su^3v^2.$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4,\ldots, n$; ajoutant entre elles les n expressions résultantes et désignant par $\mathrm{S}n^2$ la somme des carrés des n premiers nombres entiers, n étant ici infini, on aura

$$2p\mathrm{T}=su^3\mathrm{S}n^2 : \text{déjà } 2p\mathrm{T}=\tfrac{1}{3}sh^3=\tfrac{1}{3}su^3n^3;$$

il faut donc que, n étant infini, on ait $\mathrm{S}n^2=\frac{1}{3}n^3$. Cela revient encore, dans $\mathrm{S}n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, à regarder 1 comme nul vis-à-vis de n infini. On voit que, dans $2p\mathrm{T}=su^3\mathrm{S}n^2$, il faut remplacer $\mathrm{S}n^2$ par $\frac{1}{3}n^3$; et telle est la seconde abréviation que la méthode infinitésimale apporte à la règle des variables auxiliaires n et u.

3. Cette seconde abréviation est d'autant plus remarquable qu'elle s'applique à $\mathrm{S}n^m$, n étant infini et m un exposant quelconque, différent de -1; c'est-à-dire qu'on a toujours $\mathrm{S}n^m=nn^m : (m+1)$.

En effet, ayant toujours $h=nu$, h étant un nombre constant et u

un nombre infiniment petit, la *série binomiale* donne

$$(v-1)^{m+1}=v^{m+1}-(m+1)v^m+\tfrac{1}{2}m(m+1)v^{m-1}, \text{ etc.}$$

Multipliant de part et d'autre par u^{m+1}, puis négligeant tous les termes où l'exposant de u surpasse de plus d'une unité l'exposant de v (vu qu'en vertu de la règle des variables auxiliaires, tous ces termes donnent des nombres qui disparaissent dans le résultat final des calculs), il est clair qu'on aura

$$(m+1)u^{m+1}v^m=u^{m+1}[v^{m+1}-(v-1)^{m+1}];$$

$$\text{d'où } (m+1)u^{m+1}\mathrm{S}n^m=(nu)^{m+1}=h^{m+1}.$$

Cette relation, due à la méthode infinitésimale, reçoit beaucoup d'applications remarquables; et en voici plusieurs, pour *exercices*.

4. Soit G une grandeur géométrique, aire ou volume; soit b sa base, longueur ou aire; enfin, soit h sa hauteur numérique, droite ou courbe donnée: si x est une section parallèle à b, faite à la distance du sommet, désignée par y et mesurée sur h; et si m étant un exposant quelconque, on a toujours

$$b : x :: h^m : y^m;$$

la décomposition de G en *tranches*, toutes de même épaisseur u infiniment petite, donne la formule très-générale :

$$\mathrm{G}=bh : (m+1).$$

5. Les coordonnées étant rectangulaires, soit T le segment, depuis $x=0$ jusqu'à $x=h$, dans l'une des trois courbes

$$y^2=2px+qx^2.$$

Si T tourne autour de h, on trouve, toujours par la décomposition en tranches, la formule :

$$\text{vol. T}=\pi h^2(p+\tfrac{1}{3}qh).$$

Cette formule s'applique à la *parabole*, où $q=0$; à l'*hyperbole*, où q est *positif*; à l'*ellipse*, où q est *négatif*; enfin, au *cercle* de rayon r, où $q=-1$ et $p=r$. Dans ce cas, on a l'expression du volume de tout *segment sphérique*, de hauteur h; puis l'expression de la *sphère*; celle de tout *secteur sphérique* et de tout *onglet*; etc.

6. Soit une suite de triangles tels, qu'en suivant le contour de chacun et prolongeant chacun de ses côtés de n fois ce côté, on ait les sommets du triangle qui suit immédiatement : 1° Ces triangles ont leurs aires en progression géométrique dont la raison x est $1+3n+3n^2$; 2° on peut calculer les valeurs *entières* de x qui rendent *entier* le nombre n; 3° tous les triangles sont à la fois équilatéraux et concentriques; 4° on peut calculer le périmètre, l'aire et les rayons des cinq cercles, dans chaque triangle équilatéral, le côté a du premier étant seul donné avec n; 5° enfin, pour le troisième triangle équilatéral, par exemple, la *méthode infinitésimale* conduit aux expressions des surfaces et des volumes engendrés respectivement autour du côté c de ce triangle, par la circonférence et l'aire, soit du cercle inscrit, soit de l'un des cercles exinscrits, et par le contour et l'aire de la *lunulle*

que l'axe de rotation détermine, soit dans le cercle circonscrit, soit dans le cercle dont la circonférence passe par les centres des trois cercles exinscrits. — Observez d'ailleurs que si la circonférence, passant par le centre du cercle inscrit et deux des trois précédents, était située d'un côté de l'axe de rotation, on aurait la surface et le volume de l'*anneau rond* engendré; etc. — Les quadrilatères jouissent de propriétés analogues, et notamment les carrés: il en est de même des hexagones réguliers et en général des polygones réguliers semblables. — On pourrait ne considérer qu'un seul triangle, dont on prolongerait, dans les deux sens, chacun des côtés, d'une longueur égale à n fois ce côté; etc.

XIII. Des courbes polaires. Les *courbes polaires*, comme on sait, sont représentées par des équations entre *coordonnées polaires*: ce genre de coordonnées est souvent utile (quand il n'est pas nécessaire) pour simplifier l'équation et faciliter l'étude des propriétés de la courbe.

Par exemple, un carré de côté a étant donné, quel est le lieu géométrique de tous les points tels, que la demi-diagonale d soit moyenne proportionnelle entre les distances de chaque point cherché à deux sommets opposés du carré proposé ?

Les axes des coordonnées étant sur les diagonales, soit (x,y) l'un des points cherchés: si les deux sommets opposés appartiennent à l'axe des x, on aura

$$x^4+y^4+2x^2y^2=2d^2(x^2-y^2).$$

On trouve bien que le *maximum* de y, savoir $\pm\frac{1}{2}d$, répond à $x=\pm\frac{1}{2}d\sqrt{3}$; mais pour avoir une équation plus facile à *discuter*, soit r le *rayon vecteur* du point (x,y), le centre du carré ou l'origine étant le *pôle*; soit ω l'arc circulaire, de rayon 1, qui mesure l'angle de r avec l'*axe polaire*, ici l'axe des x: suivant que les deux sommets opposés du carré se trouvent sur l'axe des x ou sur l'axe des y, on a, à cause de $a^2=2d^2$,

$$r^2=a^2\cos 2\omega \text{ ou } r^2=-a^2\cos 2\omega.$$

Si donc on supprime toujours le signe — de certaines valeurs de $\cos 2\omega$, vu qu'il ne s'agit ici que de ses valeurs absolues pour calculer r, positif ou négatif; on voit que le lieu géométrique cherché est représenté par l'*équation polaire*:

$$r^2=a^2\cos 2\omega.$$

C'est donc la *double lemniscate*, ayant quatre *axes* de *symétrie*, perpendiculaires deux à deux au *centre*, où elle a quatre *inflexions*. Cette courbe remarquable a deux *axes* égaux chacun à $2a$, sur les axes de symétrie des x et des y; elle est donc *inscrite* dans le carré dont les côtés $2a$ sont parallèles aux axes des x et des y, et touche ces côtés en leurs points milieux.

Soit A l'aire d'une demi-feuille de la courbe : l'aire limitée par cette courbe est donc 8A. Or, les rayons vecteurs, depuis $r=a$ jusqu'à $r=0$, divisent l'arc $\omega=45°$, de rayon 1, en un nombre infini n de parties égales à u, d'où $\omega=nu=45°$; ils divisent donc l'aire A en n secteurs *élémentaires* ou infiniment petits, ayant tous le même angle au centre, mesuré par l'arc infiniment petit a ; d'où $\sin u=u$ et $\cos u=1$. Soit t le v ième de ces secteurs, répondant à l'angle décrit vu : donc t n'est au fond qu'un triangle rectiligne isocèle et par conséquent on a

$$t=\tfrac{1}{2}r^2u=\tfrac{1}{2}a^2u\cos 2vu\ ;\ \text{d'où}\ A=\tfrac{1}{2}a^2uS\cos 2nu.$$

Or, on sait que $uS\cos 2nu=\frac{1}{2}\sin 2nu=\frac{1}{2}\sin 90°=\frac{1}{4}$; donc

$$A=\tfrac{1}{4}a^2\ \text{et}\ 8A=2a^2.$$

La double lemniscate proposée est donc une courbe *carrable*, dont l'aire est moitié de l'aire du carré circonscrit : elle engendre, autour du côté $2a$ de ce carré, un volume de révolution équivalent au tiers de la sphère dont a est le rayon donné.

Comment discuter la *courbe polaire* $r=\pm 2a\cos\omega$? Et qu'elle est l'expression de l'aire limitée par cette courbe ?

XIV. Axes principaux. L'angle θ des coordonnées étant quelconque, toutes les courbes du second ordre, douées de centres, savoir l'*ellipse* et l'*hyperbole*, sont représentées par l'équation ramenée à la forme :

$$Cy^2+2Dxy+Ex^2=G\ ;$$

et l'on sait que cette équation représente une ellipse ou une hyperbole, suivant que D^2-CE est *négatif* ou *positif* : cela résulte d'ailleurs du calcul des *axes principaux* 2A et 2B, tous les deux *réels* pour l'ellipse et 2B *imaginaire* pour l'hyperbole.

L'origine est au centre : soit donc d un demi-diamètre quelconque, n sa direction et posons $p=\sin\theta, q=\cos\theta$: le rayon trigonométrique étant l'unité, nous aurons

$$y=nx\ \text{et}\ x^2+y^2+2qxy=d^2.$$

Comme l'extrémité (x,y) de d appartient à la courbe, les x et les y ont mêmes valeurs respectives dans les trois équations précédentes. Si donc on en élimine x et y, en posant $d^2=Gv$, l'équation finale prend la forme

$$(1-Cv)n^2-2(Dv-q)n=Ev-1.$$

Les seules variables de cette équation sont n et v ; si donc on la résout par rapport à n, il est clair que le *maximum* et le *minimum* de v doivent annuler la quantité sous le radical de n et donner, par conséquent,

$$(1-Cv)n=Dv-q \text{ et}$$
$$(CE-D^2)v^2-(C+E-2Dq)v+p^2=0.$$

La seconde de ces équations faisant connaître la plus grande et la plus petite valeur de v, la relation $d^2=Gv$ donne le *maximum* et le *minimum* de $2d$, c'est-à-dire les deux *axes principaux* 2A et 2B de l'ellipse ou de l'hyperbole; vu que l'un est le plus grand et l'autre le plus petit de tous les diamètres de la courbe. On a donc les deux relations :

$$A^2+B^2=\frac{(C+E-2Dq)G}{CE-D^2} \text{ et } A^2B^2=\frac{Gp^2}{CE-D^2}.$$

Si $CE-D^2$ est *négatif* et par conséquent D^2-CE *positif*, B^2 sera *négatif* et 2B la seconde axe de l'hyperbole, 2A étant le premier.

Quant aux directions n et n' des deux axes 2A et 2B, elles sont données par $(1-Cv)n=Dv-q$ où l'on substitue successivement le maximum et le minimum de v : il en résulte, comme cela doit être,

$$1+nn'+(n+n')q=0.$$

Cette condition de *perpendicularité* des axes 2A et 2B est satisfaite dans le problème : *Quel est le lieu géométrique de tous les points obtenus en portant, du côté des* y *rectangulaires positifs et à partir de l'extrémité de chaque ordonnée, dans la circonférence* $x^2+y^2=r^2$, *la longueur de l'abscisse correspondante?* Ici $q=0$ et $p=1$; on trouve donc

$$n=2-\sqrt{5}, n'=2+\sqrt{5} \text{ et } 1+nn'=0;$$
$$2A=r(\sqrt{5}+1), 2B=r(\sqrt{5}-1) \text{ et } \pi AB=\pi r^2.$$

Le lieu géométrique cherché est donc l'*ellipse* d'aire équivalente au cercle proposé. Et si, dans l'équation aux axes principaux de cette ellipse, on porte, du côté des y positifs et à partir de l'extrémité de chaque ordonnée, la longueur de l'abscisse correspondante; tous les points, ainsi obtenus, appartiennent à l'ellipse, *semblable* à la proposée et d'aire quadruple. — Comment calculer et construire les diamètres conjugués égaux de cette seconde ellipse? — Voici encore plusieurs applications des formules précédentes.

1. Si $p=0$, les coordonnées sont rectangulaires, et l'on peut aisément construire les axes principaux des deux hyperboles

$$3y^2-4xy=k^2 \text{ et } 2y^2-4xy+x^2=k^2.$$

Mais il faut d'abord placer l'origine au centre, pour calculer ensuite l'aire de l'ellipse :

$$4y^2-6xy+4x^2-4y-4x-25=0.$$

2. L'angle des coordonnées étant de 60°, d'où $q=\frac{1}{2}$, si une droite, de longeur a donnée, est assujettie à glisser, par ses extrémités,

l'une sur l'axe des x et l'autre sur l'axe des y : 1° les parallèles à ces axes, menées des extrémités de a, dans chacune de ses positions, se coupent sur une ellipse; 2° les axes principaux de cette ellipse sont bissecteurs des angles des deux axes des coordonnées ; 3° enfin, l'aire de l'ellipse proposée équivaut à celle du cercle dont a est le rayon. — Construire les axes principaux et décrire l'ellipse.

3. Les coordonnées étant rectangulaires, supposons que le côté donné c d'un carré soit assujéti à glisser, de telle sorte que ses extrémités soient constamment, l'une sur l'axe des y et l'autre sur l'axe des x : comment calculer les aires des trois ellipses décrites par le milieu et les extrémités du côté opposé ? Ces ellipses sont-elles *semblables* ? — Si par les deux points, divisant le côté c en trois parties égales, on élève, sur ce côté, deux perpendiculaires égales à c chacune ; quelles sont les expressions des aires de deux ellipses que décrivent les extrémités de ces perpendiculaires?

4. Par l'origine des coordonnées rectangulaires, menant à volonté une droite de longueur a donnée, puis menant par l'extrémité de celle-ci et du côté des x positifs, une parallèle à l'axe des x, dont la longueur soit la somme de l'x et de l'y de cette extrémité ; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une ellipse d'aire quadruple de l'aire du cercle de rayon a. — Pour une autre droite b donnée, on a une seconde ellipse *semblable*, de forme et de position.

5. Une droite donnée AB mobile doit avoir constamment ses extrémités A et B sur les axes respectifs des y et des x rectangulaires ; par un point P de cette droite ou de son prolongement, mais fixe et donnant $AP=a$, $BP=b$, on mène, du côté des x positifs, une parallèle à l'axe des x et de longueur égale à l'y de P : le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une ellipse d'aire équivalente à celle de l'ellipse ayant a et b pour demi-axes principaux. — Une autre droite A'B' et son point fixe P', donnant $A'P'=a'$ et $B'P'=b'$, fournissent une seconde ellipse, semblable de forme et de position, si $a : a' = b : b'$.

6. Lorsque les extrémités de la droite donnée a glissent, l'une sur l'axe des x et l'autre sur l'axe des y rectangulaires, l'extrémité de la perpendiculaire b donnée, élevée au milieu de a, décrit l'ellipse d'aire E mesurée par $\frac{1}{4}\pi(a^2-4b^2)$ ou par $\frac{1}{4}\pi(4b^2-a^2)$, suivant que $a >$ ou $< 2b$. Mais si $a=2b$, l'extrémité de b décrit deux droites perpendiculaires entre elles, à l'origine. — Si le pied de b apparte-

nait à l'axe des y et qu'on eût $b=a$; πa^2 serait l'aire de l'ellipse décrite par l'extrémité de b. — Remarquez d'ailleurs que si a et a' sont les hypoténuses, appuyées sur les axes des x et des y rectangulaires ; b et b' les hauteurs menées des angles droits ; les sommets de ces angles décrivent des ellipses semblables, de forme et de position, si les deux triangles rectangles mobiles sont semblablement disposés et semblables.

7. Soit P l'aire variable d'un parallélogramme dont deux côtés contigus sont constamment placés sur les axes des coordonnées, comprenant l'angle de 45° ; soient c et d les deux diagonales variables, la première c aboutissant à l'origine, et soit a^2 un carré numérique donné : 1° si $c^2-2P=a^2$, l'extrémité de c décrit l'ellipse d'aire équivalente à $\frac{1}{2}\pi a^2$; tandis que l'aire de l'ellipse serait équivalente au cercle de rayon a, si l'on avait $c^2-4P=a^2$; 2° l'extrémité de c décrit une hyperbole équilatère, si $c^2+2P=a^2$; 3° enfin, si dans le premier cas, les coordonnées sont rectangulaires, l'extrémité de c décrit deux droites parallèles, coupant les axes aux sommets d'un carré double de a^2.

8. Si a est la valeur numérique de chacun des côtés égaux AB, AC de l'angle droit A, et situés respectivement sur les axes des y et des x ; et si ces deux côtés étant divisés chacun en n parties égales à u, on prend $AP=vu$ sur AB et $CQ=vu$ sur CA ; les deux droites CP et BQ se coupent au point M de l'ellipse :

$$y^2+xy+x^2-2ay-2ax+a^2=0.$$

Les coordonnées du centre sont : $x=y=\frac{2}{3}a$; d'où

$$y^2+xy+x^2=\tfrac{1}{3}a^2.$$

Quelle est l'aire de cette ellipse, *inscrite* dans le carré fait sur $\frac{1}{3}a$? L'aire cherchée est-elle plus grande que celle de cercle inscrit dans le même carré, celui-ci touchant d'ailleurs l'ellipse aux extrémités de deux diamètres conjugués? — Démontrer que ces deux diamètres sont égaux et calculer le cosinus de l'angle compris. — Enfin, quel serait le lieu géométrique des intersections M, si le v ièmes points de division P et Q de AB et AC étaient comptés à partir de l'origine A, ou à partir des points B et C ? (L'ellipse serait un cercle si l'angle A valait 60°).

9. Deux côtés contigus du parallélogramme variable P sont sur les axes des coordonnées, dont l'angle est de 60°. Soient c et d les deux diagonales variables, la première partant de l'origine : suivant que $c^2+d^2=a^2$ ou $c^2-d^2=a^2$, a étant une longueur donnée, l'extrémité de c décrit une ellipse ou une hyperbole. Quels sont les axes

principaux de ces deux courbes? — Si la diagonale d est constante, l'extrémité de c décrit une ellipse dont l'aire équivaut à celle du cercle de rayon d.

10. Connaissant numériquement les diagonales $2a$ et $2b$ d'un losange tracé, construire les axes principaux, les foyers et les asymptotes de l'*hyperbole équilatère*, lieu géométrique de tous les points tels qu'en multipliant entre elles les distances numériques de chacun à deux sommets opposés du losange, les deux produits soient égaux. (Discuter). — Comment calculer le volume de révolution, autour de l'un des axes principaux, décrit par le demi-segment hyperbolique, dont la hauteur h est sur le prolongement du premier axe?

11. Les coordonnées étant rectangulaires, soit la courbe

$$25y^2=32x-16x^2.$$

1° Calculer les deux points (x',y') tels, que la distance d de chacun à un point quelconque (x,y) de la courbe soit *fonction rationelle* de l'abscisse x de ce dernier point. 2° Démontrer que la somme des distances de chaque point de la courbe proposée aux deux points trouvés est constamment 10; et qu'ainsi cette courbe est une *ellipse* dont 10 et 8 sont les *axes principaux* $2a$ et $2b$. 3° Quel est le lieu géométrique, soit des sommets de tous les angles droits, dont les deux côtés de chacun sont tangents à l'ellipse proposée, soit des intersections de deux *cordes de contacts* pour deux positions immédiatement consécutives du sommet de l'angle droit mobile? 4° Enfin, l'*équation polaire* du lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires, abaissées du centre de l'ellipse proposée sur les tangentes à cette courbe, sert à démontrer que l'aire limitée par ce lieu surpasse l'aire elliptique du demi-cercle $\frac{1}{4}\pi(a-b)^2$ ou $\frac{1}{4}\pi$, à cause de $a=5$ et de $b=4$.

Il existe des propriétés analogues aux précédentes pour chacun des deux courbes du second ordre:

$$y^2=16x \text{ et } 16y^2=18x+9x^2.$$

XV. Description de la parabole. 1° Voici un procédé très-simple pour tracer *par points*, sur le terrain, la *parabole* dont on connaît le paramètre *principal* $2p$.

Sur l'axe des y rectangulaires, de part et d'autre de l'origine O, on porte les longueurs OA et OB, égales chacune à $2p$; puis on mène, par les points A et B, deux parallèles indéfinies AZ et BT à l'axe des x. Prenant ensuite, sur OA et OB, les longueurs arbitraires OP et OP', mais égales à y; puis sur les parallèles AZ et BT, mesu-

rant les longueurs $AC=BC'=y$: les parallèles à l'axe des x, menées par les points P et P', rencontrent les droites OC et OC' en deux points M et M', appartenant à la parabole cherchée $y^2=2px$. — La même construction aurait lieu évidemment, pour le paramètre *diamétral* $2p$, si l'angle des axes était connu, c'est-à-dire si les deux axes des coordonnées étaient tracés sur le terrain.

2° Dans la parabole $y^2=2px$, si un système de cordes parallèles est tel que chacune fasse, avec l'axe principal de la courbe (axe des x rectangulaires), l'angle aigu donné θ, de telle sorte que chaque corde ait la direction constante $n=\text{tang}\,\theta$; les milieux de toutes ces cordes appartiennent à la droite $ny=p$: c'est un *diamètre* D, parallèle à l'axe des x. *Tous les diamètres de la parabole sont donc parallèles à son axe principal.*

De plus, soit O' le point où le diamètre D coupe la parabole; soit h l'ordonnée et k l'abscisse de ce point O' : on a donc $h^2=2pk$ et $nh=p$. Ainsi *la tangente T à l'origine O' d'un diamètre D est parallèle à toutes les cordes dont ce diamètre est bissecteur.*

3° Prenons D et T pour axe des x' et des y' obliques, comprenant l'angle θ. Soit M un point quelconque de la parabole : menant MP' parallèle à T, les coordonnées obliques du point M sont $O'P'=x'$ et $MP'=y'$. Menant l'ordonnée rectangulaire du point M, savoir MP ou y, coupant D au point Q; on aura $y=PQ+QM=h+y'\sin\theta$ et $x=k+x'+y'\cos\theta$. Donc

$$(h+y'\sin\theta)^2=2p(k+x'+y'\cos\theta).$$

Substituant les valeurs de h et k, tirées de $h\sin\theta=p\cos\theta$ et $h^2=2pk$; développant et réduisant, on trouve

$$2p=2p'\sin^2\theta \text{ et } y'^2=2p'x'.$$

La seconde de ces équations représente toujours la même courbe : c'est la parabole rapportée à ses *axes conjugués*; et $2p'$ est le *paramètre diamétral* de cette courbe; lequel varie avec l'angle θ, comme cela doit être.

Si donc l'abscisse x est la même dans les deux systèmes, c'est-à-dire, si deux points M et M' de la parabole proposée sont représentés par $y'^2=2p'x$ et $y^2=2px$, on en déduit $xy'\sin\theta=xy$; propriété analogue à celle des *parallélogrammes conjugués* de l'ellipse.

4° Enfin, soit F le foyer; on a donc FO' ou $r=k+\frac{1}{2}p$; d'où $4r=2p'$. Comme r fait, avec la tangente T au point O', un angle égal à l'angle θ, compris par T et D; on voit qu'étant donnée l'équation $y'^2=2p'x$ de la parabole, aussi bien que l'angle θ, on en déduit le foyer F, la directrice, et par suite le tracé de la courbe. —

On voit aussi, réciproquement, comment on passe de l'équation $y'^2=2p'x'$ à l'équation $y^2=2px$.

XVI. Transversales. Les exercices de *géométrie analytique plane* sont très-variés ; et, dans les équations à résoudre ou à discuter, toutes les lettres représentent des droites *numériques*, c'est-à-dire des droites *limitées*, *rapportées* à la même unité linéaire, sous-entendue. Si toutes les données sont exprimées en chiffres, les exercices sont généralement plus profitables aux élèves : c'est du moins ce que nous avons remarqué dans nos cours, où les *compositions* portent, le plus souvent, sur des applications *numériques*.

Dans la théorie des *transversales*, toutes les droites sont d'abord censées évaluées en nombres, d'après la même unité linéaire ; et l'on sait que les équations du point et de la ligne droite facilitent singulièrement cette théorie ; ainsi que l'on peut s'en convaincre encore, dans l'exemple remarquable, que voici :

Soit O un point de l'intérieur du parallélogramme tracé MNPQ : si par ce point O, on mène deux parallèles, l'une CA au côté MN, rencontrant NP en A et MQ en C, et l'autre DB au côté NP, rencontrant PQ en B et MN en D ; non-seulement ces deux parallèles CA et DB déterminent huit nouveaux parallélogrammes ; mais *les diagonales des neuf parallélogrammes résultants vont se couper, trois à trois, en un même point.* De sorte qu'il y a six points : P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6, intersections respectives des trois diagonales, prolongées ou non, savoir : QA, BN et MO ; MB, CP et NO ; MA, DP et QO ; QD, CN et PO ; CB, DA et PM ; enfin, CD, BA et QN.

C'est ce qu'on reconnaît d'abord par le tracé exact de la figure proposée ; mais, pour que ce fait devienne une vérité certaine, il faut une démonstration complète ; laquelle devient très-simple, par le calcul, d'après les équations des différentes diagonales.

Or, plaçant l'origine au point donné O, et les axes des x et des y suivant les parallèles CA et DB, il est clair que les données sont : $OA=4=a$, $OC=2=b$, $OB=3=c$ et $OD=1=d$. Pour mieux fixer les idées, nous ferons usage seulement des valeurs particulières 4, 2, 3 et 1 ; mais la démonstration n'en est pas moins générale. Nous trouvons, pour l'abscisse et l'ordonnée de chaque intersection, le système :

$$P_1=(2,1),\ P_2=(-\tfrac{4}{3},\tfrac{1}{3}),\ P_3=(\tfrac{2}{6},-\tfrac{3}{6}),$$
$$P_4=(-\tfrac{20}{11},-\tfrac{16}{11}),\ P_5=(-\tfrac{46}{5},-\tfrac{9}{5})\text{ et }P_6=(16,-9).$$

Il suit de ces formules, que les trois points P_2, P_3 et P_6 sont en ligne droite, tandis que P_1, P_4 et P_5 sont les sommets d'un triangle T.

Vérifier ces différentes propriétés en se servant des valeurs générales a, b, c, d; et si le parallélogramme proposé est un rectangle, calculer l'expression de l'aire T, le rayon du cercle circonscrit, ainsi que le centre de ce cercle; etc. — On pourrait considérer le cas où le point O est le centre du parallélogramme, et le cas où ce parallélogramme est un carré; etc. — Enfin, un carré de côté donné $2a$ étant tracé, construire le lieu géométrique de tous les points tels, que les deux produits des distances numériques de chacun aux deux couples de sommets opposés du carré soient égaux entre eux.

Remarque. La *géométrie analytique* ne peut s'acquérir complètement qu'en effectuant soi-même beaucoup d'applications de ses principes et de ses méthodes; et c'est pourquoi nous allons indiquer un grand nombre d'*exercices* de géométrie analytique *des trois dimensions*, dont plusieurs sont peu connus: tous sont utiles à l'étude approfondie de la science et peuvent servir de sujets de composition, dans les cours d'*introduction aux mathématiques supérieures*, où l'on doit insister sur le passage des méthodes élémentaires aux méthodes du calcul différentiel et du calcul intégral: aussi indiquons-nous, à l'aide de la simple géométrie analytique, les solutions de plusieurs questions, ordinairement réservées aux calculs transcendants.

Points, lignes et plans dans l'espace.

1. *Déterminer numériquement la distance de deux points de l'espace.* Soit d la longueur de la droite qui joint les deux points donnés (x,y,z) et (x',y',z'). Le procédé le plus simple pour calculer d est celui-ci : menant par les deux points donnés, des plans respectivement parallèles aux trois plans coordonnés, il est clair que d est la diagonale du parallélipipède résultant, dont les trois arêtes contiguës, respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z, ont pour longueurs $x-x'=X$, $y-y'=Y$ et $z-z'=Z$. Si donc on pose $\cos(xy)=p$, $\cos(zx)=q$ et $\cos(yz)=r$, on trouve aisément

$$d^2=X^2+Y^2+Z^2+2pXY+2qXZ+2rYZ.$$

Telle est aussi l'équation de la *surface sphérique* dont (x,y,z) est un point quelconque, (x',y',z') le centre fixe et d le rayon constant. Si les coordonnées sont rectangulaires, il vient

$$d^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

2. *Par un point donné* (x,y,z), *si l'on mène une droite quelconque; quelles sont les conditions*; 1° *pour que cette droite rencontre un plan donné*; 2° *pour qu'elle lui soit parallèle*; 3° *enfin, pour qu'elle*

lui soit perpendiculaire? Comment calculer les longueurs de l'oblique et de la perpendiculaire, depuis le point jusqu'au plan, et quelles sont les expressions, lorsque les coordonnées sont rectangulaires?

1° Les équations de la droite et du plan sont :

$$x-x'=m(z-z'),y-y'=n(z-z'),$$
$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Posant $D'=Ax'+By'+Cz'+D$, l'équation du plan devient

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D'=0.$$

Cela posé, pour le point où la droite rencontre le plan, les x, y et z ont mêmes valeurs respectives dans les 3 équations; éliminant donc et posant, pour abréger, $t=Am+Bn+C$, on trouve

$$t(z-z')=-D', t(y-y')=-nD' \text{ et } t(x-x')=-mD'.$$

La droite rencontre donc toujours le plan, si t ou $Am+Bn+C$ n'est pas nul.

2° Si les valeurs ci-dessus sont absolument impossibles, la droite ne rencontre pas le plan et lui est parallèle. Réciproquement, si la droite est parallèle au plan, le point de rencontre (x,y,z) n'existe pas; ce qui exige que les valeurs de x,y,z soient absolument impossibles et que par conséquent on ait simultanément $t=0$ et $D'>$ ou <0.

Mais $x=mz+h$ et $y=nz+k$ sont aussi les équations de la droite; lesquelles donnent $D'=tz'+Ah+Bk+D$. Donc pour que la droite soit parallèle au plan, il faut qu'on ait simultanément

$$Am+Bn+C=0 \text{ et } Ah+Bk+D> \text{ ou } <0.$$

Telles sont les deux conditions, nécessaires et suffisantes, pour qu'une droite soit parallèle à un plan.

Si cependant on avait $D'=0$, auquel cas le point (x',y',z') est situé dans le plan; la droite parallèle aurait tous ses points dans le plan et y serait tout entière.

On aurait alors simultanément

$$Am+Bn+C=0 \text{ et } Ah+Bk+D=0.$$

Ce sont les deux conditions, nécessaires et suffisantes, pour que la droite $x=mz+h, y=nz+k$, coïncide avec le plan $Ax+By+Cz+D=0$.

Observons d'ailleurs que si la droite, dont m' et n' sont les directions, est située dans le plan proposé, d'où $Am'+Bn'+C=0$; et si de plus, on veut que cette droite soit parallèle à la première, dont le parallélisme au plan donne $Am+Bn+C=0$, il faudra qu'on ait $m'=m$ et $n'=n$. De sorte que *si une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle à une infinité de parallèles, situées dans ce*

plan; car ici les directions m' et n' sont les mêmes pour toutes les parallèles situées dans le plan proposé.

3° Pour exprimer, le plus simplement possible, les conditions de *perpendicularité* de la droite et du plan proposés, il faut supposer les coordonnées rectangulaires. Or, pour que la droite $x=mz+h, y=nz+k$, soit perpendiculaire à une autre $x=m'z+h', y=n'z+k'$, qu'elle rencontre ou ne rencontre pas, il faut d'abord qu'on ait

$$mm'+nn'+1=0.$$

De plus, on a

$$Am'+Bn'+C=0,$$

si la seconde droite est située, comme on voudra, dans le plan proposé. Éliminant m' entre ces deux conditions simultanées, il vient

$$(An-Bm)n'+Cm-A=0.$$

Et puisque n' est complètement arbitraire, il faut qu'on ait à la fois $Cm-A=0$ et $An-Bm=0$; d'où il vient

$$A=Cm \text{ et } B=Cn.$$

Ce sont les deux conditions, nécessaires et suffisantes, pour que la droite soit perpendiculaire au plan, c'est-à-dire perpendiculaire à toute droite, située dans ce plan. Les équations de cette perpendiculaire sont donc

$$Cx=Az+Ch, Cy=Bz+Ck.$$

Il y a donc une infinité de perpendiculaires à un même plan; *et toutes sont parallèles entre elles.*

Mais la perpendiculaire est menée du point donné (x',y',z'); ses équations sont donc

$$C(x-x')=A(z-z'), C(y-y')=B(z-z').$$

De sorte que, *par un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à un plan donné.*

4° Maintenant, les coordonnées étant toujours rectangulaires, soit d la longueur de l'oblique, depuis le point jusqu'au plan: on aura d'abord

$$d^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2;$$

et ensuite, en substituant les valeurs, trouvées plus haut,

$$td=D'\sqrt{(m^2+n^2+1)}.$$

De là, en substituant les valeurs de D', de m et de n, qui conviennent à la perpendiculaire, il vient, pour en calculer la longueur d, l'équation

$$d\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}=Ax'+By'+Cz'+D.$$

5° Enfin, observons que le *calcul des dérivées*, conduit facilement à cette équation et aux deux conditions de perpendicularité, au moyen de l'expression de la longueur d de l'oblique. Mais il faut, pour simplifier, poser $d=u^{\frac{1}{2}}$; ce qui donne

$$u=(Am+Bn+C)^{-1}\times\sqrt{(1+m^2+n^2)}.$$

Cela posé, la longueur d de l'oblique n'a d'autre *maximum* que l'infini ; et quant à son *minimum*, il a lieu dès que cette oblique est perpendiculaire au plan.

Ainsi, chercher les conditions du minimum de d ou de u, c'est chercher en même temps les conditions pour que la droite d, dont m et n sont les directions, soit perpendiculaire au plan proposé.

Or, u est ici fonction des deux variables m et n; de plus, la première dérivée de u est nulle, soit qu'on dérive par rapport à la variable m seule ou par rapport à la variable n seule, l'autre variable étant chaque fois supposée avoir la valeur constante qui convient au minimum de u. Egalant donc ces deux dérivées à zéro, on trouvera

$$m(Am+Bn+C)=A(1+m^2+n^2),$$
$$n(Am+Bn+C)=B(1+m^2+n^2).$$

Ces deux relations donnent aisément $A=Cm$ et $B=Cn$: ce sont à la fois les deux conditions pour que u ou d soit un minimum et pour que la longueur d soit perpendiculaire au plan; d'où résulte l'expression de cette longueur perpendiculaire, trouvée plus haut.

3. Calculer et construire les huit points représentés par le système d'équations :

$$x^2+y^2=13,\ xy=6 \text{ et } x^2+z^2=20.$$

Calculer tous les plans représentés par l'équation

$$(x^4-12x^2+11)(y^4-6y^3+3y^2+18y+8)(z^2-9)=0.$$

Et si les coordonnées sont rectangulaires, calculer les volumes des deux parallélipipèdes rectangles déterminés, l'un par les valeurs rationnelles de x, y, z, et l'autre par les valeurs irrationnelles.

4. Calculer les arêtes, les diagonales, la surface et le volume du parallélipipède rectangle, limité par les six plans

$$x^2+2x=3, y^2-4y=5 \text{ et } z^2-8z=-7,$$

les coordonnées étant rectangulaires ; et quel est celui de tous les parallélipidèdes, équivalents au proposé, qui soit de surface minimum?

5. Connaissant les extrémités (x',y',z') et (x'',y'',z'') d'une droite donnée d, calculer le point (x,y,z) qui divise cette droite en deux segments P et Q, donnant $P=aQ$, a étant un rapport donné et le trièdre des coordonnées étant quelconque.

On trouve généralement deux points; mais pour $a=1$, ces deux points se réduisent au seul : $2x=x'+x''$, $2y=y'+y''$, $2z=z'+z''$.

6. Calculer les parallèles à l'axe des z, représentées par le système d'équations :

$$ax-ay=a^2+y^2,$$

$$12a^6-8a^3xy^2+x^2y^4-8a^4xy+2ax^2y^3+a^2x^2y^2=0.$$

Pour n'avoir que des équations du second degré à résoudre, il suffit d'observer que la seconde de ces équations est du second degré par rapport à l'inconnue $xy(y+a)$. On trouvera quatre points réels, sommets d'un trapèze T, et quatre points imaginaires. Construire le trapèze T, dont les sommets appartiennent aux quatre parallèles cherchées. — Si les coordonnées sont rectangulaires, le trapèze T équivaut au carré fait sur le plus grand segment *négatif* de la droite a, divisée en *moyenne* et *extrême* (à démontrer).

7. Les coordonnées étant rectangulaires, construire les parallélipipèdes rectangles, limités par le plan des xy, le plan $z=8$ et ceux représentés par les équations simultanées :

$$x^2+y^2+xy=19,$$
$$x^3y+xy^3-x^2-y^2-xy=59.$$

8. Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, si 288 est la somme des douze arêtes du parallélipipède rectangle, limité par les six plans :

$$x^2-4x=a^2+4a,$$
$$y^2+6y=b^2+6b,$$
$$z^2-10z=c^2+10c;$$

quelles sont les valeurs de a,b,c pour lesquelles le volume du parallélipipède est un maximum, aussi bien que sa surface totale?

9. Calculer les arêtes, la surface et le volume de chacun des parallélipipèdes rectangles, limités respectivement par les deux systèmes de six plans chacun :

$$x^3-y^3=26,\ x^2y-xy^2=6 \text{ et } z^2-10z=11;$$
$$x^2+y^2=13,\ x^3y-x^2y^2+xy^3=42 \text{ et } z^4-8z^2=9.$$

10. Les coordonnées étant rectangulaires, calculer la surface et le volume de la portion de cylindre circulaire droit, déterminée par le système d'équations :

$$y=3\sqrt{2},x^2+y^2=36 \text{ et } 4z^4-8z^3+3z^2-8z+4=0.$$

11. Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, on peut calculer : 1° l'équation du plan passant par les projections orthogonales du point (8, 12, 4) sur les plans coordonnés; 2° les cosinus des angles que ce plan fait avec ceux des xy, des xz et des yz; 3° vérifier que la somme des carrés de ces cosinus se réduit à l'unité; 4° enfin, on peut calculer, de trois manières, l'aire du triangle joignant les trois projections proposées, puis la distance de son plan au point (8, 12, 4), et vérifier que l'aire du triangle, élevée au carré,

vaut la somme des carrés des aires de ses projections sur les trois plans coordonnés : effectuer tous ces calculs.

12. Calculer les équations des deux plans, passant respectivement par les projections orthogonales des deux points (8, 12, 4) et (16, 24, 8) sur les plans rectangulaires des coordonnées. Peut-on calculer la plus courte distance de ces deux plans et quelle est-elle?

13. Quelle est la distance de l'origine des coordonnées rectangulaires à chacun des deux plans passant par les projections orthogonales des deux points (1, 2, 3) et (3, 2, 1), sur les plans coordonnés, et quelle est l'aire du triangle ayant ces deux distances pour côtés latéraux?—Soient A, B, C trois points respectifs des axes des x, des y et des z, à la même distance connue $2a$ de l'origine O des coordonnées rectangulaires : quel est le lieu géométrique de tous les points M tels, qu'on ait : 1° $MO^2+MA^2=MB^2+MC^2$? 2° la somme de ces quatre carrés numériques égale à $16a^2$?

14. Les coordonnées étant rectangulaires, calculer l'équation du plan passant par les trois points (0, 1, 2), (1,—1, 4) et (4, 2, 6). Calculer aussi la surface et le volume du tronc de prisme droit, dont la *section* est le triangle qui joint ces trois points, et la *base*, le triangle joignant les pieds des trois z.

15. Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, calculer l'équation du plan passant par le point (8, 6, 12) et la droite $z=0, y=2x+4$. Si d'ailleurs l'ellipse tracée sur le plan cherché, a pour projection orthogonale, sur le plan des xy, la circonférence $x^2+y^2-4x-32=0$; quels sont les axes et l'aire de cette ellipse ?

16. Calculer la distance du point (10, 12, 20) au plan qui passe par le point (2, 5, 10) et par la droite $z=0, y=2x+1$. Démontrer que l'angle, entre cette distance et le $z=10$ du dernier point, est la mesure de l'angle dièdre compris par le plan cherché et celui des xy rectangulaires.

17. Les coordonnées étant rectangulaires, quelle est l'équation de la parabole, située dans le plan $x-2y+2z-8=0$, laquelle a pour projection, sur le plan des xy, la parabole $y^2=12x$? Quelles sont les aires des *segments* de ces paraboles, répondant à $x=12$?

18. Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, les deux droites $x=3z-50, y=2z-24$ et $x=z-10, y=4z-64$, sont coupées en parties proportionnelles, à partir de leur intersection, par les deux plans parallèles $2x-3y+4z-6=0$ et $2x-3y+4z+8=0$. Démontrer ce théorème, par le calcul, et faire voir que les intersections du plan des deux droites avec les proposés sont parallèles entre elles.

19. Par la droite $x=2z-1, y=z+1$, mener un plan parallèle à la droite $x=z+8, y=2z-5$; et réciproquement, mener par celle-ci un plan parallèle à la première.—Ces deux plans sont-ils parallèles? s'ils se coupent, leur intersection est-elle parallèle aux deux droites proposées? s'ils sont parallèles, sont-ils déterminés? Enfin, calculer alors la plus courte distance des deux droites proposées ; les coordonnées étant rectangulaires.

20. On démontre aisément par le calcul, que si, par les deux droites parallèles $x=4z-1, y=2z+2$ et $x=4z+3, y=2z+10$, on fait passer deux plans qui se coupent, leur intersection est parallèle aux deux droites proposées. Mais si les deux plans devaient être parallèles, seraient-ils déterminés?

21. Par les trois droites, situées sur le plan des xy rectangulaires, savoir : $y=2x-5$, $y=3x-4$ et $y=x+1$, mener trois plans chacun parallèle à la droite $x=\frac{1}{4}z+10, y=z+4$, et calculer : 1° l'aire du triangle formé par les trois premières droites; 2° la surface et le volume du prisme triangulaire droit, dont $x=40$ et $y=64$ est le pied de la hauteur menée d'un point de la quatrième droite proposée.—Quelle est l'équation du plan, mené par l'axe des y, faisant un angle de 60° avec le plan des xy? Et quelle est aussi l'aire de la section qui en résulte dans le prisme?

22. Si par le point (3,2,5), on mène une droite parallèle à l'intersection des deux plans $x-2y+z-8=0$ et $2x-y+2z-12=0$; cette droite est aussi parallèle aux deux plans; et la réciproque est vraie. De plus, les coordonnées étant rectangulaires, le plan mené par le point proposé, perpendiculairement à l'intersection ci-dessus, est aussi perpendiculaire aux deux plans (à démontrer chaque fois, par le calcul).

23. Quelle est la plus courte distance des deux parallèles $x=2z-4, y=3z+1$ et $x=2z+1, y=3z-2$? Et quelle est l'équation du plan contenant ces deux parallèles? — Soient a,b,c les distances de l'origine aux points où un plan coupe les axes des x, des y et des z, obliques ou non, et soit (x,y,z) un point quelconque de ce plan : par la similitude de triangles, on est conduit directement et très-simplement à l'équation *homogène* du plan, savoir :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

24. Les plans bissecteurs des deux angles dièdres (ou *coins*) adjacents, formés par le plan $2x-3y+6z-11=0$ avec celui des xy,

sont perpendiculaires entre eux. Démontrer ce théorème, par le calcul, les coordonnées étant rectangulaires.—Peut-on alors calculer le volume et la surface de la portion, entre les deux plans bissecteurs, du cylindre circulaire droit, ayant pour base, sur le plan des xy, le cercle $x^2+y^2-8x=84$?

25. Les coordonnées étant rectangulaires, si par le point (4,6,7) du plan $x-2y+2z-6=0$, on mène différentes droites dans ce plan; 1° quelle est celle de toutes ces droites qui fait le plus grand angle avec le plan des xy et y a-t-il un angle minimum? 2° Comment tracer ce plus grand angle? 3° Comment tracer celle des droites proposées, faisant avec le plan des xy, un angle moitié de l'angle maximum? 4° Enfin, quelles sont les équations de celle des droites proposées qui fait un angle de 60° avec le plan des xy?

26. Les coordonnées étant rectangulaires, calculer le volume du tétraèdre ayant pour sommet l'intersection des trois plans

$$2x-y+z-11=0,$$
$$x-2y+3z-24=0,$$
$$x-y+2z-10=0,$$

et pour base le triangle formé par les traces de ces trois plans sur celui des xy.

27. Les coordonnées étant rectangulaires, calculer les trois coins compris entre les plans des trois parallèles

$$x=2z+2 \mid x=2z+10 \mid x=2z-1$$
$$y=z+1 \mid y=z+5 \mid y=z-2.$$

Calculer aussi l'aire et le plan de la section perpendiculaire à ces trois parallèles.

28. Les coordonnées étant rectangulaires : 1° calculer l'équation du plan passant par les deux droites qui se coupent, savoir :

$$x=z+4, y=2z-1 \text{ et } x=3z+2, y=4z-3.$$

2° Calculer l'aire du triangle ayant pour sommets le point d'intersection et les deux points (7,5,3) et (11,9,3), situées respectivement sur les deux droites; soit par sa projection sur le plan des xy (que l'on peut calculer directement); soit par les deux côtés et le sinus de l'angle compris. 3° Enfin, calculer le volume et la surface du prisme droit tronqué, ayant pour *section* le triangle et pour *base*, la projection de celui-ci sur le plan des xy.

29. Calculer la distance de l'origine des coordonnées rectangulaires à la droite $x=2z+1, y=z+10$, ainsi que l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine et les points où la droite perce les plans des xy et des xz.—Ce triangle et ses projections sur les plans

des xy et des xz, déterminent trois tétraèdres : quels en sont les volumes respectifs ?

30. Les deux plans $x-2y+2z=0$ et $4x-y+z=0$ étant rapportés à des coordonnées rectangulaires; quel est le lieu géométrique de tous les points tels, que le carré de la distance de chacun au premier plan vaille 8 fois le carré de la distance de ce point au second plan? Quelle est l'expression du cosinus de l'angle des deux plans résultants?

La droite $x=2z+2, y=3z-1$ étant rapportée à des coordonnées rectangulaires ; mener par le point (7,14,27) un plan perpendiculaire à cette droite, et calculer la distance de la droite au point. Quels sont les équations de cette distance?

31. La droite numérique a étant donnée, calculer et construire les trois points tels, que $4a$, $6a^2$ et $18a^4$ soient les sommes respectives des puissances 1re, 2e et 4e des coordonnées rectangulaires de chacun.—Démontrer que : 1° le triangle joignant les trois points, ainsi déterminés, est équilatéral, tandis que les pieds des trois x sont les sommets d'un triangle rectangle ; 2° les deux triangles sont la section et la base du tronc de prisme triangulaire droit, équivalent aux deux tiers du cube fait sur a; 3° enfin, ce tronc et le tétraèdre, ayant le triangle équilatéral pour base et l'origine pour sommet, sont équivalents entre eux. (Recherches analogues lorsque $2a$, $6a^2$ et $8a^3$ sont les sommes respectives des puissances 1, 2 et 3 des coordonnées rectangulaires de chaque point).

Et si les coordonnées étant toujours rectangulaires, on a le système :

$$x^2+y^2+z^2=14, xy+xz+yz=11, x^3+y^3+z^3=36;$$

non-seulement on peut calculer et construire les trois points représentés par ce système d'équations ; mais, le triangle qui les joint étant la *section* commune à trois prismes triangulaires droits *tronqués*, dont ses projections sur les plans coordonnées sont les *bases*, on peut calculer le volume de chaque tronc; etc. On peut aussi considérer le système d'équations :

$$x^2+y^2+z^2=9, xy+xz+yz=0 \text{ et } x^4+y^4+z^4=33.$$

Pour résoudre avec facilité, les différents systèmes d'équations ci-dessus, il faut donner à chacun la forme que voici :

$$x+y+z=1, xy+xz+yz=-4 \text{ et } xyz=-4.$$

32. Calculer la surface et le volume du tétraèdre rectangle, retranché du trièdre droit des coordonnées par le plan

$$2x+2y+z-12=0, \text{ ou } 9x+6y+2z-54=0.$$

Calculer le centre et le rayon : 1° de la surface sphérique *inscrite* au tétraèdre proposé T ; 2° de la surface sphérique *circonscrite* ; 3° de chacune des quatre surfaces sphériques *exinscrites* ; 4° enfin, de la surface sphérique passant par les centres de ces quatre dernières.

33. Soit T le volume et S la surface totale du tétraèdre rectangle, dont le plan de l'hypoténuse H a pour équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2;$$

soient A, B, C les aires des faces du trièdre droit des coordonnées respectivement opposées aux arêtes $2a$, $2b$, $2c$ de ce tétraèdre; soit r le rayon de la sphère inscrite dans T, et soient a',b',c',h' les rayons des sphères exinscrites, touchant respectivement les faces A, B, C, H : on aura toujours ces relations remarquables à démontrer :

$$rS=3T, a'(S-2A)=3T, b'(S-2B=3T,$$
$$c'(S-2C)=3T \text{ et } h'(S-2H)=3T.$$

De plus, le rayon de la sphère circonscrite est la demi-diagonale du parallélipipède dont T fait partie. — Parmi tous les parallélipipèdes rectangles inscrits dans T, quel est celui de plus grand volume et de plus grande surface totale?

34. Les coordonnées étant rectangulaires, construire le tétraèdre qui joint les quatre points donnés (a,a,a), $(-a,a,a)$, $(a,-a,a)$ et $(a,a,-a)$. Quelle est l'équation du plan, passant par les trois derniers points? Calculer le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, ainsi que le rapport des volumes de ses deux parties, déterminées par le plan des xy.

35. Calculer le volume et la surface du tétraèdre rectangle, retranché du trièdre droit des coordonnées, par le plan des deux parallèles

$$x=mz+2 \mid x=mz+3$$
$$y=nz+1 \mid x=nz+2;$$

on sait que : 6 septièmes, 2 septièmes et 3 septièmes, sont les cosinus des angles respectifs que chacune des parallèles fait avec les axes des x, des y et des z.

36. Les coordonnées étant rectangulaires, soit (2,4,5) le point commun aux deux droites

$$x-2=m(z-5), \mid x-2=-(z-5),$$
$$y-4=n(z-5); \mid y-4=n'(z-5).$$

Si les cosinus des angles que la première droite fait avec les axes des x, des y et des z, sont respectivement $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$: 1° quelles sont les valeurs de m et n? 2° quelle est la valeur de n' qui rend les deux droites perpendiculaires entre elles? 3° quelle est alors l'équation du plan de ces deux droites? 4° enfin, quelle est la surface totale du tétraèdre rectangle retranché, par ce plan, du trièdre droit des coordonnées?

37. Calculer l'équation du plan qui passe par le point (3,5,2) et dont $\frac{9}{11}$, $\frac{6}{11}$ et $\frac{2}{11}$ sont les cosinus respectifs des angles qu'il fait avec les plans rectangulaires des xy, des xz et des yz. — Comment calculer le centre de gravité du tétraèdre rectangle intercepté ?

Surfaces du second ordre.

38. Quel est le plus petit des diamètres réels de la surface $3x^2-y^2-2z^2=9$, les coordonnées étant rectangulaires ? Quelles sont les aires des deux cercles suivant lesquels cette surface est coupée par la surface sphérique dont (6,0,0) est le centre ?

39. Le paraboloïde elliptique $y^2+2z^2=6x$ étant rapporté à ses paramètres principaux, démontrer que les milieux des cordes parallèles, de direction constante quelconque, appartiennent à un plan parallèle à l'axe principal des x. — Calculer les aires des deux sections circulaires suivant lesquelles la surface sphérique, dont (7,0,0) est le centre, coupe la surface proposée.

40. Les coordonnées étant rectangulaires, rapporter la surface

$$2x^2+y^2-4z^2+8x-6y-8z-12=0,$$

à son centre et à ses axes. Quel est le plus petit de tous ses diamètres ? Et quelle est l'aire de la section elliptique, faite par le plan $x-2z=0$, dans le nouveau système ? — Si l'on avait $2x^2+3y^2+z^2-4x+6y-2z=6$, l'équation aux axes serait $2x^2+3y^2+z^2=12$. — Coupant alors la surface par le plan $z=mx$; la projection de la section sur le plan des xy est une circonférence, si $m=\pm 1$; ce qui donne deux plans rectangulaires; etc.

41. Le plan $z=mx$, mené par l'axe des y rectangulaires, coupe nécessairement l'ellipsoïde

$$x^2+2y^2+4z^2=16.$$

Quelle doit donc être la valeur de m, 1° pour que le plan coupe l'ellipsoïde suivant un cercle ? 2° pour que la projection orthogonale de la section, sur le plan des xy, soit une circonférence ? — On peut chaque fois calculer l'aire de la section et celle de sa projection, sur le plan des xy; or, dans le second cas, quelles sont les expressions numériques du volume et de la surface totale de l'*onglet cylindrique*, compris par la demi-section et sa projection ? — Enfin, si l'on coupe la surface proposée par le plan $z=1$, quelles sont les expressions numériques des deux *segments* qui en résultent dans le volume de l'ellipsoïde ?

42. Considérons l'ellipsoïde et le plan parallèle à l'axe des y rectangulaires, savoir :

$$4x^2+6y^2+9z^2=36 \text{ et } z=mx-6.$$

Quelle doit être la valeur de m, 1° pour que le plan coupe l'ellipsoïde suivant un cercle? 2° pour que la section, projetée orthogonalement sur le plan des xy, donne une circonférence? 3° enfin, pour que le plan n'ait qu'un point de commun avec l'ellipsoïde? — Calculer chaque fois l'aire de la section et de sa projection; et dans le second cas, quelles sont les expressions du volume et de la surface du cylindre droit tronqué, dont la section et sa projection sont les bases?— Même problème, dans le premier cas, pour le volume du cylindre elliptique tronqué.

Il existe des recherches analogues aux précédentes pour les deux hyperboloïdes et le paraboloïde elliptique. Par exemple, couper la surface de révolution autour de l'axe des x rectangulaires, savoir : $y^2+z^2=12x$, par le plan $y=mz+1$, et calculer m de telle sorte que la projection orthogonale de la section résultante, sur le plan des xz, soit une circonférence. — On peut alors calculer les aires de la section et de sa projection, aussi bien que quand $m=\frac{1}{2}$, etc. — Quelle est l'expression du volume du *segment* déterminé par le plan $x=12$?

43. Axes principaux. Voyons comment on peut calculer les longueurs des axes principaux dans les surfaces du second ordre, douées de centres, les coordonnées étant rectangulaires.

Toutes ces surfaces sont représentées par l'équation générale

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=G.$$

Lorsque l'équation ne contient que les carrés des variables, les coordonnées étant rectangulaires, on démontre aisément que les trois axes principaux sont l'un le plus grand et l'autre le plus petit de tous ses diamètres, le troisième axe étant maximum par rapport au plus petit diamètre et minimum par rapport au plus grand.

Cela posé, soit d un demi-diamètre quelconque de la surface proposée; il s'agit donc de calculer le maximum de d, son minimum et la valeur intermédiaire. Or, pour cet effet, soient m et n les directions variables de d, et (x,y,z) son extrémité, appartenant à la surface : on aura

$$x=mz, y=nz \text{ et } d^2=x^2+y^2+z^2.$$

Les x, y et z ont mêmes valeurs respectives dans les quatre équations précédentes; on peut donc en éliminer ces trois variables; et si l'on pose

$d^2v=G, v-A=g, v-B=h$ et $v-C=k$,

on trouve

$$gm^2+hn^2+k-2Dmn-2Em-2Fn=0.$$

Résolvant cette équation par rapport à m; on sait que le maximum et le minimum de v rendent nulle la quantité sous le radical; et qu'il en est de même du radical de l'expression de n, fournie par cette égalité à zéro. On trouvera donc

$$gm=Dn+E, (gh-D^2)n=DE+Fg \text{ et}$$
$$v^3-(A+B+C)v^2+(AB+AC+BC-D^2-E^2-F^2)v$$
$$-(ABC+2DEF-AF^2-BE^2-CD^2)=0.$$

Cette dernière équation a pour *racines* le maximum de v, le minimum et la valeur intermédiaire; et ainsi $d^2v=G$ fait connaître le minimum de d^2, le maximum et la valeur intermédiaire, c'est-à-dire les trois axes principaux cherchés. On aura ensuite leurs directions respectives; lesquelles satisferont deux à deux à la condition de perpendicularité.

44. Diamètres rectangulaires. On peut faire $G=1$: si alors $2\alpha, 2\beta, 2\delta$ sont les diamètres rectangulaires, *réels* ou *imaginaires*, sur les axes respectifs des x, des y et des z, on aura $A\alpha^2=1, B\beta^2=1$ et $C\delta^2=1$. Les racines de $v^3-(A+B+C)v^2+\text{etc.}=0$, sont les *inverses* des carrés des trois demi-axes principaux; *la somme des inverses des carrés de trois diamètres rectangulaires quelconques est donc égale à la somme des inverses des carrés des trois axes.*

On voit que, dans l'ellipsoïde, par exemple, il existe une infinité de systèmes de trois diamètres rectangulaires; il existe donc aussi une infinité d'*octaèdres symétriques*, inscrits et de même centre : tous sont circonscrits à la sphère concentrique, de rayon R donné par $(A+B+C)R^2=1$. Or, parmi tous ces octaèdres, un seul est régulier : c'est le plus petit de tous et celui de moindre surface totale (facile à démontrer chaque fois). — On démontre aussi que *la somme de trois diamètres rectangulaires de l'ellipsoïde est un minimum dès qu'ils sont égaux entre eux.*

45. Diamètres conjugués. 1° Si les coordonnées ne sont pas rectangulaires, mais que les coefficients 2D, 2E et 2F soient nuls; on peut, par des calculs analogues à ceux indiqués plus haut (43), déterminer le plus grand et le plus petit diamètre : il en résulte très-simplement les trois relations connues entre un système quelconque de trois diamètres conjugués et les trois axes principaux de la surface proposée.

Ainsi, dans l'ellipsoïde, non-seulement il existe une infinité de

systèmes de trois diamètres conjugués ; mais il existe une infinité de diamètres, conjugués trois à trois et tous égaux entre eux. Or, on démontre aisément que *la somme de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde est un maximum ou un minimum, suivant que ces trois diamètres sont égaux entre eux ou qu'ils se confondent avec les axes principaux.*

2° Observons d'ailleurs que les huit plans tangents à l'ellipsoïde, menés par les huit points où les diagonales du parallélipipède des axes percent la surface, forment un octaèdre circonscrit, dont les six sommets se trouvent sur les prolongements des axes principaux. Cet octaèdre symétrique circonscrit et l'octaèdre inscrit, celui-ci ayant les mêmes sommets que l'ellipsoïde, sont semblables, de forme et de position. Or, connaissant numériquement les trois axes principaux, quelles sont les expressions des volumes et des surfaces des deux octaèdres?

3° On démontre que, parmi tous les octaèdres symétriques inscrits, ayant chacun pour sommets les extrémités de trois diamètres quelconques de l'ellipsoïde, l'octaèdre maximum a pour diagonales trois diamètres conjugués. Il y a donc une infinité de ces octaèdres inscrits, de même volume maximum, sixième d'un parallélipipède conjugué ou du parallélipipède des axes.

4° Soit E le volume de l'ellipsoïde circonscrit à un octaèdre symétrique, de même centre et de volume v, et soit posé $E=vr$. Si E est constant, on vient de voir que v est un maximum dès que ses diagonales sont trois diamètres conjugués de E ; par suite r est un minimum : donc si v est donné constant, E et r étant variables, il est clair que E sera un minimum en même temps que r, c'est-à-dire quand l'octaèdre donné v aura pour diagonales trois diamètres conjugués de E. Ainsi *le plus petit de tous les ellipsoïdes circonscrits à des octaèdres symétriques, de même volume* v *donné, est celui où les diagonales de l'un de ces octaèdres sont trois diamètres conjugués.* Il existe donc aussi une infinité de ces ellipsoïdes circonscrits, tous de même volume minimum.

5° Si donc les trois diagonales de v sont $2a$, $2b$, $2c$ et à angles droits, d'où $v=\frac{4}{3}abc$; on a les trois axes principaux de l'ellipsoïde, de volume minimum $E=\frac{4}{3}rabc$. D'ailleurs r ne contient ni a, ni b, ni c ; donc il ne change pas quand $c=b=a$. Mais alors l'ellipsoïde devient la sphère $E'=\frac{4}{3}\pi aaa=\frac{4}{3}raaa$; donc $r=\pi$ et $E=\frac{4}{3}\pi abc$.

6° On peut voir sept autres propriétés remarquables de l'ellipsoïde, indiquées dans notre traité de *Géométrie analytique* et où de

plus se trouve démontré le théorème suivant: *Dans tout ellipsoïde, le lieu géométrique des diamètres, en nombre infini, de même longueur, est une surface conique du second degré, passant par les quatre diagonales du parallélipipède des axes principaux.*

7° Le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes de l'ellipsoïde $x^2+4y^2+9z^2=36$, menées du point P(4,6,8), est un second ellipsoïde, *semblable* au premier, dont le centre est le milieu de la droite OP, O étant l'origine. Et si les coordonnées sont rectangulaires; quelles sont, d'après 5°, les valeurs numériques des volumes des deux ellipsoïdes?

8° Quelle est la surface, divisant à la fois le volume de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ en trois portions équivalentes, et chaque corde de cette sphère, parallèle à l'axe des z, en trois parties égales? — Même problème pour un ellipsoïde dont $2a$, $2b$ et $2c$ sont les axes principaux donnés.

9° Enfin, si à partir de l'origine O, on prend, sur les axes des x, des y et des z rectangulaires, les longueurs OA=$2a$,OB=$2b$ e OC=$2c$: non-seulement on peut calculer le rayon de la *sphère* circonscrite au tétraèdre OABC, ainsi que les rayons des *petits cercles* déterminés par les faces de ce tétraèdre; mais il en résulte que la distance de O à un plan quelconque de *grand cercle*, est la somme algébrique des distances de A, B, C au même plan.

46. Applications diverses. Voici maintenant plusieurs applications des formules pour le calcul des axes principaux :

I. Les coordonnées étant rectangulaires, quel est le genre de la surface représentée par l'équation numérique

$$x^2+y^2+8z^2-4xz-4yz=16?$$

Pour le savoir, il faut calculer les *longueurs* de ses axes principaux $2a$, $2b$ et $2c$; or, on trouve $2a=8, 2b=\frac{8}{3}$ et $2c=16$ sur O. La longueur du troisième axe $2c$ ne saurait donc se calculer, ou si l'on veut, elle est *infinie*; d'ailleurs ses équations sont $x=2z$ et $y=2z$. Quant aux deux premiers axes $2a$ et $2b$, ils sont ceux d'une ellipse dont l'aire est $\frac{16}{3}\pi$ et dont le plan est perpendiculaire au troisième axe $2c$. De plus, comme $z=0$, donne la circonférence $x^2+y^2=16$; on voit que la surface proposée est une surface *cylindrique*, oblique au plan des xy, ayant pour *base* le cercle $z=0$ et $x^2+y^2=16$. On trouve, en effet, que si une droite se meut sur la circonférence $z=0$ et $x^2+y^2=16$, en restant constamment parallèle à la droite fixe $x=2z, y=2z$, elle engendre la surface proposée.

Si le plan de l'ellipse $\frac{16}{3}\pi$, déjà perpendiculaire à l'axe $x=2z$,

$y=2z$, est en même temps tangent au cercle $z=0$ et $x^2+y^2=16$; il est facile de calculer le volume du tronc cylindrique dont le cercle et l'ellipse sont les bases; car $\frac{1}{3}$ est le cosinus de l'angle des deux plans.

II. C'est aussi par le calcul des axes principaux que l'on reconnaît une surface cylindrique dans

$$x^2+y^2+z^2-2xy=8,$$

et un cône dans $x^2+y^2-2z^2-4xy=0$: c'est le cône asymptote de l'hyperboloïde $x^2+y^2-2z^2-4xy=12$.

III. Si par chaque point de la surface sphérique, dont a est la valeur numérique connue du rayon, on mène une parallèle à l'axe des x rectangulaires, du côté des x positifs, et que la longueur de cette parallèle soit celle, 1° de l'y, 2° du z, 3° de la somme de l'y et du z de ce point; chaque fois le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est un ellipsoïde, de volume équivalent à celui de la sphère proposée. (C'est ce qu'on démontre par le calcul des axes principaux).

IV. Chaque lieu géométrique de tous les points obtenus en prolongeant le z de chaque point de la surface sphérique, dans le sens des z positifs, soit de l'x, soit de l'y, soit enfin de la somme de l'x et de l'y de ce point, est encore un ellipsoïde, de volume équivalent à celui de la sphère proposée. — Mais si l'on prolongeait de la longueur b donnée; quel serait le lieu géométrique?

V. Les coordonnées étant toujours rectangulaires, le calcul des axes principaux fait voir que

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=48,$$

est un cylindre, dont l'axe $x=z, y=z$ est perpendiculaire au plan $x+y+z=0$, plan d'un grand cercle de la sphère $x^2+y^2+z^2=16$; cette surface cylindrique touchant, par suite, la surface sphérique suivant la circonférence de ce grand cercle.

VI. La droite donnée AB se meut de telle sorte que ses extrémités A et B restent constamment, la première A sur l'axe des z rectangulaires et la seconde B sur le plan des xy: si par un point P de cette droite, donnant $AP=k$ et $PB=h$, on mène, dans toutes les positions de AB, une parallèle à l'axe des x, du côté des x positifs, et que la longueur de cette parallèle soit égale au z du point P; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est un ellipsoïde équivalent au volume de la sphère dont h est le rayon. — Par ce mode de génération, les deux droites AB et A'B' étant divisées en parties, proportionnelles ou non, par les deux points

P et P′, il en résulte deux ellipsoïdes *semblables*, de forme et de position. — La longueur de chaque parallèle pourrait être l'y du point P, ou l'x, ou la somme de l'y et du z, etc. — Enfin, O étant l'origine des coordonnées rectangulaires ; si par le milieu de $AB=a$, on élève à cette droite une perpendiculaire, de longueur donnée b, hors du triangle rectangle AOB, mais dans le même plan ; l'extrémité de b appartient à une surface de révolution, se réduisant au cône $x^2+y^2=z^2$, lorsque $b=\frac{1}{2}a$: c'est le cône asymptote de l'hyperboloïde de révolution $x^2+y^2-z^2=r^2$.

VII. Les coordonnées étant rectangulaires, quel est le lieu géométrique de tous les points tels que : 1° les trois rectangles, compris sous les distances deux à deux de chaque point aux trois plans coordonnés, aient le carré donné a^2 pour somme? 2° la somme de ces trois rectangles, retranchée du carré de la distance du point à l'origine, donne le reste constant a^2 ?

VIII. La connaissance des axes et des paramètres principaux est nécessaire pour calculer les volumes de certains *segments* dans les cinq surfaces du second ordre. On parvient directement aux expressions de ces volumes à l'aide de la règle des variables auxiliaires, simplifiée par la méthode infinitésimale. Mais il importe d'observer que la méthode *fonctionnelle*, comme on l'a déjà vu plus haut, conduit très-simplement à l'expression du volume E de l'ellipsoïde, au moyen des valeurs numériques de ses demi-axes principaux a,b,c, d'après l'expression $\frac{4}{3}\pi a^3$ de la sphère dont a est le rayon.

En effet, le volume E de l'ellipsoïde est déterminé entièrement dès que ses trois demi-axes principaux, a,b,c sont donnés ; le parallélipipède rectangle dont abc est le volume, est donc aussi complètement déterminé, aussi bien que le rapport R de E à abc ; de sorte que $E=Rabc$. Or, le rapport R est un nombre abstrait, ne conservant aucune trace de ses deux termes, et indépendant, par suite, des nombres a,b,c, ici *quelconques*; ce rapport ne change donc aucunement lorsque ces trois nombres deviennent égaux au premier a. Mais alors le volume E devient le volume E′ de la sphère et l'on a $E'=Raaa=\frac{4}{3}\pi aaa$; d'où $R=\frac{4}{3}\pi$. Et puisque le rapport R n'a pas changé en faisant $c=b=a$, il s'ensuit qu'avant cette hypothèse, on avait aussi $R=\frac{4}{3}\pi$; donc $E=\frac{4}{3}\pi abc$.

Par cette méthode, l'aire du cercle conduit immédiatement à l'aire de l'ellipse, et la même méthode s'applique, avec beaucoup de facilité, à la recherche de *rapports égaux*, dans la géométrie élémentaire.

Par exemple, soient P et P′ deux prismes ou deux cylindres quelconques ; soient Q et Q′ deux pyramides ou deux cônes, ayant mêmes bases respectives que P et P′, et respectivement une arête latérale commune avec P et P′.

Il est d'abord évident que Q′ se trouve avec P′ absolument comme Q avec P ; donc puisque le rapport indique toujours comment l'antécédent se trouve avec le conséquent seul ; on voit déjà que le rapport de Q′ à P′ est absolument le même que celui de Q à P.

Soient d'ailleurs n et n' les rapports de Q à P et de Q′ à P′ : on a donc $Q=Pn$ et $Q'=P'n'$. Les rapports n et n' sont deux nombres abstraits, ne conservant aucune trace de leurs deux termes ; ils ne sauraient donc changer aucunement lorsque les

deux prismes ou cylindres P et P', d'abord quelconques, deviennent égaux entre eux. Mais alors Q et Q' coïncident en même temps que P et P'; c'est-à-dire qu'alors Q et Q' sont aussi égaux entre eux. Donc $Q'=P'n'$ devient $Q=Pn'$: déjà $Q=Pn$; donc $n'=n$.

Les rapports n et n' ne changent point par l'hypothèse de $P=P'$; donc puisque maintenant ils sont égaux, ils étaient déjà égaux avant cette hypothèse; et l'on avait simultanément $Q=Pn$ et $Q'=P'n$; c'est-à-dire

$$Q : Q' = P : P'.$$

Donc *deux pyramides Q et Q', de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes entre elles*; car alors les deux prismes P et P' sont équivalents eux-mêmes.

De là donc, si P' est un demi-cube, Q' équivaut à la pyramide régulière, *sixième* de ce cube 2P' et par conséquent *tiers* de P'. Ainsi, en vertu de la proportion ci-dessus, on aura toujours $Q=\frac{1}{3}P$; même quand P étant un *cylindre* quelconque, Q désigne le *cône* de hauteur égale et de base équivalente à celle de P.

IX. La recherche des *axes* et des *plans* de *symétrie* se présente souvent pour faciliter l'étude des surfaces numériques, du second ordre et d'un ordre supérieur. Par exemple, les coordonnées étant rectangulaires, si à partir de l'origine, on mène à volonté la droite donnée a, et qu'en partant de l'autre extrémité de a, on porte, sur cette droite ou sur son prolongement, la longueur égale à l'x de cette extrémité; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est la double surface :

$$x^2+y^2+z^2-a\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}=\pm ax.$$

C'est la surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la double *courbe polaire*

$$r=a(1\pm\cos\omega);$$

le signe + répondant au cas où l'x est portée sur le prolongement de a.

La discussion apprend que les deux courbes, représentées par la double équation polaire, sont parfaitement égales entre elles; mais que leurs points homologues se trouvent, deux à deux, aux extrémités d'une droite perpendiculaire à l'axe des y et divisée par lui en deux parties égales : chaque courbe a un point de *rebroussement* à l'origine et chacune a un *axe de symétrie* $2a$, situé sur l'axe des x, du côté des x positifs pour l'une et du côté des x négatifs pour l'autre. De plus, les deux courbes se coupent en deux points sur l'axe des y et à la même distance a, de part et d'autre de l'origine; celle-ci est donc le *centre* de la courbe C, dont les deux proposées sont les deux *branches*, égales et opposées. Ainsi la courbe C a deux *axes principaux* $4a$ et $2a$, situés sur ses axes de *symétrie* des x et des y; de sorte que l'aire limitée par C a pour mesure $4a^2+\frac{1}{2}\pi a^2$; tandis que l'aire limitée par chaque branche a $\frac{1}{2}\pi a^2$ pour mesure.

La surface proposée étant donc décrite par la demi-courbe C autour de $4a$, est composée de deux *nappes* finies, égales et opposées : elle est coupée en deux parties égales par le cercle, de rayon a, sur l'axe des y; et ce cercle est un *plan de symétrie* de la surface, perpendiculaire à l'axe $4a$. — Quelle est l'aire du cercle décrit par le *maximum* de y, dans C?

Différentes surfaces numériques.

47. Les coordonnées étant rectangulaires, rapporter, à ses axes principaux, l'hyperboloïde à une nappe, savoir : $y^2=2xz+36$. Couper ensuite la surface par le plan $x=mz$, passant par le nouvel axe des y, et calculer m de telle sorte que la projection, sur le plan

des yz, de la section résultante soit une circonférence; etc. — Démontrer que, dans les deux surfaces

$$My^2 \pm Nz^2 = 2Rx,$$

tous les plans *diamétraux*, et par conséquent tous les *diamètres*, sont parallèles à l'axe des x rectangulaires, seul *axe de symétrie* de chaque surface.

48. Considérons les deux ellipsoïdes concentriques, rapportés au même système d'axes rectangulaires des coordonnées, savoir :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 8,$$
$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 64 :$$

ces deux ellipsoïdes sont *semblables*, de forme et de position. Or, il existe une série de plans parallèles coupant chacun les deux surfaces suivant deux circonférences concentriques : quel est le plan donnant les deux circonférences maximums et quelles sont alors les longueurs de celles-ci ? Quel est le plan donnant une circonférence nulle et quelle est alors la longueur de l'autre circonférence? Calculer le volume du *segment* ayant pour base ce dernier cercle. — De plus, si l'on coupe les deux surfaces par le plan $z = mx + h$, quelle doit être la valeur de m, pour que les deux sections semblables, projetées orthogonalement sur le plan des xy, donnent deux circonférences concentriques? Quelles sont les valeurs de h qui rendent les deux cercles maximums et minimums? Enfin, quelles sont les aires des deux sections semblables, dans ces deux cas?

49. Les coordonnées étant rectangulaires, rapporter à leurs axes principaux, soit en déplaçant les axes des x et des y, soit par l'équation du 3^e degré, les deux surfaces :

$$z^2 - 2yx = \pm 16.$$

Quels sont alors les volumes des deux segments, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 12$, dans la première, et depuis $z = 4$ jusqu'à $z = 12$, dans la seconde? — L'axe des z contient l'axe imaginaire de la première surface et l'axe réel de la seconde. Quelles sont les aires de la section faite par le plan $z = x + y$, dans la première surface proposée, et de la projection, sur le plan des xy, de cette section?

50. Les coordonnées étant rectangulaires, si, par les deux points (3,0,0) et (−3,0,0), on mène deux droites qui se coupent, de telle sorte que m et n étant les directions variables de la première, m' et n' celles de la seconde, on ait constamment, soit $mm' = -1$ et $nn' = -2$, soit $mm' = 1$ et $nn' = 2$, soit enfin $mm' = 1$ et $nn' = -2$; on demande, dans ces trois hypothèses, quels sont chaque fois les axes principaux de la surface, lieu géométrique des intersections

successives des deux droites mobiles?—Aurait-on des surfaces respectivement *semblables* aux trois précédentes, si les deux droites partaient des deux points (3,2,1) et (—3,—2,—1)?

51. Les coordonnées étant rectangulaires, quels sont les axes principaux de la surface du second ordre, lieu géométrique de tous les points obtenus en prolongeant le z de chaque point de la surface sphérique, de rayon r donné, de la longueur égale à l'x de ce dernier point?

52. Le lieu géométrique de tous les points tels, que la différence des distances de chacun aux deux points donnés (—2,0,0) et (10,0,0), soit égale à 4, est un hyperboloïde à deux nappes de révolution; tandis que c'est un plan unique, si 96 est la différence des carrés des deux distances. Ce serait une sphère, si la somme de ces deux carrés était 90; et un ellipsoïde, si 100 était la somme des deux distances proposées.

53. Quel est le lieu géométrique de tous les points tels, 1° que la somme ou la différence des carrés, faits sur les distances de chacun à l'axe des z et au plan des xy rectangulaires, soit équivalente à un carré donné a^2? 2° que la somme ou la différence de ces distances ait la longueur donnée $2a$?

54. Un point étant donné à la distance 20 d'un plan fixe, on peut calculer le lieu géométrique de tous les points tels, que les distances de chacun au point et au plan donnés, 1° soient égales entre elles; 2° que l'une soit double de l'autre (ce qui fait deux cas à distinguer); 3° que leur somme soit 60; 4° enfin, que leur différence soit 30 (ce qui fait encore deux cas à distinguer). Chaque lieu est une surface de révolution.

55. Les coordonnées étant rectangulaires, si dans chacun des deux hyperboloïdes

$$2x^2+4y^2-z^2=8 \text{ et } x^2-y^2-z^2=4,$$

on prolonge le z de chaque point d'une longueur égale à l'x de ce point; les lieux géométriques de tous les points ainsi obtenus, dans les deux systèmes, sont deux hyperboloïdes, de mêmes genres respectifs que les deux proposés. — C'est ce que l'on reconnaît par le calcul des axes principaux des deux nouvelles surfaces: effectuer ce calcul pour chacune.

56. Les coordonnées étant rectangulaires, si l'on coupe l'ellipsoïde

$$x^2+3y^2+4z^2=36;$$

par les deux plans parallèles $z=x-1$ et $z=x+1$, les deux sections sont des ellipses *égales*. Démontrer ce théorème, par le calcul des

aires des deux sections, et indiquer la construction des deux plans parallèles proposés. — Les deux sections seraient deux *ellipses semblables*, si les deux plans parallèles étaient $3z=4y$ et $3z=4y+3$: quelles sont alors les aires des deux sections elliptiques? Et quel est le volume du tronc de cylindre droit, à base elliptique, déterminé par la section $3z=4y$ et sa projection sur le plan des xy?

57. Le paraboloïde elliptique, rapporté à ses paramètres principaux, savoir :

$$3y^2+z^2=12x,$$

étant coupé par les deux plans parallèles $z=mx$ et $z=mx+3$; non-seulement les deux sections sont deux ellipses semblables; mais leurs projections sur le plan des xy sont des circonférences, si celui-ci fait, avec les deux plans parallèles, deux coins de chacun 60°. Quelles sont alors les expressions des aires des deux sections, ainsi que des surfaces et des volumes des deux troncs de cylindres droits résultants?

58. Les coordonnées étant rectangulaires, le lieu géométrique de tous les points tels, que la distance de chacun à l'origine soit moyenne proportionnelle entre l'x et l'y de ce point, augmentés chacun de 4, est un ellipsoïde. C'est ce qu'on démontre par le calcul des axes principaux : effectuer ce calcul.—Si l'x et l'y étaient augmentés chacun de 6, l'ellipsoïde résultant serait-il semblable au premier?— Quelle serait la surface, si la distance à l'origine était moyenne proportionnelle entre 8 et l'x de chaque point?

59. L'origine étant au centre du cube, ayant 2 pour côté, et les axes étant respectivement parallèles aux trois arêtes contiguës; si la droite mobile

$$x=mz+p,\ y=nz+q,$$

est assujettie à s'appuyer constamment sur trois arêtes fixes, indéfiniment prolongées; cette droite, dans son mouvement, engendre la surface

$$xy+xz+yz+1=0;$$

laquelle, rapportée à ses axes principaux, devient

$$x^2+y^2-2z^2=2:$$

c'est l'hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe des z. — Quelles sont les expressions des volumes, depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, des segments de l'hyperboloïde proposé et du cône asymptote? — Si $2c$ est le côté numérique du cube, on trouve un hyperboloïde semblable au précédent.

Si une droite se meut parallèlement à l'axe des y rectangulaires,

en s'appuyant constamment sur l'axe des z et sur la droite $z=2x$, $y=4$; elle engendre la surface $yz=8x$; laquelle revient à $y^2-z^2=8x$: quel est le volume du segment entre la surface et le plan des yz, depuis $z=0$ jusqu'à $z=12$?

60. Les coordonnées étant rectangulaires, considérons la surface

$$y^2+z^2=4x^2-x^4.$$

Comme toutes les sections parallèles au plan des yz sont circulaires et ont leurs centres sur l'axe des x ; et comme les plans $x=0, x=2, x=-2$ donnent des cercles *nuls*, tandis que les deux plans $x=\pm\sqrt{2}$, donnent deux cercles *maximums* égaux, de rayon 2 chacun ; on voit que cette surface est de révolution et décrite, autour de l'*axe* 4, sur l'axe de symétrie des x rectangulaires, par la demi-lemniscate

$$y^2=4x^2-x^4.$$

Démontrer que le volume de révolution résultant est les deux cinquièmes de celui de la sphère ayant 2 pour rayon.

61. Si les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède rectangle variable se trouvent sur les trois axes des coordonnées rectangulaires; le point (x,y,z), extrémité de la diagonale d qui aboutit à l'origine, décrit deux plans parallèles, si d^2 plus la surface totale du parallélipipède font le carré 64. Or, quelles sont les expressions du volume et de la surface totale du prisme ayant pour bases les triangles interceptés sur les deux plans, par deux trièdres opposés des coordonnées ?

On peut calculer les axes principaux de la surface décrite par l'extrémité (x,y,z) de d, 1° lorsque la surface totale du parallélipipède rectangle variable ou la surface latérale moins la somme des deux bases, a le carré 64 pour valeur constante; 2° lorsque 36 est constamment la différence de d^2 à la surface totale, ou celle-ci moins d^2 ; 3° si le carré 100 est d^2 moins la surface latérale, ou celle-ci moins d^2 ; 4° lorsque le carré 64 est constamment d^2 moins la somme des deux bases, ou cette somme plus ou moins d^2 ; 5° enfin, lorsque la somme des carrés des quatre diagonales plus ou moins la surface totale du parallélipipède font constamment 144. — Toutes les surfaces, ainsi obtenues, sont douées de centres, et plusieurs sont de révolution.

62. Les coordonnées étant rectangulaires, on peut aisément rapporter, *à ses axes principaux*, la surface numérique :

$$x^2+2y^2-4z^2-2xy-4x+4y=12.$$

Or, comment couper la surface, ainsi représentée, par un plan

parallèle à l'axe moyen, de telle sorte que : 1° la section soit circulaire? 2° une projection orthogonale de la section, sur l'un des plans coordonnés, soit une circonférence ? — Calculer chaque fois les aires de la section et de sa projection.

63. Dans les deux hyperboloïdes de révolution :

$$x^2+y^2-3z^2=d^2 \text{ et } x^2-y^2-z^2=d^2,$$

si l'on mène, par chaque point, une parallèle à l'axe des x, et que, du côté des x positifs, la longueur de cette parallèle soit la somme de l'y et du z de ce point ; les lieux géométriques de tous les points, ainsi obtenus, sont deux hyperboloïdes, non de révolution. — Si l'on prolongeait, dans le sens des z positifs, le z de chaque point des deux hyperboloïdes proposés, d'une longueur égale à la somme de l'x et de l'y de ce point ; quels seraient les lieux géométriques des deux systèmes de points, ainsi obtenus?

64. Le lieu géométrique de tous les points (x,y,z) tels, que la distance de chacun à l'origine des coordonnées rectangulaires soit $x+y+z-d$ ou $x+y-d$, d étant une longueur donnée, est chaque fois un hyperboloïde de révolution : quels en sont les axes principaux? — Le lieu serait la surface sphérique, de rayon 2, si la distance de l'origine à chaque point cherché était double de la distance de celui-ci au point donné (1,2,2).

65. Soient deux droites $AB=a$ et $A'B'=a'$, assujetties à se mouvoir de telle sorte que les extrémités A et A' restent constamment sur l'axe des z rectangulaires et les extrémités B, B' sur le plan des xy : 1° les deux points P et P', divisant les deux droites proposées en segments *proportionnels*, décrivent deux ellipsoïdes concentriques, semblables de forme et de position ; tandis que les milieux des deux droites décrivent deux surfaces sphériques dont $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}a'$ sont les rayons,

2° Les lieux géométriques des pieds des perpendiculaires, menées de l'origine, sur les deux droites AB et A'B', dans leurs diverses positions, sont deux surfaces de révolution semblables, décrites autour de l'axe des z, par les *doubles lemniscates* semblables :

$$4r^2=a^2\sin^2 2\omega \text{ et } 4r'^2=a'^2\sin^2 2\omega.$$

Or, comment calculer l'aire de chaque double lemniscate et le volume qu'elle engendre autour de l'axe des z?

3° Si, à partir de l'origine, on porte sur chaque perpendulaire à AB, la longueur égale au z du pied de cette perpendiculaire ; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est une surface

de révolution, autour de l'axe des z, décrite par la double lemniscate, dont on sait calculer l'aire, savoir :

$$r = \pm a \sin^2\omega \cos\omega.$$

Mais la surface ne serait pas de révolution, si la longueur portée était égale à l'x ou à l'y du pied de la perpendiculaire.

4° Enfin, quel serait le lieu géométrique, si la longueur portée était égale à la somme de deux ou des trois coordonnées du pied de la perpendiculaire à AB, ou si cette perpendiculaire était prolongée de la longueur a=AB, elle-même ?

66. Les coordonnées étant rectangulaires, soit a le rayon de la surface sphérique : 1° si, à partir du centre, on porte sur chaque rayon, la longueur égale à l'x de l'extrémité de ce rayon ; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est la surface de révolution autour de l'axe des x, décrite par la demi-lemniscate : $r = \pm a \cos\omega$; laquelle est le système de deux circonférences égales, se touchant extérieurement à l'origine. Aussi la surface de révolution résultante est-elle le système de deux surfaces sphériques égales, se touchant au centre de la première, qu'elles touchent intérieurement.

On aurait la même surface de révolution, mais autrement située, si la longueur portée était l'y ou le z de l'extrémité de ce rayon.

2° Si à partir du centre, on porte sur chaque rayon a, la somme de l'x et de l'y de l'extrémité de ce rayon ; le lieu géométrique de tous les points, ainsi obtenus, est encore le système de deux surfaces sphériques égales, dont les centres se trouvent sur le plan des xy; lesquelles se touchent au centre de la proposée et la touchent intérieurement.

La longueur portée pourrait être la somme ou la différence des coordonnées de l'extrémité du rayon.

3° Enfin, quel serait le lieu géométrique de tous les points obtenus en prolongeant chaque rayon a d'une longueur égale, soit à l'x ou à l'y ou au z, soit à $x+y$, à $x-y$, à $x+y+z$ ou à $x+y-z$; le point (x,y,z) étant l'extrémité du rayon ?

67. Les surfaces du second ordre, douées de centres, étant rapportées à leurs axes principaux ; le lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires, abaissées du centre de chacune sur ses plans tangents, est une surface de révolution : 1° pour l'*ellipsoïde*, cette surface est décrite, autour de l'axe des x, par la demi-courbe polaire, dont $\frac{1}{2}\pi\,(a^2+b^2)$ exprime l'aire totale ; 2° pour l'*hyperbo-*

loïde, à une ou à deux nappes, la surface de révolution résultante est décrite par une demi-lemniscate tournant autour de l'axe des z ou autour de l'axe des x. Dans l'hyperboloïde à une nappe, l'aire A limitée par la lemniscate génératrice, où l'arc ω de rayon 1, croît depuis o jusqu'à son *maximum* ω', donné par $(a^2+c^2)\cos^2\omega' = c^2$, a pour expression

$$A=(a^2-c^2)\omega'+ac.$$

Et si l'on change c en b, on a l'aire de la lemniscate, génératrice de la surface de révolution, dans l'hyperboloïde à deux nappes.

Enfin, on trouve, d'une manière analogue, la surface, lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées, de l'origine des coordonnées rectangulaires, sur les plans tangents à chacune des deux surfaces : $ay^2+bz^2=abx$ et $ax=yz$.

68. Dans les surfaces du second ordre, rapportées à leurs axes ou à leurs paramètres principaux, l'origine des coordonnées rectangulaires est un sommet réel de chacune. Or, par l'axe des y, on mène un plan perpendiculaire à tout plan tangent à la surface proposée : quel est le lieu géométrique du point où le premier plan coupe le z' du contact du second plan ? — Discuter chaque surface résultante et calculer, dans chacune, le volume du segment déterminé par le plan donné, parallèle à l'un des plans coordonnés.

Par exemple, pour le *paraboloïde elliptique*

$$ay^2+bz^2=abx,$$

le lieu géométrique cherché est la surface du 4e degré

$$4x^2y^2+abz^2=4bx^3.$$

Coupant cette surface par le plan $x=h$, il est facile de calculer le volume du segment résultant, depuis $x=o$ jusqu'à $x=h$; et si $b=a$, ce volume équivaut à celui de la demi-sphère dont h est le rayon.

69. On sait que le lieu géométrique de tous les points tels, que 8 soit le produit des distances de chacun aux trois plans des coordonnées rectangulaires, est l'*hyperboloïde* du troisième ordre $xyz=8$: cette surface est aussi le lieu géométrique de tous les centres de gravité des tétraèdres équivalents, interceptés par des plans sur le trièdre droit des coordonnées ; ou bien encore c'est la surface dont les plans tangents interceptent, sur les trièdres droits des coordonnées, des tétraèdres équivalents chacun à 36 (à démontrer chaque fois).

Or, 1° quel est le lieu géométrique des contacts (x',y',z') de tous

les plans tangents à la surface, menés du point donné (4,4,4)? 2° quel est le lieu géométrique du point où le plan, mené par l'axe des y et perpendiculairement à tout plan tangent à $xyz=8$, va couper le z' du contact de ce dernier plan? (Discuter).

De plus, si de l'origine des coordonnées rectangulaires, on mène des perpendiculaires sur tous les plans tangents à la surface $xyz=a^3$; le lieu géométrique de tous les pieds est la surface du 6e degré

$$(x^2+y^2+z^2)^3=27a^3xyz.$$

Ce qui est remarquable, c'est que cette surface, composée de quatre *nappes*, finies et égales entre elles, est *semblable* à la surface, lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées, de l'origine des coordonnées rectangulaires, sur les plans qui forment, avec les trois plans coordonnés, des tétraèdres équivalents chacun au cube donné c^3.

Enfin, on peut résoudre des problèmes analogues aux précédents, sur la surface $x^3y=8z$.

70. Lorsque l'origine des coordonnées rectangulaires est le milieu de la droite $2a$, donnée sur l'axe des x : 1° le lieu géométrique de tous les points tels, que a^2 soit le produit des distances de chacun aux extrémités de $2a$, est la surface de révolution, autour de l'axe des x, décrite par la demi-lemniscate (dont on sait calculer l'aire totale), savoir :

$$r^2=2a^2\cos 2\omega.$$

2° Si les perpendiculaires aux extrémités de $2a$, dans le plan des xy, interceptent la longueur $2t$, sur la tangente $y=nx+h$ au point (x',y') d'une courbe plane; la circonférence décrite sur le diamètre variable $2t$ coupe la droite $2a$ ou ses prolongements aux deux points fixes $(c,0)$ et $(-c,0)$; de sorte que $c<a$ ou $c>a$. Or, quelles sont chaque fois les équations de la courbe cherchée, de sa tangente et de la surface de révolution que cette courbe décrit autour de $2a$? Quelles sont, pour $c<a$, les équations de la surface *conique* et de la surface *annulaire* que décrivent, autour de $2a$, la tangente au point donné (x',y') et le contour de la *lunulle* formée par les arcs de la circonférence dont $2t$ est le diamètre, alors donné? Enfin, quelles sont les expressions des volumes engendrés par l'aire de la lunulle, lorsque $n=1$ ou $an=-b$ ou $an=-c$, sachant que $a^2=b^2+c^2$?

3° Résoudre des problèmes analogues pour l'ellipse passant par les cinq points donnés : (1,1), (1,−1), (2,2), (2,−2) et (6,0); pour

le système de deux droites passant par les cinq points : (0,0), (0,1), (1,0), (2,2) et (6,6) ; enfin, par la parabole qui joint les cinq points donnés : (0,0), (1,2), (1,—2), (4,4) et (4,—4). Les coordonnées sont chaque fois rectangulaires ; et dans le second cas, il faut placer l'origine des axes parallèles au point où les deux droites se coupent (lesquelles sont à angles droits, même lorsque les coordonnées sont obliques).

71. Quel est le lieu géométrique du point où la perpendiculaire, menée de l'origine des coordonnées rectangulaires, va couper l'y' du contact de toute tangente à chacune des courbes : $y^2=2px$ et $xy=h^2$? Discuter chacune des deux courbes résultantes et calculer l'aire du *segment*, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, dans chacune.

De plus, soit C la première courbe résultante : si sur la corde $\frac{1}{2}p\sqrt{2}$, prise pour diamètre, on décrit une circonférence, il est clair que $x=\frac{1}{4}p$ soutend deux arcs circulaires, l'un triple de l'autre et côtés d'une lunulle L.

Cela posé, le système tournant autour de l'axe des x : 1° quelles sont les équations des surfaces de révolution engendrées par une *branche* de la courbe C et par le contour de la lunulle ? 2° quelles sont les expressions des volumes de révolution qu'engendrent autour de l'abscisse $x=\frac{1}{2}p$, le demi-segment de C et l'aire de la lunulle L ? 3° enfin, quelle est l'expression du volume de révolution qu'engendre autour de $\frac{1}{2}p$ ou autour de l'axe des y rectangulaires, dans C, le segment, ayant pour côtés, la corde $\frac{1}{2}p\sqrt{2}$ et l'arc de C que cette corde soutend ?

72. Les coordonnées étant rectangulaires, soient

$$18x^2+2y^2-9z^2=288 \text{ et } x^2+y^2-z^2=10,$$

deux hyperboloïdes, coupés respectivement par les deux plans $z=x^{\frac{4}{3}}+h$ et $z=x+h$: quelles doivent être les valeurs de h pour que l'aire de la première section E soit un minimum et pour que le segment S parabolique de la seconde section, répondant à $x=8$, soit un maximum ou un minimum ? — Quelles sont les expressions du volume et de la surface du tronc de cylindre droit, ayant pour base la projection de la section minimum E sur le plan des xy ?

73. Quels sont les lieux géométriques de tous les points tels, que chacun soit à égales distances, 1° d'une sphère connue et d'un point ou d'une droite ou d'un plan, donné extérieurement ? 2° de deux sphères données, extérieures ou intérieures, égales ou inégales,

tangentes ou non, l'une à l'autre? (Les deux sphères inégales pourraient se couper).

74. Calculer les axes ou les paramètres principaux des surface du second ordre, lieux géométriques de tous les points tels, que le nombre donné k soit le rapport des distances de chacun à deux lieux géométriques donnés, savoir : deux points ; un point et une droite ; un plan et un point ; une droite et un plan ; deux droites quelconques; et enfin deux plans.— Discuter chaque fois pour $k=1$, $k=\frac{1}{2}$ et $k=2$.

Remarque. Dans le tome xxi des Mémoires couronnés et des savants étrangers, de l'Académie royale de Belgique, mon collègue, M. Brasseur, détermine la nature de chacun des lieux géométriques ci-dessus, par la Géométrie descriptive, et résout ainsi un problème général dont la solution complète n'avait pas encore été donnée à l'aide de la simple Géométrie graphique.

Observons d'ailleurs que l'un des deux lieux géométriques donnés pourrait être une sphère: il en résulterait alors de nouveaux exercices de géométrie analytique, propres à l'étude approfondie de l'*introduction aux mathématiques supérieures*; mais ceux qui précèdent nous paraissent devoir suffire complètement à cet effet.

Nous indiquerons cependant encore l'exercice suivant : Les surfaces du second ordre étant rapportées à leurs axes ou à leurs paramètres principaux; soit (x',y',z') un point quelconque de chacune : si de l'extrémité de x', sur l'axe des x rectangulaires, on abaisse une perpendiculaire à la droite qui joint l'origine au point proposé; quelle est la surface, lieu géométrique du pied de cette perpendiculaire? — Discuter chaque surface résultante : voir quand elle est de révolution ; etc. — La perpendiculaire pourrait être menée de l'extrémité de y', sur l'axe des y, ou de l'extrémité de z', sur l'axe des z. — Enfin, on peut considérer les courbes du second degré : pour la parabole, l'un des deux lieux géométriques est une circonférence.

(*Juillet* 1847).

VIII. — *Description des Entomostracés fossiles de la craie de Maestricht,*

PAR

J. BOSQUET,

PHARMACIEN A MAESTRICHT.

AVANT-PROPOS.

Depuis la publication de l'important ouvrage de Müller sur les *Monoculus*, les Entomostracés ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux plus ou moins étendus. A ceux de Linné, de Fabricius, de Manuel, de Latreille et d'autres naturalistes qui se sont spécialement attachés à les classer, sont venues se joindre les observations de Baird, de Jurine, de Straus Durkeim et d'autres observateurs, dont les patientes recherches nous ont fait connaître l'organisation de ces êtres presque microscopiques, qui souvent peuplent en si grande abondance les eaux de nos sources et de nos étangs. Cependant contrairement à ce qui se remarque d'ordinaire relativement à des êtres d'une aussi faible taille, le nombre de leurs espèces et des genres qui les comprennent, est assez restreint. On ne connait pas dans la nature actuelle au-delà de cinquante espèces d'Entomostracés (1) partagées entre trois genres, dont l'un, le genre *Cypris*, vit exclusivement dans les eaux douces, et dont les deux autres, à savoir les genres *Cythere* et *Cypridina* ne se trouvent que dans les eaux de la mer.

Cette observation, bien que d'une certaine importance pour le zoologiste, est surtout précieuse pour le paléontologiste. En effet, la carapace des *Cypris* diffère si peu de celle des *Cythere*, que, dépouillée de son animal, il est presqu'impossible de la distinguer

(1) Tels que les comprend M. Milne Edwards.

l'une de l'autre, sans connaître la nature du milieu dans lequel cet animal s'est développé. On conçoit dès-lors, qu'en se livrant à l'étude des fossiles, il sera facile de décider auquel des deux genres se rapporteront les restes de ces animaux, selon qu'ils seront mêlés aux débris d'autres animaux fluviatils ou marins.

Bien que la création des *Cythere* remonte à la première période à laquelle les êtres organisés ont commencé à peupler la surface de la terre, elles n'y ont été représentées que par un nombre très-limité d'espèces, et d'individus comparativement à l'énorme quantité d'autres Crustacés et principalement de *Trilobites*, que cette même période a vus naître. En présence du grand nombre d'espèces appartenant à cette classe d'animaux, qu'ont nourris les mers qui ont donné lieu aux divers dépôts du système silurien, il est certainement bien remarquable que ces dépôts ne renferment que trois espèces d'Entomostracés dont deux signalées par M. Hisinger dans le système silurien de la Suède (1) et dont la dernière a été découverte par M. Barande dans le calcaire silurien de la Bohême (2).

Jusqu'ici les Entomostracés ne sont pas connus dans le système dévonien, mais ils prennent un grand dévelopement numérique dans le système carbonifère. Aux sept espèces que M. de Koninck a d'abord fait connaître (3), M. Portlock en a ajouté une huitième et M. M'Coy quinze ou seize autres provenant toutes du calcaire carbonifère de l'Irlande (4). La présence des Entomostracés n'a pas encore été signalée dans le système carbonifère si étendu de la

---

(1) Décrites par M. Hisinger sous les noms de *C. balthica*, (*Leth. suecica*, p. 10, pl. 1, fig. 2, *a*, *c* et pl. 30, fig. 1.) et *C. phascolus*. (Ibid. p. 9, pl. 1, fig. 1, *a*, *b*.)

(2) Cette dernière sera bientôt décrite par M. Barande.

(3) Crutacés fossiles de Belgique 1841 et Descript. des anim. fossiles du terrain carb. de Belgique, 1843.

(4) Geol. report of Londonderry etc., p. 316. M. Portlock en décrit deux espèces, mais l'une me paraît identique avec la *Cythere Phillipsiana* de M. de Koninck.

(5) M'Coy. Syn. of the char. of the carb. limest. foss. of Ireland, 1844. Je ne crois pas que la création des genres *Entomoconchus* et *Bairdia* de M. M'Coy, soit bien fondée et que les espèces que l'auteur y classe présentent des caractères assez tranchés pour les séparer du genre *Cythere*. Je pense en outre que son *Entomoconchus Scouleri* (*Cythere Phillipsiana*, *d. K.*), son *Daphnia primæva* et ses *Cythere Hilberti*, *inflata*, *inornata* et *pusilla* ne sont que des variétés d'une même espèce. Ses *Cythere bituberculata*, *costata*, *cornuta*, *elongata*, *impressa*, *orbicularis*, *spinigera* et *trituberculata* appartiennent évidemment au genre *Cypridina*. Les *Bairdia curtus* et *gracilis* ne sont pas non plus faciles à distinguer l'un de l'autre.

Russie et la découverte de ces animaux reste encore à faire dans le système permien, dans le terrain triasique et dans les assises inférieures du terrain jurassique. Une seule espèce de *Cythere* est signalée dans les couches du système supérieur de ce dernier terrain. La formation Wealdienne renferme en Angleterre, d'après M. Sowerby, 4 espèces de *Cypris* et en Allemagne d'après M. Dunker 8 espèces, dont trois sont identiques avec des espèces Anglaises. On connait donc en tout 9 espèces de ce genre appartenant à ce système : parmi ces espèces la *C. Valdensis* est tellement abondante, qu'elle semble former presqu'exclusivement à elle seule des couches entières d'une grande étendue.

Jusqu'ici on ne connaissait encore que quinze espèces d'Entomostracés du terrain crétacé. Ces espèces dispersées dans les divers systèmes de ce terrain, ont été sucessivement décrites par MM. Roemer (1), Reuss (2) et Cornuel (3) ; vingt autres appartenant toutes au système supérieur de Maestricht et faisant l'objet de ce mémoire, viennent s'y ajouter.

Environ trente espèces de ces animaux dont les restes ont été enfouis dans divers systèmes du terrain tertiaire ont été décrites par par de Muenster (4) et par M. Roemer (5).

---

(1) *Die Versteinerungen des Norddeutschen Kreidegebirges.* 4°, 1841.

(2) *Die Versteinerungen der Bohmische Kreideformation.* 4° , 1845-1846.

(3) *Mémoires de la soc. géol. de France* , 2e série , tom. I , 2e partie , pag. 193, 4°, 1846.

(4) *Neues Jahrbuch für mineralogie von Leonhard u. Bronn.* 1830 , p. 60.

(5) *Ibid.* 1838, p. 516.

Août 1847.

OSTRACODES. LATREILLE.

Syn. Ostrapodes, Straus; Cyproïdes, Milne Edwards.

I. Genre CYTHERE. Latreille.

Monoculus. Müller. 1785. *Entomostraca.*
Cytheres sp. zu Münster. 1830. *Jahrbuch für Miner. etc., von* Leonhard *und* Bronn, page 62 et suivantes.
Cytherina. Lamarck. 1818. *Anim. sans vertèbres*, 1re *édit.* p. 125.
Cytherinæ sp. roemer. 1838. *Jahrbuch für Mineral. etc.*, p. 514—519.
— — roemer. 1840. *Versteinerungen des Norddeutschen Kreidegebirges*, p. 104—105.

Carapace de consistence cornée ou corneo-crétacée, composée de deux valves mobiles, inégales, oblongues, ovales ou réniformes, plus ou moins bombées et se fermant complètement. Le bord interne de la valve droite, qui est constamment plus petite, est relevée et s'engage dans le sillon marginal de la valve gauche. Ce mode d'engrenage est absolument semblable à celui d'une boîte à savonnette.

Le test des *Cythere*, qui sont marins, a la plus grande ressemblance avec celui des *Cypris*, qui ne vivent que dans les eaux douces, et comme aucun des naturalistes qui ont écrit sur les Entomostracés Ostracodes vivants et fossiles, n'indique de différence entre la carapace des *Cypris* et celle des *Cythere*, je crois utile de faire observer que je viens de reconnaître que dans la carapace des *Cypris* vivants aux environs de Maestricht et dans celle de la *Cypris faba*, Desmar., du calcaire d'eau douce d'OEningen en Suisse, c'est le bord externe de la valve droite qui recouvre celui de la valve gauche et que c'est par conséquent cette dernière qui est la plus petite.

1. cythere reniformis. *N. sp.*

Pl. I, Fig. 1, *a-f.*

Valves oblongues, réniformes, arrondies aux deux extrémités

et à surface lisse et luisante. Elles sont déprimées en avant et en arrière et un peu ventrues vers le milieu.

La carapace vue par l'extrémité antérieure présente un contour rhomboïdal.

Parmi le grand nombre d'échantillons que j'en ai trouvé, il y en a plusieurs qui sont d'un rouge purpurin, ce qui me paraît être un reste de la couleur qu'elles avaient pendant la vie de l'animal.

Rapports et différences. Cette espèce se rapproche un peu des *Cythere compressa*, zu Münster et *lœvis*, Roemer, du terrain tertiaire. Elle se distingue cependant facilement de toutes deux, par une compression beaucoup moins prononcée, et surtout par son contour réniforme.

Dimensions. Longueur 1 millimètre, hauteur 0,60 de millimètre et épaisseur 0,45 de millimètre.

Localités. Se rencontre fréquemment dans la craie de Maestricht, à St. Pierre, à Sichen, à Fauquemont et à Frère, près de Tongres.

2. CYTHERE TRUNCATA. *N. sp.*

Pl. I, Fig. 2, *a-e.*

Bouclier convexe-déprimé, formé de deux valves oblongues, lisses, à bord antérieur rétréci et obliquement tronqué; la surface tronquée est ovale-arrondie et applatie. Le bord postérieur est arrondi; le bord pectoral est droit, tandis que le bord dorsal est assez fortement arqué. La ligne de jonction des deux valves est linéaire, simple et sinueuse.

Le contour transversal de la carapace est sensiblement hexangulaire.

Rapports et différences. La *Cythere truncata* se distingue au premier coup-d'œil de la précédente, par sa troncature antérieure, par son bord pectoral droit et par son extrême petitesse.

Dimensions. Longueur 0,75 de millimètre, hauteur 0,50 de millimètre et épaisseur 0,30 de millimètre.

Local. Cette espèce est moins commune que la précédente et ne se trouve que dans l'étage supérieur de la montagne de St. Pierre. La *Cythere reniformis* paraît appartenir exclusivement à l'étage inférieur et accompagne constamment la *Thecidea radians*, Defrance, et l'*Apiocrinus ellipticus*, Miller.

3. cythere trigona. *N. sp.*

Pl. I, Fig. 3, *a-c.*

Cytherina subdeltoïdea? Münster. 1830. *Jahrb. für Mineral.* etc., pag. 64.
— — Roemer. *Ibid.*, 1838, p. 517, pl. 4, fig. 16.

Bouclier formé de deux valves ovales-trigones, lisses, comprimées aux extrémités et fortement bombées au milieu. La valve droite se termine supérieurement et la valve opposée inférieurement par une pointe émoussée en forme de bec. Les côtés pectoral et dorsal sont fortement arqués. Le contour transversal de la carapace est circulaire.

Rapp. et diff. La *Cytherina subdeltoïdea*, Münster, du terrain tertiaire d'Osnabruck, en Westphalie, diffère de notre espèce, parcequ'elle est plus allongée et plus déprimée, parce que son bord pectoral est droit et surtout parce qu'elle se termine en pointe des deux côtés.

Notre espèce nous paraît bien distincte aussi de la *Cytherina subdeltoïdea*, Roemer (1), du terrain crétacé de la Saxe. La figure citée représente la valve droite vue de profil ; cette valve dans notre espèce est beaucoup moins allongée, son bord pectoral beaucoup plus arqué et son bord antérieur terminé par un prolongement en forme de bec beaucoup moins pointu que celui qui se trouve au côté opposé de l'espèce de M. Roemer (2). Enfin cette dernière paraît être beaucoup plus petite que la nôtre, d'après le point qui indique sa grandeur naturelle.

Dimensions. Longueur 0,14 de millimètre, hauteur 1 millimètre et épaisseur 0,80 de millimètre.

Local. Se trouve assez communément dans la craie de Maestricht, à St Pierre, à Sichen, à Heer, à Fauquemont, et à Frère, près de Tongres.

---

(1) Verstein. des Norddeutsch. Kreidegebirg., p. 105, pl. 16, fig. 19.

(2) Cette figure représente la valve dans une position renversée, c'est-à-dire la partie supérieure en bas.

II. Genre. CYPRIDINA. Milne Edwards.

Cytheres spec. Münster. 1830. *Jahrb. f. Mineral. etc.* pag. 62 et suivantes.

Cytherinæ spec. Roemer. 1838. *Jahrb. f. Mineral. etc.* pag. 514—519.

Cypridina. Milne Edwards *apud* Lamarck. 1838. *Hist. natur. des anim. s. vert.*, nouvelle édition, tom. V, pag. 178.

— Milne Edwards. 1840. *Histoire natur. des Crustacés*, tom. III, p. 409.

Cytherinæ spec. Roemer. 1841. *Verstein. des Norddeutsch. Kreideg.* pag. 104—105.

Cytheres spec. Cornuel. 1846. *Descript. des Entom. foss. du Départ. de la Haute-Marne.* — (Mémoires de la société Géologique de France, 2me série, Tom. I, 2me partie, pag. 193—205.

Bouclier formé de deux valves oblongues, inégales, de consistence corneo-calcaire, mobiles, se fermant complètement et présentant vers leur partie moyenne et supérieure un tubercule correspondant à chacun des deux yeux de l'animal. Ces valves sont réunies sur leur bord dorsal par une charnière, formée sur la valve droite de deux dents écartées, dont l'antérieure est constamment plus grande que la postérieure. Ces deux dents sont reçues dans deux fossettes de la valve gauche. Le bord dorsal de celle-ci est très-étroit, droit, épais en avant, aboutit aux deux fossettes et s'engage dans un sillon du bord élargi de la valve opposée. Tout le reste du bord des valves est plus épais que leur partie centrale. La valve gauche est plus grande que la valve droite, et présente un rebord émoussé qui dépasse tout le bord pectoral antérieur et postérieur de cette dernière. L'on remarque au milieu du bord pectoral des deux valves, une lame saillante que M. Cornuel désigne par le nom de *lame pectorale;* au côté externe de cette lame, se trouve un sinus plus ou moins fortement prononcé suivant les espèces. La lame pectorale de la valve droite s'engage le plus souvent sous la lame pectorale de la valve opposée.

La région pectorale est constamment plus large que la région dorsale; quelquefois ces deux régions sont applaties et alors la cara-

pace représente quatre plans et offre une section transversale à contour tétragone. L'extrémité postérieure est constamment plus étroite que l'antérieure ; celle-ci est ordinairement comprimée, s'écarte un peu de l'axe longitudinal du test et se porte ou vers le côté pectoral, ou vers le côté dorsal. La ligne de jonction des valves est toujours sinueuse.

Chez plusieurs espèces la valve gauche présente à son bord dorsal deux oreillettes qui répondent aux deux fossettes cardinales de cette valve et souvent chacune de ces deux oreillettes est garnie à l'extérieur d'un tubercule qui parait produit par la pression exercée à l'intérieur par les dents cardinales de la valve opposée. Cette circonstance permet souvent de reconnaître qu'une carapace fermée dépend du genre *Cypridine*.

Les tubercules oculaires qui sont bien prononcés dans quelques espèces, sont peu marqués dans d'autres ; cependant la place de chaque œil est toujours indiquée à l'intérieur des valves par un enfoncement oval ou arrondi. Un peu en avant de cet enfoncement, l'on remarque un sillon, qui prend naissance tout près de la dent cardinale antérieure et qui s'arrête à une petite distance du bord pectoral, après s'être écarté un tant soit peu de l'impression oculaire.

Les carapaces des Cypridines des terrains argileux sont ordinairement transparentes et paraissent avoir perdu le plus souvent leurs couleurs, tandis que celles de la plupart des espèces du terrain crétacé des environs de Maestricht sont opaques et ont conservé des restes de la couleur qu'elles avaient pendant la vie des animaux.

Le genre Cypridine qui n'est représenté dans la nature vivante, que par une seule espèce de l'Océan indien, a de nombreux représentants à l'état fossile ; M. de Koninck en a décrit trois espèces du calcaire carbonifère de Visé ; j'en ai découvert quinze nouvelles dans la craie de Maestricht. Toutes les autres espèces, tant du terrain crétacé, que du terrain tertiaire, ont été confondues par les auteurs, dans le genre *Cythere*. Je puis citer entre autres les suivantes :

Cythere scrobiculata, *subovata*, *punctata*, *Mülleri*, *rugosa*, *plicata et fimbriata* de Münster. *Cytherina pertusa*, *striato-punctata*, *favosa*, *pustulosa*, *lineolata*, *costellata*, *Edwardsii*, *carinata*, *coronata*, *cornuta*, *triplicata*, *gibba* et *quadrilatera* de M. Roemer ainsi que les *Cythere Harpa*, *auriculata* et *sculpta* de M. Cornuel.

1. CYPRIDINA FUSIFORMIS. *N. sp.*

PL. I, FIG. 4, *a—f.*

Les valves vues de profil sont allongées en forme de fuseau, lisses, ventrues au milieu, comprimées aux extrémités et se terminent inférieurement en une pointe émoussée. Leur bord supérieur est arrondi, les bords pectoral et dorsal sont arqués. Ce dernier est légèrement sinueux. La ligne de jonction des valves est linéaire et simple.

Le bouclier vu de profil par l'extrémité antérieure, présente un contour sensiblement pentagonal. Vu du côté du dos et du côté pectoral il offre un contour rhomboïdal.

Dimensions. Elle a 0,8 de millimètre de longueur, 0,4 de millimètre de hauteur et 0,35 de millimètre d'épaisseur.

Local. Cette Cypridine est rare et se rencontre dans la craie de Sichen.

2. CYPRIDINA FAVRODIANA. *N. sp.*

PL. I, FIG. 5, *a—d.*

La carapace de cette espèce est formée de deux valves épaisses, oblongues-ellipsoïdales, lisses et très-fortement bombées. Elles sont arrondies supérieurement et terminées en arrière par une pointe obtuse, comprimée et en forme de bec. Le bord pectoral est légèrement sinueux, le bord dorsal présente vers sa partie supérieure une petite oreillette qui répond à la place occupée à l'intérieur par la dent cardinale antérieure. La place des yeux est obsolète à l'extérieur, mais elle est bien prononcée à l'intérieur des valves. La dent cardinale antérieure est arrondie, la postérieure est subquadrangulaire.

Le contour transversal de la carapace est en forme de cœur renversé. Vu du côté du dos elle offre un contour oval.

Je dédie cette espèce à M. Favrod de Fellens, amateur d'Histoire Naturelle à Maestricht, membre de plusieurs sociétés savantes et qui veut bien m'honorer de son amitié.

Dimensions. Longueur 0,11 de millimètre, hauteur 0,7 de millimètre et épaisseur 0,6 de millimètre.

Local. Elle est rare et se trouve dans le calcaire blanchâtre de l'étage inférieur du plateau de St Pierre.

3. Cypridina interrupta. *N. sp.*

Pl. II, Fig. 1, *a—d.*

Valves allongées-ellipsoïdales, enflées, déprimées au milieu, arrondies aux extrémités, plus larges en avant et à bords latéraux sinués. Leur surface trilobée est ornée de stries concentriques, enfoncées et assez régulièrement interrompues, et qui, en devenant plus profondes vers le côté pectoral donnent naissance à de petites côtes. Le tubercule de l'œil se trouve sur la partie antérieure du lobe moyen. Ce tubercule est lisse et quelquefois peu apparent; cependant dans les individus qui ont conservé des restes de leur couleur, la place des yeux est indiquée par un point blanc et luisant contrastant avec le reste de la surface, qui est d'un jaune foncé ou d'un brun-rougeâtre.

Le bouclier vu par l'extrémité antérieure offre un contour tétragone. Vu du côté du dos ou côté du ventre il présente un contour hexagone.

Dimensions. Longueur 0,9 de millim., hauteur $^1/_2$ millim. et épaisseur 0,45 de millimètre.

Local. Se trouve assez communément dans le calcaire de Sichen et dans l'étage inférieur du calcaire de Maestricht.

4. Cypridina roemeriana. *N. sp.*

Pl. II, Fig. 2, *a—f.*

Les valves de cette belle Cypridine sont ovales, sub-rhomboïdales, fortement ventrues et gibbeuses sur le côté pectoral. Leur bord antérieur est arrondi et déprimé; le postérieur est terminé par une dépression étroite, munie de trois dentelures courtes, élargies à la base et acuminées au sommet.

La surface est ornée de rides ou plutôt de petits bourrelets concentriques, plus forts vers le côté pectoral; l'un de ces bourrelets est bifurqué inférieurement; tous deviennent plus faibles vers les bords antérieur et dorsal et sont remplacés vers le milieu des valves par de très-petites granulations. Les tubercules oculaires sont granuleux, peu proéminents et obliquement triangulaires. Les bords valvaires sont légèrement saillants.

La carapace vue de profil par l'extrémité antérieure offre un con-

tour cordiforme. Vue du côté du dos ou du côté du ventre, elle présente un contour exactement oval.

Quelques valves ayant conservé leurs couleurs, sont d'un brun-rougeâtre, excepté la place des yeux qui est tout-à-fait blanche.

J'ai dédié cette espèce à M. Roemer qui s'est occupé avec talent des Entomostracés fossiles.

Rapports et différ. Cette espèce a quelque ressemblance avec la *Cypridina sculpta*, Cornuel (1). Elle en diffère par ses bourrelets concentriques plus forts, par les granulations qui ornent la partie médiane des valves et par les trois petites dentelures dont chaque valve est munie postérieurement.

Dimensions. Longueur 0,8 de millim., hauteur 0,45 de millim. et épaisseur 0,55 de millimètre.

Local. Cette espèce n'est pas rare dans la craie de Sichen, ainsi que dans celle du plateau de St Pierre.

5. CYPRIDINA FURCIFERA. *N. sp.*

Pl. II, Fig. 3, *a—d.*

Valves oblongues, sub-rhomboïdales, fortement enflées et comme vésiculeuses au côté pectoral. Leur bord dorsal est bisinué ; le bord pectoral est arqué, le bord antérieur est arrondi et marginé d'un rebord lisse et applati, le bord postérieur est déprimé et muni de quatre à cinq dentelures inégales et acuminées. Toute la surface est lisse et luisante ; mais elle est ornée de trois petites côtes inégales en longueur et dont la médiane se bifurque vers la partie moyenne de chaque valve. C'est entre cette bifurcation que se trouve la place des yeux. Les bords des valves sont marginés antérieurement et le long du bord dorsal d'un rebord applati.

La carapace vue par l'extrémité antérieure a un aspect cordiforme.

Quelquefois elle a conservé des traces de ses couleurs et alors la partie comprimée des extrémités est d'un jaune-foncé ou d'un jaune-orangé ; tandis que le reste de la surface est d'un blanc-de-lait.

Dimensions. Cette espèce a 0,05 de millimètre de longueur, 0,6

---

(1) Mémoire de la Soc. géol. de France, 2e série, T. I, 2e partie, p. 201, pl. 8, fig. 20—23.

de millim. de hauteur et 0,6 de millim. d'épaisseur à l'endroit où les valves sont les plus enflées.

Local. Maestricht et Sichen. Elle est très-rare.

6. CYPRIDINA FÖRSTERIANA. *N. sp.*

Pl. II, Fig. 2, *a—d.*

Les valves de cette espèce vues de profil sont allongées, rhomboïdales et leurs bords latéraux sont sinués. Elles sont plus larges en avant et marginées d'un rebord lisse et applati. Elles se terminent en arrière par une compression triangulaire, oblique à l'axe du test et obtuse. Leur surface lisse est divisée en trois lobes par deux sillons assez larges. Le lobe le plus rapproché du côté pectoral est arrondi, enflé et beaucoup plus large et plus épais que les deux autres. Le bord antérieur et la plus grande partie du bord dorsal sont applatis. Sur la valve gauche, tout près du bord dorsal, l'on apperçoit deux tubercules distants dont la place repond exactement à celle qu'occupent à l'intérieur les deux dents cardinales.

Le contour transversal du bouclier est d'une forme tetragone.

Quelques individus ont les deux extrémités d'un brun-foncé.

Rapport et différ. La *Cypridina triplacata*, Roemer (1), diffère de celle-ci parcequ'elle n'a qu'un seul sillon au milieu de chacune de ses valves et parceque ses bords latéraux ne sont pas sinués.

Je me fais un véritable plaisir de dédier cette espèce à M. Förster, professeur d'Histoire Naturelle, à Aix-la-Chapelle, dont les travaux entomologiques sont depuis longtemps appréciés par le monde scientifique.

Dimensions. Longueur 0,8 de millim., hauteur 0,45 de millim. et épaisseur égale à sa hauteur.

Local. Elle se trouve dans les mêmes localités que l'espèce précédente; elle est aussi très-rare.

7. CYPRIDINA PULCHELLA. *N. sp.*

Pl. II, fig. 5, *a-d.*

Carapace formée de deux valves oblongues, rhomboïdales et à bords sinués. Ces valves sont entourées en avant d'un rebord ap-

(1) Verstein. des Norddeutsch. Kreidegeb., p. 104, pl. 16, fig. 16.

plati, dont la surface est ornée de quelques points enfoncés, oblongs et rayonnants; le bord lui-même est garni de quatre à cinq dentelures courtes; elles se terminent inférieurement par une partie comprimée, subtrigone et munie de trois à quatre dentelures, plus longues que celles du bord antérieur. La surface de chaque valve est divisée en trois lobes, par deux sillons flexueux, profonds et ponctués sur leurs bords. Le lobe du côté pectoral qui est le plus large et le plus épais, porte inférieurement une dent aigue; il est orné de deux lignes très-étroites, peu profondes et que l'on n'aperçoit qu'à l'aide d'un instrument fortement grossissant. Le lobe du côté dorsal est lisse et géniculé au milieu. Le bouclier vu de profil par l'extrémité antérieure offre un contour sexlobé et subtrigone. La région pectorale est lisse; vue de profil elle est cordiforme subsagittée. La région dorsale est applatie, élargie vers son tiers antérieur et tronquée postérieurement. Sa surface offre, en avant quatre sillons obliques et en arrière six points creux, disposés en deux séries, à peu près parallèles à la ligne de jonction des valves.

Parmi les individus que j'ai trouvés, quelques-uns ont la partie comprimée des extrémités d'un jaune orangé.

Dimensions. Longueur, 0,8 de millimètre, hauteur 0,45 de millimètre et épaisseur 0,5 de millimètre.

Local. Cette élégante espèce se trouve dans la craie de Sichen, de Maestricht et de Fauquemont.

8. CYPRIDINA ELEGANS. *N. sp.*

Pl. III, fig. 1, *a-d.*

Les valves vues de profil ont une forme allongée, subrhomboïdale; leurs bords latéraux sont sinués. Elles sont marginées en avant d'un rebord applati, arrondi, obscurement ponctué, et garni de 8-9 dentelures courtes et aigues. Elles sont terminées inférieurement par une compression subquadrangulaire, munie de quatre dents obtuses, plus longues et plus fortes que celles du bord antérieur. La surface intermédiaire est divisée en trois lobes lisses, par deux sillons, dont l'un est droit et orné de points creux nombreux, tandis que l'autre est arqué et orné de rides transversales dans sa moitié inférieure. Deux de ces lobes portent inférieurement une petite dent très-aigue.

Le bouclier présente un contour transversal subdeltoïde, sexlobé. Vu de profil du côté pectoral, il est sagitté-subcordiforme.

La région dorsale est beaucoup plus étroite que dans la précédente espèce, un peu élargie vers son tiers antérieur, tronquée postérieurement et ornée d'une douzaine de lignes creuses et transversales, disposées sur deux rangs de chaque côté de la suture.

Quand elle a conservé ses couleurs, ses extrémités applaties sont d'un orangé foncé.

Dimensions. Longueur 0,9 de millimètre, hauteur et épaisseur 0,5 de millimètre.

Local. Cette charmante Cypridine n'est pas rare dans la craie de Sichen.

9. Cypridina auricularis. *N. sp.*

Pl. III, fig. 2, *a-d.*

Les valves de cette singulière espèce, qui est la plus petite du genre, sont applaties, oblongues-ellipsoïdales, à bords latéraux sinués. Elles sont arrondies en avant et terminées en arrière par une partie comprimée étroite, subtrigone, oblique et obtuse. Leur surface lisse est ornée d'un bourrelet flexueux, dont la forme rappelle assez bien le contour d'une oreille humaine.

Le bouclier vu de profil du côté antérieur est d'une forme hexagonale.

Vu du côté pectoral, il présente le long du bord valvaire un rebord large et subéquilatéral, qui égale en largeur la région dorsale.

Dimensions. Longueur 0,7 de millimètre, hauteur 0,4 de millimètre et épaisseur 0,25 de millimètre.

Local. Elle est fort rare; je n'en ai recueilli que trois individus bivalves. Elle se trouve dans la craie de Sichen.

10. Cypridina macrophthalma. *N. sp.*

Pl. III, fig. 3, *a-d.*

Valves déprimées, d'une forme obovale, à bords latéraux sinués, plus larges et obliquement tronquées en avant et terminées inférieurement par une partie comprimée subtrigone et doublement tronquée. Les tubercules correspondants à la place des yeux sont grands, proéminents et ovales-oblongs. Toute la surface est lisse

et présente dans sa moitié inférieure un bourrelet oblong, moins gros que le tubercule oculaire et ayant à-peu-près la même direction que celui-ci; chaque valve offre, en outre, du côté pectoral une carène obtuse, longitudinale et terminée inférieurement par une petite proéminence aigue.

Le bouclier, vu du profil par l'extrémité antérieure, présente un contour subtrigone. Vu du côté pectoral, il offre un contour oval-lancéolé.

Le long du bord dorsal, le bouclier, offre une surface applatie, lisse, rétrécie vers le milieu et élargie en arrière.

Quelques individus présentent, près du bord pectoral, une grande tache rose. Une tache de même couleur, mais beaucoup plus petite se remarque près du bord antérieur.

Longueur 0,85 de millimètre, hauteur et épaisseur 0,55 de millimètre.

Local. Cette espèce se trouve dans la craie de Sichen et y est très-rare.

11. CYPRIDINA HIEROGLYPHICA. *N. sp.*

Pl. III, fig. 4, *a-d.*

Valves déprimées, oblongues-ellipsoïdales, à bords latéraux presque droits, marginées en avant d'un rebord applati, arrondi-retus et muni au côté interne d'une série de points creux et à son bord extérieur de 12-14 dentelures très-petites, aigues et courtes; ces valves sont terminées inférieurement par une partie comprimée, doublement tronquée, subtrigone, oblique, obtuse et munie d'un côté de six dentelures pointues et égales en grandeur à celles du bord antérieur. Les tubercules oculaires sont grands, orbiculaires et lisses. La surface est élégamment ornée de sillons ponctués, flexueux et profonds, qui dessinent deux lobes, dont le plus rapproché du bord pectoral constitue un bourrelet étroit, élargi au milieu, qui a son origine près du bord antérieur et qui est muni inférieurement d'une dent triangulaire; l'autre lobe plus court et plus large est formé de trois bourrelets, prenant naissance un peu en dessous du tubercule oculaire. Le bourrelet médian s'arrête à une petite distance du bord inférieur du lobe et est nettement séparé par deux sillons ponctués des deux bourrelets latéraux réunis à leur base. Ce lobe est dentelé à son bord inférieur; deux de

ses dentelures seulement sont bien prononcées, les autres sont obsolètes.

La carapace de cette jolie espèce, vue par l'extrémité antérieure, présente un contour pentagonal. Vue du côté du ventre, elle est lisse et en forme de cœur allongé.

La région dorsale est applatie, tronquée subtrilobée postérieurement; sa surface est ornée dans la moitié inférieure de 12-14 points creux, oblongs, obliques et disposés sur deux rangs, parallèles à la ligne de jonction des valves.

Dimensions. Longueur 0,9 de millimètre, hauteur et épaisseur 0,5 millimètre.

Local. Cette intéressante Cypridine est extrêmement rare dans la craie de Sichen et dans celle de la montagne de St.-Pierre. Je n'en possède encore qu'un très-petit nombre d'échantillons.

12. CYPRIDINA KONINCKIANA. *N. sp.*

Pl. III, Fig. 5, *a–f.*

Les valves de cette espèce sont oblongues-ellipsoïdales, fortement convexes, leur bord pectoral est légèrement arqué, le bord dorsal est sinueux. Elles sont arrondies, un peu élargies en avant et marginées d'un rebord applati, étroit et lisse. Elles sont terminées en arrière par une compression arrondie, subtrigone, oblique à l'axe longitudinal du test et munie d'un côté de quatre dentelures. Chaque valve porte vers le côté pectoral une carène peu saillante et arquée, qui sépare la région latérale de la région pectorale et se termine inférieurement par une dent aigue. A la même hauteur, mais tout près du bord dorsal, l'on remarque deux autres dentelures, semblables à celle qui termine la carène. Toute la surface est ornée de points creux, nombreux et anguleux. Les tubercules oculaires sont pointillés, plus petits et moins proéminents que dans l'espèce précédente. A côté des tubercules oculaires, tout près du bord dorsal l'on remarque une dépression triangulaire oblique.

Le bouclier, vu de profil par l'extrémité antérieur, présente un contour trigone.

La région pectorale est ovale-subsagittiforme et ornée d'un grand nombre de points creux, allongés et disposés dans le sens longitudinal et les bords de la suture sont marginés d'un rebord applati, lisse en avant et sillonné en arrière.

La région dorsale est applatie, élargie en avant, tronquée en arrière et ornée de deux rangées longitudinales de points creux et obliques.

Je n'ai pas encore rencontré des individus qui aient conservé des restes de leurs couleurs.

Rapp. et différ. Cette espèce a des rapports avec la *Cypridina gibba* Roemer (1), du terrain tertiaire des environs de Paris, mais elle s'en distingue par différents caractères.

J'ai dédié cette espèce à M. de Koninck, professeur de chimie et de paléontologie à l'Université de Liége, auteur du bel ouvrage sur les animaux fossiles du terrain carbonifère de Belgique, qui veut bien m'honorer de son amitié et mettre à ma disposition les ouvrages de sa riche bibliothèque.

Dimensions. Longueur 1 millimètre, hauteur 0,6 de millimètre et épaisseur 0,65 de millimètre.

Local. Cette espèce est assez rare et n'a encore été rencontrée que dans le calcaire blanchâtre de l'étage inférieur de la montagne de St.-Pierre.

13. CYPRIDINA ALATA. *N. sp.*

Pl. IV, Fig. 1, *a-d.*

Valves ovales-allongées, arrondies, élargies et comme tronquées obliquement en avant; rétrécies et terminées en arrière par une compression subtrigone, arrondie et munie de trois petites dents rapprochées et obtuses. Toute leur surface est lisse et ornée d'une forte carène aigue, un peu arquée et surmontée d'une aile acuminée inférieurement. Le long des bords de l'aile qui surmonte la carène, l'on remarque deux à trois points creux et oblongs. Les tubercules oculaires sont peu marqués. La carapace, vue de profil par l'extrémité antérieur, offre un contour triangulaire. La région pectorale, vue de profil, est sagittiforme.

Le bord antérieur seul est parfois d'un beau jaune-orangé, tandis que le reste de la surface est d'un blanc-laiteux.

Rapp. et différ. Cette espèce a des rapports de forme avec la *Cypridina cornuta*, Roemer (2), du terrain tertiaire de Paris;

(1) Roemer. Neues Jahrb. von Leonh. und Bronn. 1838, pag. 519, pl. 6, fig. 52.
(2) Neues Jahrb. von Leonhard u. Bronn, 1838, p. 518, pl. 6, fig. 51.

celle-ci cependant se distingue de la nôtre en ce que l'aile de sa carène ainsi que son bord antérieur sont dentelés.

Dimensions. Longueur 1,10 de millimètre, hauteur 0,7 de millimètre et épaisseur 1,2 de millimètres avec l'aile.

Local. Elle est rare dans le calcaire blanchâtre de la montagne de St.-Pierre et dans celui de Sichen.

14. CYPRIDINA SERRULATA *N. sp.*

Pl. IV, Fig. 2, *a-d.*

Les valves, vues de profil, sont allongées-ellipsoïdales, leur bord pectoral est droit, le bord dorsal présente supérieurement une oreillette et inférieurement une dent aigue. Elles sont arrondies en avant et munies de 5-6 dentelures larges et tronquées au sommet, elles sont plus étroites, en arrière et terminées par une partie comprimée subquadrangulaire et munie de 5 dents rapprochées, tronquées et assez semblables à celles du bord antérieur. Leur surface lisse est ornée d'une carène surmontée d'une crête serrulée des deux côtés et terminée inférieurement par deux dents. Les tubercules oculaires sont ovales arrondis, lisses et mucronés.

La carapace, vue de profil par l'extrémité antérieure, présente un contour deltoïde.

La région pectorale est sagittiforme et applatie. La région dorsale est étroite, lisse, dilatée et anguleuse des deux côtés à l'endroit qui correspond à la place occupée à l'intérieur par la dent cardinale antérieure, rétrécie au milieu, dilatée de nouveau en arrière et tronquée subtrilobée inférieurement.

Cette espèce a parfois conservé ses couleurs; alors ses valves sont d'un rouge-incarnat sur leurs bords, le bord dorsal ou cardinal seul excepté.

Dimensions. Longueur 1,10 de millimètre, hauteur 0,55 de millimètre et épaisseur 0,8 de millimètre.

Local. Se trouve dans les mêmes localités que l'espèce précédente. Elle est très-rare.

15. CYPRIDINA ORNATA. *N. sp.*

Pl. IV, Fig. 3, *a-f.*

Les valves de cette charmante espèce sont oblongues-ellipsoïdales et leurs bords latéraux sont presque droits. Elles sont arrondies en avant et marginées d'un rebord applati, lisse et muni à son bord d'un grand nombre de petites dentelures presque cétacées; elles sont terminées inférieurement, par une partie comprimée doublement tronquée, portant 8-9 dents très-pointues, divariquées et beaucoup plus grandes que celles du bord antérieur.

Une carène aigue et droite, surmontée d'une crête assez large et serrulée des deux côtés, prend naissance près du rebord applati antérieur, se dirige en arrière et se termine brusquement vers le quart inférieur de la longueur totale de l'individu. Cette carène sépare la région pectorale de la région latérale. Toute la surface latérale est ornée de points creux et arrondis, et est divisée dans sa moitié inférieure en deux lobes qui se terminent à la même hauteur où se termine aussi la carène. L'un de ces lobes porte inférieurement une seule dent, l'autre en offre sept, qui sont marginales, assez longues et acuminées. Le tubercule de l'œil est oval-oblique, pointu et parsemé de points creux et très-petits. A côté du tubercule oculaire et tout près du bord dorsal, l'on remarque une dépression triangulaire oblique.

Le bouclier, vu de profil par l'extrémité antérieure, présente un contour tétragone-deltoïde.

La région pectorale est hexangulaire sub-sagittiforme et ornée de chaque côté d'une série de points creux, profonds, et disposés parallèlement aux bords de la carène.

Le long du bord pectoral et antérieur les valves sont marginées d'un rebord applati et sillonné longitudinalement, dilaté au milieu, c'est-à-dire à l'endroit du sinus pectoral.

La région dorsale est assez large et applatie. Sa plus grande largeur est vers son tiers antérieur; vers son milieu elle est rétrécie et en arrière elle est tronquée-subtrilobée. Sa surface est ornée de quatre rangées de points creux et vers son tiers antérieur ses deux bords latéraux descendent vers la partie antérieure des tubercules oculaires, s'arrêtent brusquement à une petite distance de ceux-ci, en donnant naissance à la dépression triangulaire,

oblique, que l'on remarque en cet endroit, sur la face latérale des deux valves.

Parfois les valves ont conservé la couleur qu'elles avaient pendant la vie de l'animal et sont d'un rose-purpurin clair.

Dimensions. Longueur 1 millimètre, hauteur 0,6 de millimètre et épaisseur égale à la hauteur.

Local. Cette espèce qui est la plus jolie du genre est moins rare que les trois espèces précédentes et se trouve dans les couches de calcaire blanchâtre du plateau de St.-Pierre, ainsi qu'à Sichen et à Frère, près de Tongres.

III. Genre. CYPRELLA. De Koninck.

Synon. Gener. Cyprella. 1841. *Mémoire sur les crustacés foss. de Belgique.* p. 19.

— 1844. *Description des anim. foss. du terr. carb. de Belgique.* p. 589.

Carapace bivalve, acuminée inférieurement, et munie supérieurement d'un prolongement en forme de bec, qui présente d'un côté une ouverture triangulaire. Deux tubercules oculaires situés un peu en avant de la partie moyenne de chaque valve. Le bord dorsal intérieur est élargi et muni d'une charnière formée sur la valve droite de deux dents, l'une triangulaire oblique, située au milieu du bord dorsal, l'autre entièrement postérieure et quadrangulaire, reçues dans deux fossettes de la valve opposée. Le bord dorsal de la valve gauche est atténué et s'engage sous le bord de la valve correspondante. C'est, au contraire, le bord pectoral atténué de la valve gauche, qui s'engage dans un sillon du bord correspondant et élargi de la valve droite.

Ce genre diffère essentiellement du précédent, par l'échancrure angulaire de la partie supérieure de chaque valve, qui par la réunion de ces valves prend une forme sémilunaire, ainsi que par la position et la conformation de la charnière. A l'intérieur des valves l'on trouve encore une autre différence, qui ne me paraît pas être de peu d'importance; c'est le sillon arqué que l'on remarque un peu en avant de la place des yeux chez toutes les espèces du genre *Cypridina*, et qui, chez les *Cyprella*, manque totalement, je pense que cette différence ne peut avoir été qu'en rapport avec une organi-

sation différente des animaux qui appartenaient à chacune de ces deux coupes génériques.

L'on ne connaissait jusqu'à présent qu'une seule espèce de Cyprelle, qui a été trouvée dans le calcaire carbonifère de Visé (Belgique). J'en ai découvert deux espèces nouvelles, mais beaucoup plus petites, sur lesquelles néanmoins j'ai eu occasion d'observer la charnière qui était encore inconnue.

1. CYPRELLA OVULATA. *N. sp.*

Pl. IV, Fig. 4, *a-c.*

Carapace formée de deux valves ovales, fortement bombées, munies supérieurement d'un rostre fort court et terminées en arrière par une pointe très-petite et très-courte. Leur surface est ornée de points nombreux arrondis, creux; peu profonds, d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés de la partie médiane des valves et disparaissant entièrement sur leurs bords latéraux.

La place des yeux est orbiculaire, grande et ornée de points allongés, disposés en lignes interrompues, flexueuses et anguleuses.

Dimensions. Cette espèce a deux millimètres de longueur, 1,4 millimètres de hauteur et 1,2 millimètres d'épaisseur.

Local. Cette belle *Cyprella* est très-fragile et extrêmement rare dans la craie blanchâtre de la montagne de St.-Pierre et dans celle de Sichen.

2. CYPRELLA KONINCKIANA. *N. sp.*

Pl. IV, Fig. 5, *a*, *b*, *c.*

Les valves de cette espèce sont oblongues-ovales, leur prolongement supérieur est aigu et la pointe qui les termine inférieurement est acuminée. Elles présentent sur leurs bords latéraux deux sinus, dont celui du côté pectoral se trouve dans le tiers antérieur et dont l'autre est situé vers le tiers postérieur. La place des yeux est, comme dans la précédente, ornée de points, disposés en lignes flexueuses et anguleuses. La partie inférieure de chaque valve est ornée de points oblongs, très-nombreux, rapprochés et rayonnants, leurs bords latéraux, ainsi que les bords des tubercules oculaires sont lisses.

Rapp. et différ. Le bouclier des espèces qui composent ce genre est très-fragile et formé de deux couches distinctes; l'extérieure de ces couches, qui est celle qui porte les ornements, manque souvent, et alors elles sont parfaitement lisses; aussi, avant d'avoir découvert des valves complètes de celle-ci, je l'avais confondue avec la *Cyprella ovulata*, dont elle est cependant bien évidemment distincte.

Elle est constamment plus petite que la *Cyprella ovulata* et n'a que 1,2 millimètres de longueur et 0,7 de millimètres de hauteur.

Je la dédie à M. de Koninck, qui a créé le genre auquel elle appartient.

Local. Cette *Cyprella* est très-rare et se trouve dans les couches crayeuses de Sichen.

EXPLICATION DES PLANCHES.

Planche I.

Fig. 1. *Cythere reniformis.* Bosquet. — $^{28}/_{1}$ de la grandeur naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Valve droite vue en dedans.
- *c.* Valve gauche vue en dedans.
- *d.* Carapace entière vue du côté du dos.
- *e.* La même vue par l'extrémité antérieure pour en montrer le contour transversal.
- *f.* Section transversale des valves.

Fig. 2. *Cythere truncata.* Bosq. — $^{37,3}/_{1}$ de la grandeur naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Valve droite vue en dedans.
- *c.* Valve gauche vue en dedans.
- *d.* Carapace vue du côté du dos.
- *e.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 3. *Cythere trigona.* Bosq. — $^{20}/_{1}$ de la grandeur naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Valve droite vue en dedans.
- *c.* Valve gauche vue en dedans.
- *d.* Carapace vue du côté du dos.
- *e.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 4. *Cypridina fusiformis.* Bosq. — $^{35}/_{1}$ de la grandeur naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Individu entier vu du côté du dos.
- *c.* Valve droite vue en dedans.
- *d.* Valve gauche vue en dedans.
- *e.* Individu entier vu du côté du ventre.
- *f.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 5. *Cypridina Favrodiana.* Bosq. — $^{25,5}/_{1}$ de la grand. naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Carapace entière vue du côté du dos.
- *c.* La même vue du côté pectoral.
- *d.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Planche II.

Fig. 1. *Cypridina interrupta.* Bosq. — $^{31}/_{1}$ de la grand. naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Carapace entière vue du côté du dos.
- *c.* La même vue du côté pectoral.
- *d.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 2. *Cypridina Roemeriana.* Bosq. — $^{35}/_{1}$ de la grand. naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Carapace entière vue du côté du dos.
- *c.* Valve droite vue en dedans.
- *d.* Valve gauche vue en dedans.
- *e.* Carapace entière vue du côté pectoral.
- *f.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 3. *Cypridina furcifera.* Bosq. — $^{27,5}/_{1}$ de la grand. naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Carapace entière vue du côté du dos.
- *c.* La même vue du côté pectoral.
- *d.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 4. *Cypridina Försteriana.* Bosq. — $^{35}/_{1}$ de la grand. naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Carapace vue du côté du dos.
- *c.* La même vue du côté pectoral.
- *d.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 5. *Cypridina pulchella.* Bosq. — $^{35}/_{1}$ de la grand. naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Carapace vue du côté du dos.
- *c.* La même vue du côté pectoral.
- *d.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Planche III.

Fig. 1. *Cypridina elegans.* Bosq. — $^{31,5}/_{1}$ de la grand. naturelle.
- *a.* Valve gauche vue en dessus.
- *b.* Carapace vue du côté du dos.
- *c.* La même vue du côté pectoral.
- *d.* La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 2. *Cypridina auricularis*. Bosq. — $^{40}/_{1}$ de la grand. naturelle.
a. Valve gauche vue en dessus.
b. Carapace vue du côté du dos.
c. La même vue du côté pectoral.
d. La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 3. *Cypridina macrophthalma*. Bosq. — $^{33}/_{1}$ de la grand. natur.
a. Valve gauche vue en dessus.
b. Carapace vue du côté du dos.
c. La même vue du côté pectoral.
d. La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 4. *Cypridina hieroglyphica*. Bosq. — $^{31,1}/_{1}$ de la grand. natur.
a. Valve gauche vue en dessus.
b. Carapace vue du côté du dos.
c. La même vue du côté pectoral.
d. La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 5. *Cypridina Koninckiana*. Bosq. — $^{28}/_{1}$ de la grand. natur.
a. Valve gauche vue en dessus.
b. Carapace vue du côté du dos.
c. Valve droite vue en dedans.
d. Valve gauche vue en dedans.
e. Carapace vue du côté pectoral.
f. La même vue par l'extrémité antérieure.

Planche IV.

Fig. 1. *Cypridina alata*. Bosq. — $^{25,5}/_{1}$ de la grand. naturelle.
a. Valve gauche vue en dessus.
b. Carapace vue du côté du dos.
c. La même vue du côté pectoral.
d. La même vue par l'extrémité antérieure.

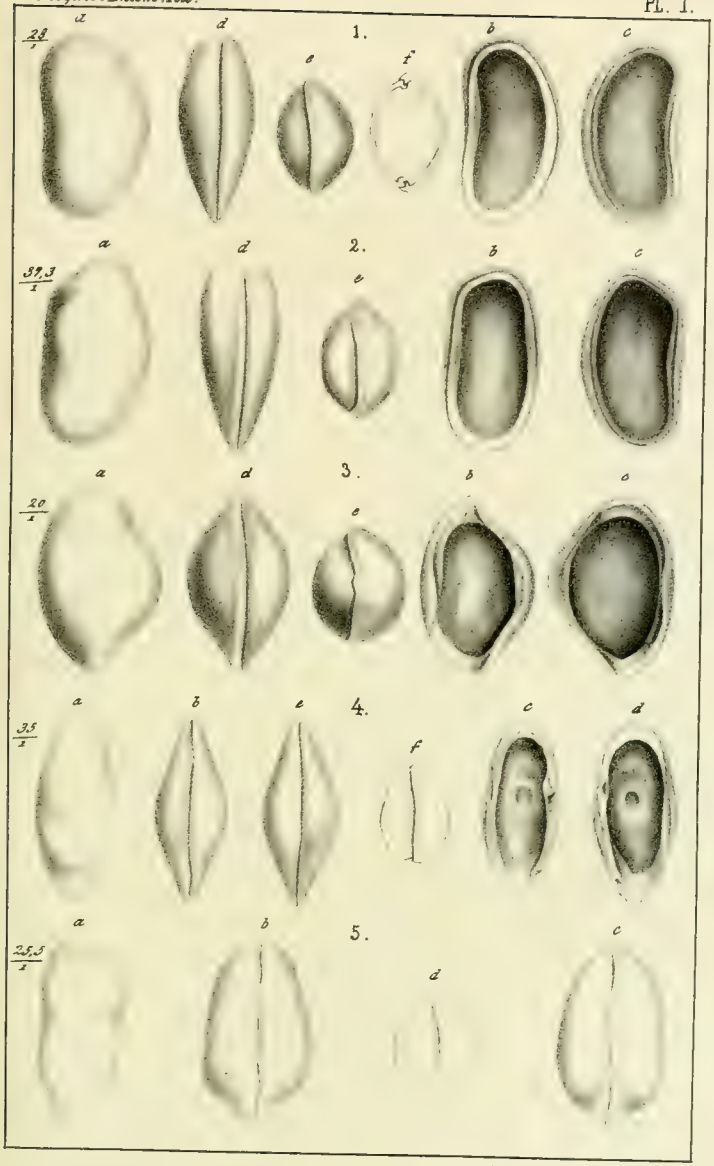
Fig. 2. *Cypridina serrulata*. Bosq. — $^{25,5}/_{1}$ de la grand. naturelle.
a. Valve gauche vue en dessus.
b. Carapace vue du côté du dos.
c. La même vue du côté pectoral.
d. La même vue par l'extrémité antérieure.

Fig. 3. *Cypridina ornata*. Bosq. — $^{28}/_{1}$ de la grand. naturelle.
a. Valve gauche vue en dessus.
b. Carapace vue du côté du dos.

c. Valve droite vue du même côté.
d. Valve gauche vue en dedans.
e. Carapace vue du côté pectoral.
f. La même vue par l'extrémité antérieure.

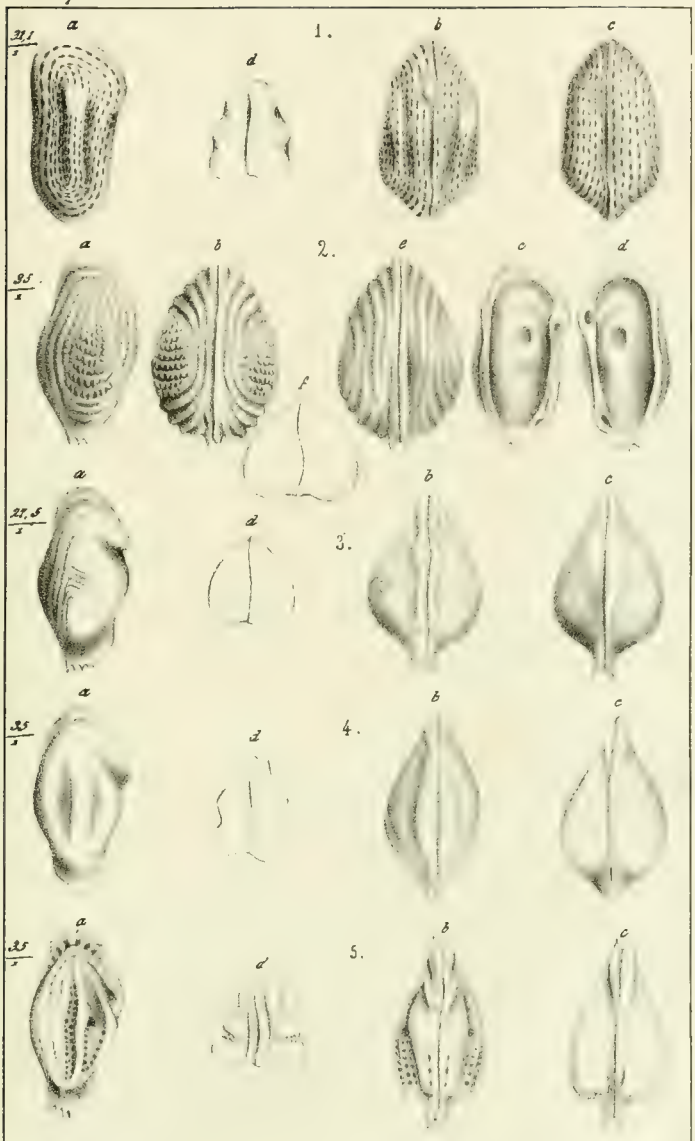
Fig. 4. *Cyprella ovulata.* Bosq. — $^{14}/_{1}$ de la grand. naturelle.
a. Valve gauche vue de profil.
b. Carapace entière vue du côté du dos.
c. La même vue du côté pectoral.

Fig. 5. *Cyprella Koninckiana.* Bosq. — $^{15}/_{1}$ de la grand. natur.
a. Valve gauche vue de profil.
b. Valve droite vue en dedans.
c. Valve gauche vue en dedans.



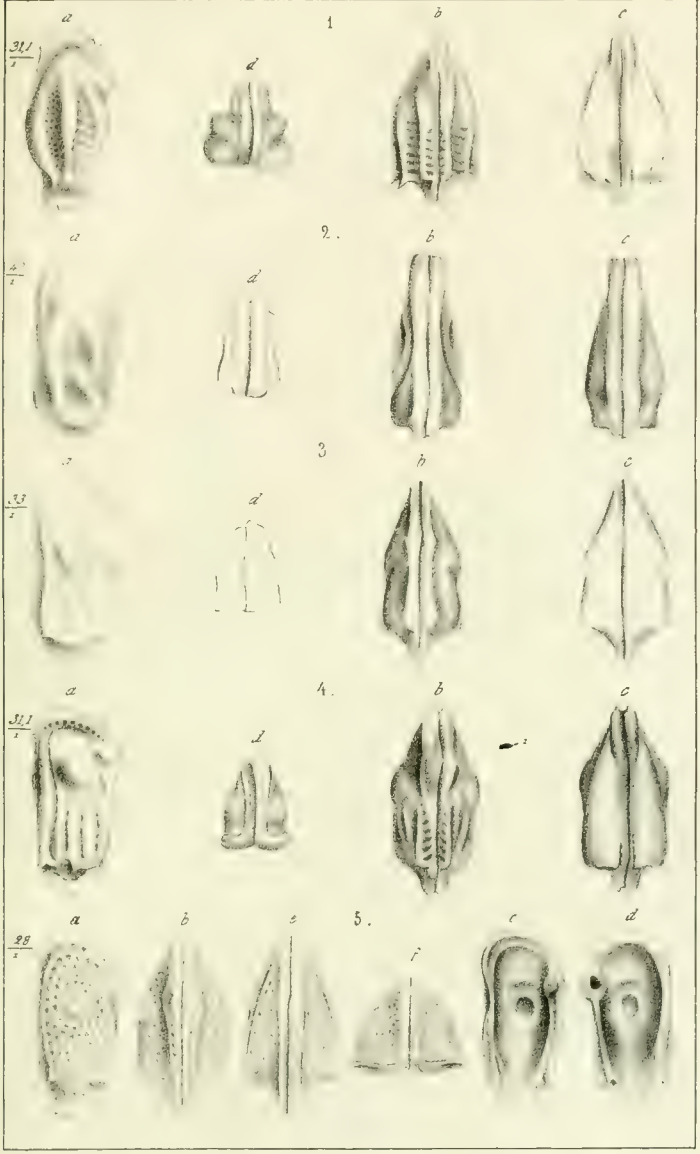
Bosquet ad nat. delin.

Fig. 1. Cythere reniformis. Bosquet
Fig. 2. —— truncata. Bosq.
Fig. 3. Cythere trigona [illegible]
Fig. 4. Cytheridina fusi[illegible]
Fig. 5. Cytheridina [illegible] Bosquet



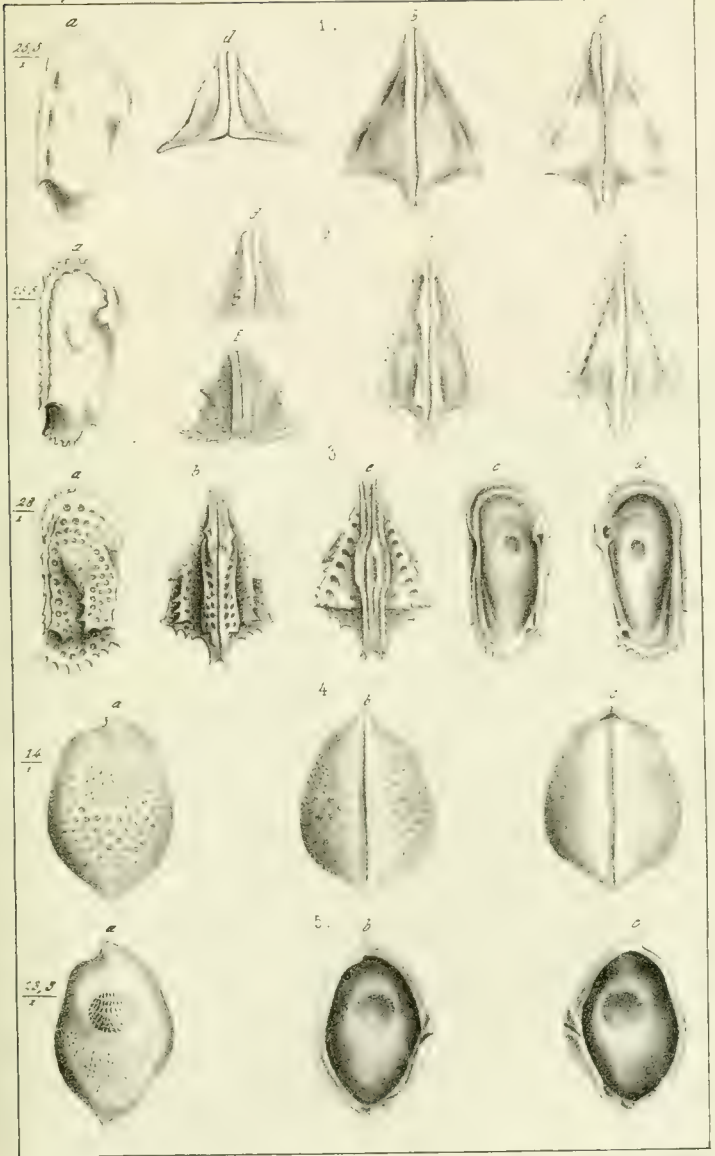
Bosquet ad nat. delin.

Fig. 1 Cypridina interrupta. Bosquet | Fig. 3 Cypridina furcifera Bosq.
Fig. 2. —— Roemeriana Bosq. | Fig. 4 —— Försteriana Bosq.
Fig. 5. Cypridina pulchella. Bosquet



Bosquet ad nat. delin.

Fig. 2. Cypridina elegans. Bosquet. | Fig. 3. Cypridina macrophthalma. Bosq.
—— auricularis. Bosq. | Fig. 4. —— hieroglyphica. Bosq.
Fig. 5. Cypridina Koninckiana. Bosquet.



Bosquet ad nat. delin.

Fig. 1. Cypridina alata. Bosquet
Fig. 2. — — serrulata. Bosc
Fig. 5. Cyprella Konnnckiana. Bosquet

IX. — *Transformation du principe des moments en celui des vitesses virtuelles, et note sur une construction géométrique de la surface d'élasticité.*

PAR

J. B. BRASSEUR,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Définition du moment virtuel d'une force. — Si, sans changer la position d'une force, on fait décrire à son point d'application un chemin infiniment petit et par suite rectiligne, le produit de la force par la projection de ce chemin sur la direction primitive de cette force s'appelle moment virtuel de la force proposée.

Le moment virtuel est considéré comme positif ou négatif, selon que la projection tombe sur la force même ou sur son prolongement. Cela posé, le principe des vitesses virtuelles peut s'énoncer de la manière suivante :

Énoncé du principe des vitesses virtuelles. — Si un système de forces appliquées à des points matériels invariablement liés entre eux est en équilibre et que, laissant les forces dans leurs positions, on imprime au système des points matériels un mouvement infiniment petit qui ne détruise pas la liaison de ces points, la somme des moments virtuels de toutes ces forces sera nulle.

Nous allons démontrer, pour des forces situées dans un même plan, que ce principe n'est qu'une transformation de celui des moments ordinaires, et nous indiquerons la démonstration pour des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.

Supposons d'abord que le mouvement imprimé au système des points matériels soit un mouvement de rotation autour d'un centre quelconque O et que le mouvement soit assez petit pour que les arcs décrits par les points d'application des forces puissent être considérés comme de petites lignes droites ; représentons par

P, P′, P″, etc. les forces données ;

m, m', m'', etc. les points d'application des forces ;

r, r', r'', etc. les rayons vecteurs des points d'application par rapport au centre 0 ;

b, b', b'', etc. les bras de leviers des forces par rapport au centre 0 ;

α, α', α'', etc. les angles que font les bras de levier avec les rayons vecteurs.

Puisque les forces sont en équilibre, la somme de leurs moments par rapport au centre 0 est nulle et l'on aura

$$Pb+P'b'+P''b''+\text{etc.}=0\text{, ... ou }\Sigma Pb=0\text{. . . (1)}$$

or $b=r\cos\alpha$, $b'=r'\cos\alpha'$, $b''=r''\cos\alpha''$, etc.

Avec ces valeurs l'équation (1) devient

$$Pr\cos\alpha+P'r'\cos\alpha'+P''r''\cos\alpha''+\text{etc.}=0\text{,..ou }\Sigma Pr\cos\alpha=0\text{..}\quad(2)$$

Faisons tourner maintenant le système des points m, m', m'', etc. d'une quantité infiniment petite autour du centre 0 ; dans ce mouvement ces divers points décriront des arcs semblables, qu'on pourra considérer comme de petites lignes droites, et les rayons vecteurs de ces points décriront des angles au centre égaux.

En désignant par

e, e', e'', etc. les arcs semblables ou chemins décrits par les points d'application m, m', m'', etc. ;

par ω l'angle au centre que décrit chaque rayon vecteur, on aura

$$e=r\omega\text{, }e'=r'\omega\text{, }e''=r''\omega\text{, etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), après l'avoir au préalable multipliée par ω, on aura

$$Pe\cos\alpha+P'e'\cos\alpha'+P''e''\cos\alpha''+\text{etc.}=0\text{... ou }\Sigma Pe\cos\alpha=0\text{... (3).}$$

Dans cette équation, α, α', α'', etc. sont les angles que les bras de levier des diverses forces font respectivement avec les rayons vecteurs des points d'application des mêmes forces. Or ces angles sont respectivement égaux à ceux que font les forces avec les arcs décrits par leurs points d'application ; en effet, la force P est perpendiculaire au bras de levier b, et l'arc e est perpendiculaire au rayon vecteur r ; donc l'angle $\widehat{Pe}=\widehat{br}$, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. D'après cela, $e\cos\alpha$ est la projection de l'arc e sur la direction primitive de la force P ; $e'\cos\alpha'$ la projection de l'arc e' sur la force P′, et ainsi de suite.

Si donc nous représentons par

ε, ε', ε'', etc. les projections respectives des arcs e, e', e'', etc., sur

P, P', P'', etc.; l'équation (3) deviendra

$$P\varepsilon + P'\varepsilon' + P''\varepsilon'' + \text{etc.} = 0, \ldots \text{ ou } \Sigma P\varepsilon = 0 \ldots (4)$$

ce qui est précisément l'équation du principe des vitesses virtuelles.

Dans cette équation, les signes des moments virtuels des forces sont les mêmes que ceux des moments ordinaires. Or il est facile de s'assurer que, pour deux forces dont les moments ordinaires sont de signes contraires, si la projection de l'arc décrit par le point d'application de l'une tombe sur cette force, la projection de l'arc décrit par le point d'application de l'autre tombera sur le prolongement de cette autre force; et c'est ce qui confirme la règle énoncée pour les signes à donner aux moments virtuels des diverses forces.

Pour que la démonstration que nous venons de donner de la transformation du principe des moments en celui des vitesses virtuelles soit générale, il suffira de prouver qu'en faisant mouvoir, d'une quantité infiniment petite, un polygone dans son plan, et cela d'une manière quelconque, les chemins décrits par les sommets de ce polygone seront respectivement les mêmes que ceux que l'on peut faire d'écrire aux mêmes sommets par la rotation du polygone autour d'un certain point. Cette belle propriété, que l'on doit à M. Chasles, se déduit comme corollaire d'un théorême de géométrie, que l'on peut énoncer et démontrer comme suit :

Deux polygones égaux et non symétriques, situés dans un même plan et placés d'une manière quelconque, l'un par rapport à l'autre, étant donnés, il existe toujours dans ce plan un point autour duquel faisant tourner le premier polygone supposé invariablement lié à ce point, on parvient à le faire coïncider avec le second.

Pour établir cette propriété, remarquons d'abord que, pour faire coïncider deux polygones égaux non symétriques, il suffit qu'un côté quelconque du premier vienne se placer sur son égal du second, de manière que les extrémités homologues coïncident. D'après cela pour démontrer le théorême énoncé, il suffit de prouver qu'étant données deux droites égales ab, $a'b'$, situées d'une manière quelconque dans un même plan, on peut toujours par un mouvement de rotation de la première autour d'un certain point, supposé invariablement lié à cette première, parvenir à la faire coïncider avec la seconde, de manière que a tombe en a' et b en b'.

Pour cela tirons les droites auxiliaires aa', bb' et par leurs milieux élevons les perpendiculaires p et p'; je dis que le point c intersection de ces deux perpendiculaires sera le centre de rotation demandé.

En effet, les deux triangles abc, $a'b'c$, qui ont un sommet commun c, sont égaux ; car ab est donné égal à $a'b'$, et il résulte des constructions, que $ca=ca'$ et que $cb=cb'$. Or, deux triangles égaux qui ont un sommet homologue commun (ici le point c), peuvent être superposés par une rotation de l'un d'eux autour du sommet commun ; mais les deux triangles abc, $a'b'c$ coïncidant les deux côtés égaux ab, $a'b'$ coïncideront. Donc le point c est le centre de rotation cherché, et le théorême se trouve démontré.

Corollaire. — Lorsqu'on imprime un mouvement infiniment petit à un polygone invariable, chaque sommet décrit un petit arc qui coïncide avec sa corde ; et si l'on ramène le polygone dans sa position primitive, par une rotation autour du centre que nous venons de déterminer, l'arc décrit par le même sommet se confondera encore avec la même corde, et par suite les chemins décrits dans les deux cas, par les divers sommets, sont identiquement les mêmes. C'est en quoi consiste précisément la propriété de M. Chasles.

Il est ainsi démontré que le principe des vitesses virtuelles n'est qu'une nouvelle forme du principe des moments, et qu'il ne dit pas plus que ce dernier. Or, si la somme des moments des forces par rapport à un point est nulle, cela signifie que les forces ne peuvent pas faire naître la rotation du système autour de ce point. Donc de même, si la somme des moments virtuels est nulle pour un mouvement infiniment petit imprimé au système, cela signifie que les forces appliquées au système ne peuvent pas faire naître ce mouvement.

La question est donc de savoir combien de mouvements doivent être impossibles pour que tout mouvement le soit, autrement dit, pour qu'il y ait équilibre.

A cet égard, nous avons démontré (Tome 2, pag. 349) qu'il y a équilibre entre des forces situées dans un même plan et appliquées à un système de points invariablement liés entre eux, lorsque la somme de leurs moments est nulle par rapport à chacun de trois points quelconques, non en ligne droite.

Donc nous pouvons dire aussi qu'il y a équilibre pour le même système de forces, lorsque la somme de leurs moments virtuels est nulle pour chacun de trois mouvements quelconques infiniment petits, imprimés au système des points d'application de ces forces ; et encore les centres de rotations des trois mouvements infiniment petits ne devront-ils pas être en ligne droite.

Eu égard à cette dernière circonstance, s'il s'agit, pour un système de forces entièrement libre, d'exprimer qu'il y a équilibre, on

ne devra jamais imprimer au système des points matériels trois mouvements infiniment petits de translation pure ; car les centres de rotation de ces trois mouvements étant à l'infini, appartiennent à une circonférence d'un rayon infiniment grand et par suite doivent être considérés comme étant en ligne droite.

Le principe des vitesses virtuelles sert donc principalement dans les machines où le nombre des mouvements, qu'on peut imprimer au système, est limité à cause des obstacles fixes, et est toujours moindre que le nombre des conditions d'équilibre exigées en statique pour le cas d'un système libre.

Pour terminer nous allons indiquer comment on peut déduire du principe des moments celui des vitesses virtuelles pour des forces non situées dans un même plan. On démontrera : 1° que le principe des vitesses virtuelles existe pour une rotation infiniment petite autour d'un axe quelconque ; 2° qu'il existe pour une translation infiniment petite le long du même axe, car une translation n'est qu'une rotation autour d'un axe situé à l'infini ; 3° qu'il a lieu pour le mouvement diagonal composé des deux mouvements précédents ; 4° que, lorsqu'on imprime un mouvement quelconque infiniment petit à un solide, le chemin rectiligne décrit par chaque point du solide est la diagonale de deux chemins rectilignes que l'on ferait décrire au même point : l'un par rotation du solide autour de certain axe, l'autre par translation du solide le long du même axe. Cette propriété, que l'on doit encore à M. Chasles, se déduit comme corollaire d'un théorême de géométrie, que l'on peut énoncer et démontrer comme suit.

Deux polyèdres égaux non symétriques étant placés d'une manière quelconque dans l'espace, on peut toujours, en imprimant à l'un des polyèdres deux mouvements, l'un de rotation autour d'un certain axe, l'autre de translation le long du même axe, parvenir à le faire coïncider avec l'autre polyèdre, son égal.

Supposons connue un plan, sur lequel les projections des deux polyèdres égaux sont égales. Le centre, autour du quel il faudra faire tourner sur ce plan l'une de ces projections pour la faire coïncider avec son égale, sera sur ce même plan la projection de l'axe autour duquel devra s'effectuer la rotation et le long duquel devra ensuite s'effectuer la translation de l'un des polyèdres pour le faire coïncider avec l'autre polyèdre son égal.

Pour déterminer le plan de projection ci-dessus, remarquons que les projections de deux polyèdres égaux sont égales sur un plan, du

moment que deux triangles homologues égaux, appartenant respectivement à deux faces homologues égales, ont leurs projections sur ce plan égales. Remarquons encore que la projection d'un triangle sur un plan quelconque donné ne change ni de forme ni de grandeur, quand le triangle se meut dans l'espace parallèlement à lui-même, de manière que ses sommets décrivent des droites égales et parallèles. Cela posé,

Désignons par abc, $a'b'c'$ deux triangles homologues égaux appartenant respectivement aux deux polyèdres proposés.

Transportons le triangle $a'b'c'$ parallèlement à lui-même, de manière que le sommet a' décrive la droite aa' et que les sommets b', c' décrivent des droites égales et parallèles à aa'. Le triangle transporté aura actuellement le sommet a de commun avec le triangle abc, et nous le désignerons dans cette nouvelle position par $ab'c'$.

Si dans cette position des deux triangles, nous tirons la droite bb', elle sera la base d'un triangle isoscèle bab'. De même en tirant la droite $c\,c'$, elle sera la base d'un triangle isoscèle $c\,a\,c'$; et un plan quelconque parallèle aux bases de ces deux triangles isoscèles (1) sera un plan sur lequel les projections des deux triangles abc, $ab'c'$ sont égales, et partant sur lequel les projections des deux triangles abc, $a'b'c'$ sont pareillement égales. C. Q. F. D.

Note sur une construction géométrique de la surface d'élasticité.

L'équation de la surface d'élasticité, à laquelle est arrivé Fresnel, (Mémoire de l'Académie royale des sciences de l'institut de France, tome VII, 1827), est de la forme

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Il est facile de s'assurer que la surface représentée par cette equation est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur tous les plans tangents à un ellipsoïde ayant pour équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(1) Les deux côtés d'un triangle isoscèle sont également inclinés sur un plan quelconque mené par la base, ou parallèlement à la base du triangle isoscèle.

NOTE

Sur les deux genres de moments.

Bien que l'identé entre les significations des moments *ordinaires* et des moments *virtuels* soit établie fort clairement dans le présent mémoire, nous croyons cependant qu'il n'est pas inutile de faire voir comment cette identité résulte immédiatement de la *transmission* et du *travail mécanique* des forces, dont on a les notions complètes ; et tel est l'objet de cette note.

I.

Soient d'abord P et Q deux forces quelconques, situées dans le plan de la ligne matérielle ABC, agissant, dans le même sens, perpendiculairement à cette ligne, droite ou brisée en C, à ses extrémités A et B. Supposons de plus que ces deux forces soient en *équilibre* autour du point C, fixe et inébranlable, de la ligne matérielle *solide* ; et voyons comment les deux forces P et Q sont transmises au point C.

La force P agit immédiatement sur la molécule A ; celle-ci n'est donc maintenue en repos que par sa liaison invariable avec la seconde molécule A' vers C ; il faut donc que cette liaison transmette la force P au point A', comme si elle lui était immédiatement appliquée, dans le même sens parallèle ; car si la seconde molécule A', n'avait aucune liaison avec la troisième A'', elle serait entraînée avec A, par la force P, et ces deux molécules décriraient deux droites parallèles, absolument comme si la force P, appliquée en A, était appliquée en A', dans le même sens parallèle.

On voit que les deux forces, de même sens, P et Q, appliquées en A et B et en équilibre autour de la molécule fixe C de la ligne inflexible ABC, *sont transmises, par les molécules intermédiaires, au point inébranlable* C, *qui les détruit, absolument comme si chacune lui était immédiatement appliquée, avec la même intensité et dans le même sens parallèle*. Tel est le *principe* de la transmission des forces.

II.

D'après ce principe, les deux forces P et Q agissent sur le point C, comme si chacune lui était immédiatement appliquée, dans le même sens parallèle ; donc leur résultante est appliquée au point C. Or, si la ligne matérielle ACB est droite, les deux forces P et Q, de même sens, sont parallèles entre elles et par suite agissent sur le point C, dans le même sens et suivant une même droite parallèle à leurs directions ; donc *leur résultante, appliquée en* C, *leur est parallèle et égale à leur somme* P+Q.

De là, en supposant la ligne matérielle ACB, droite ou brisée en C, à la fois parfaitement homogène, solide et mobile autour du point C inébranlable, on est aisément conduit à l'équation des *moments ordinaires*, savoir :

$$P \times CA = Q \times CB,$$

laquelle fournit la théorie des forces parallèles et concourantes, ainsi que le parallélogramme des forces et des vitesses. — Mais les deux moments égaux ci-dessus résultent immédiatement de l'équation des *travaux élémentaires* des forces proposées, que nous allons établir directement, à l'aide du *parallélogramme des vitesses*.

III.

Les deux forces P et Q étant en équilibre sur la ligne plane solide ABC, droite ou brisée en C, mais retenue par ce point inébranlable, supposons la ligne parfaitement mobile autour de C. Il est clair que si la force P, appliquée en A, agissait seule pendant un instant x infiniment petit, la ligne ACB tournerait autour de C; ses extrémités A et B décriraient donc les arcs circulaires AA' et BB', semblables et infiniment petits. Donc puisqu'il y a équilibre, il faut que la force Q, agissant seule au point B, pendant le même instant x, ramène la ligne solide A'CB' à sa position primitive ACB; il faut donc que cette force fasse décrire, en sens contraires, les mêmes arcs AA' et BB', aux points A' et B'.

Soient AH et BI les projections orthogonales des arcs AA' et BB' sur les directions des forces P et Q. Il est clair que, pendant l'instant x, la force P ferait décrire au point A, s'il était libre, et suivant sa propre direction, le chemin infiniment petit AH; tandis que la force Q ferait décrire au point libre B, suivant sa propre direction, un chemin élémentaire égal à BI. Les *travaux mécaniques* des deux forces P et Q, pendant ce même instant x, ont donc pour mesures respectives P×AH et Q×BI. Donc puisqu'il y a équilibre dans le système, il faut que ces deux travaux, effets des deux forces P et Q, pendant le même instant x, se détruisent mutuellement; il faut donc que ces deux travaux élémentaires soient égaux, puisque déjà ils sont contraires. De sorte qu'on a

$$P \times AH = Q \times BI.$$

Puisque les chemins infiniment petits AH et BI, sont décrits pendant le même instant x, par les points A et B, suivant les directions des deux forces P et Q, ils sont proportionnels aux *vitesses initiales* ou *naissantes*, imprimées par ces forces, et représentent ces vitesses respectives. C'est pourquoi les chemins AH et BI sont dits les *vitesses virtuelles* des points d'application A et B des forces P et Q, ou simplement les *vitesses virtuelles* de ces forces; tandis que les *travaux élémentaires* P×AH et Q×BI sont dits les *moments virtuels* des mêmes forces.

Pour transformer ces moments *virtuels* en moments *ordinaires*, il suffit d'observer que les deux triangles isocèles CAA' et CBB' sont équiangles, aussi bien que les deux triangles rectangles AHA' et BIB'; et alors il est clair que l'équation précédente devient

$$P \times CA = Q \times CB.$$

Par ces deux équations, il est démontré que *si deux forces* P *et* Q, *de même sens, sont en équilibre autour d'un point* C *d'une ligne matérielle solide, située dans le plan de ces forces* : 1° *leurs moments virtuels sont égaux et contraires*; 2° *les moments ordinaires des deux mêmes forces, par rapport à un point* C *de leur résultante, sont aussi égaux et de signes contraires*; car ici le moment virtuel de la résultante est nul ou détruit, aussi bien que son moment ordinaire.

On voit donc que ces deux genres de moments ont absolument la même signification mécanique, savoir : que *les travaux élémentaires des deux forces* P *et* Q *en équilibre, sont toujours égaux et contraires.*

IV.

Enfin, on connaît l'importance des travaux élémentaires et des moments, dans l'appréciation des machines et pour les théories, même de la mécanique analytique; car le principe des *travaux élémentaires* ou des *forces vives*, n'est au fond que le principe des *vitesses virtuelles*, celui *de la moindre action* et rentre dans le principe de d'*Alembert*; ainsi qu'il est établi (p. 155 et suivantes de nos éléments de Mécanique).

J.-N. Noël.

X. — *Principes de Polygonométrie Analytique.*

PAR

A. C. DE CUYPER.

EX-CAPITAINE DU GÉNIE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

L'application du calcul des différences à la polygonométrie, sur laquelle nous avons déjà présenté quelques notes, dans le journal de M. Quetelet, année 1832, est dûe au savant Magistrini, professeur à l'Université de Bologne. Après lui, plusieurs géomètres italiens et entr'autres, Bordoni et Piani, en ont fait l'objet de leurs recherches.

Nous nous sommes proposé d'exposer ici, par des méthodes simples, les principes généraux de la polygonométrie analytique, et nous espérons qu'ils faciliteront l'étude de cette branche importante de de la Géométrie.

Nous nous réservons de présenter plus tard cette théorie, dans le rapport du passage des polygones aux courbes et nous verrons que la division des premiers est beaucoup plus étendue que celle des secondes. — Ces recherches nous permettront de caractériser le véritable lien qui réunit le calcul des différences finies au calcul différentiel: question qui a déjà été traitée avec succès par M. Lamarle (1).

I.

Équations générales des polygones.—Un système de points situés dans un plan est déterminé, lorsqu'on connaît les coordonnées de chaque point, par rapport à deux axes.

Le système peut être continu, ou non; dans le premier cas, il donne une courbe, et dans le second la réunion des points par des

(1) Mr. Lamarle, professeur à l'université de Gand. — Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante.

droites, faite dans un ordre convenable, fournit un contour polygonal.

La courbe est déterminée par la loi de continuité qui établit la relation entre les x et les y, et sa discussion appartient à l'analyse différentielle.

Le polygone, connu par ses sommets, ne sera déterminé que lorsque la loi de l'ordre successif de ces sommets sera donnée, et que les valeurs des x et des y de chacun d'eux pourront être fournies par des fonctions générales. — On reconnait facilement que ces fonctions ne sont pas régies par la loi de continuité et que l'analyse des polygones appartient au calcul des différences.

En effet, affectons les sommets des indices successifs 1, 2, 3, 4, ... z, $z+1$, $z+2$ etc., et représentons par x_z, y_z, les coordonnées du point ayant l'indice général z, le système polygonal sera déterminé par les équations.

$$y_z = \Phi(z), x_z = \Phi'(z),$$

C'est-à-dire, lorsque nous connaitrons les fonctions qui relient les coordonnées à l'indice. Partir de cette expression générale pour obtenir tous les sommets, reviendra à déterminer les termes d'une série, lorsque la fonction qui relie le terme général à l'indice est connue.

II.

Éléments constants qui peuvent entrer dans les équations des polygones ; leur influence sur la variation et la classification des polygones. — Les équations générales.

$$y_z = \Phi(z), x_z = \Phi'(z)$$

peuvent contenir des éléments constants de trois espèces : la première espèce est celle des paramètres, du changement desquels dépend le changement de la grandeur des polygones ; la seconde se rapporte aux éléments dits de position, savoir la distance d'un point quelconque aux axes, et la position d'un des côtés par rapport à ces axes. La troisième espèce est celle des modules avec lesquels peuvent varier soit la figure, soit et la figure et la grandeur dn polygone en même temps.

Si nous prenons pour exemple, un polygone régulier, nous aurons le rayon du cercle circonscrit pour la première espèce ; les coordonnées du centre ou de tout autre point, et l'angle qu'un côté

donné ou une diagonale fait avec l'un des axes, pour la seconde espèce ; et enfin, pour la troisième, les dénominateurs qui indiquent le nombre de côtés.

Le dénominateur d'un polygone peut se trouver explicitement ou implicitement dans les deux équations. Dans les deux cas, les changements du polygone qui dépendent des changements du dénominateur, pourront encore être obtenus en changeant convenablement la loi de variation de l'indice.

Ainsi du polygone de n côtés, donné par les équations

$$y_z=\phi\left(\frac{z}{n}\right), x_z=\phi'\left(\frac{z}{n}\right)$$

nous passerons au polygone d'un nombre mn de côtés, soit en changeant z en $\frac{z}{m}$, soit en mettant nm au lieu de n, et réciproquement :

III.

Détermination des côtés et des angles d'un polygone. — Nous savons par la géométrie analytique, que la distance entre deux points et la position de la droite qui les réunit, sont déterminées par les coordonnées de ces points.—Donc, les coordonnées des sommets d'un polygone en détermineront les côtés et les équations de ces sommets pourront aussi être considérées comme les équations du polygone.

Soit l_z la longueur du côté qui joint les sommets z et $z+1$, nous aurons

$$l_z=\sqrt{\left\{(x_{z+1}-x_z)^2+(y_{z+1}-y\ )^2\right\}}$$

et en fesant $\Delta z=1$,

$$l_z=\sqrt{\left\{\Delta x_z{}^2+\Delta y_z{}^2\right\}}.$$

Soit encore

$$y'=bx'+a,$$

l'équation générale d'une droite qui doit passer par les points z et $z+\omega$, nous aurons

$$y_z=bx_z+a, \quad y_{z+\omega}=bx_{z+\omega}+a, \quad \frac{y_{z+\omega}-y_z}{x_{z+\omega}-x_z}=b, \quad a=y_z-x_z\ \frac{y_{z+\omega}-y_z}{x_{z+\omega}-x_z},$$

et l'équation de la droite deviendra

$$y'=y_z+(x'-x_z)\frac{y_{z+\omega}-y_z}{x_{z+\omega}-x_z}.$$

Si nous voulons que cette équation représente le côté l_z du polygone, il suffira de faire $\omega=\Delta z=1$, ce qui donnera

$$y'=y_z+(x'-x_z)\ \frac{\Delta y_z}{\Delta x_z}.$$

Si nous indiquons pas α_z l'angle que le côté l_z fait avec l'axe du x, nous aurons

$$b=\text{Tang}\,\alpha_z=\frac{\Delta y_z}{\Delta x_z}.$$

Enfin soit ω_z l'angle que comprennent au sommet z les deux côtés l_z et l_{z-1}, nous aurons toujours

$$\omega_z=\pi-\Delta\alpha_{z-1},$$

π étant $=180°$ et α_{z-1} indiquant l'angle que le côté l_{z-1} fait avec l'axe des x, d'où

$$\text{Sin}\ \omega_z=\sin\Delta\alpha_{z-1}$$
$$\text{Cos}\ \omega_z=-\cos\Delta\alpha_{z-1}$$
$$\text{Tang}\ \omega_z=-\text{Tang}\,\Delta\alpha_{z-1}.$$

IV.

Connaissant la loi des côtés et celle des angles, déterminer les équations générales d'un polygone.—L'équation $\omega_z=\pi-\Delta\alpha_{z-1}$

$$\text{ou}\ \Delta\alpha_z=\pi-\omega_{z+1} \qquad (a).$$

et les deux suivantes

$$\Delta x_z=l_z\cos\alpha_z \qquad (b)$$
$$\Delta y_z=l_z\sin\alpha_z \qquad (c)$$

peuvent être considérées comme les équations générales d'un contour polygonal.

L'intégration de (a) donne

$$\alpha_z=\pi z-\Sigma\omega_{z+1}+C$$

La substitution de cette valeur de α_z dans les équations (b) et (c) donne

$$\Delta x_z=l_z\cos(\pi z-\Sigma\omega_{z+1}+C)$$
$$\Delta y_z=l_z\sin(\pi z-\Sigma\omega_{z+1}+C)$$

et en intégrant,

$$x_z = \Sigma l_z \cos(\pi z - \Sigma\omega_{z+1} + C) + D$$
$$y_z = \Sigma l_z \sin(\pi z - \Sigma\omega_{z+1} + C) + D'$$

La constante C sera déterminée d'après la direction d'un côté donné, et les deux constantes D et D' le seront d'après la position d'un somme t

V.

Caractère général d'un polygone fermé et convexe. — Si les coordonnées d'un système de points sont des fonctions de l'indice telles qu'elles ne changent pas de valeur par le changement de z en $z+n$, par exemple de la forme.

$$f\left(\sin\frac{2\pi z}{n}, \cos\frac{2\pi z}{n}\right),$$

π étant $= 180°$ et n un nombre entier, les points seront en nombre fini. Nous aurons alors $x_{z+n} = x_z$ et $y_{z+z} = y_z$, *c. a. d* le point indice $z+n$ se confondra avec le point z, ou bien le point $n+1$ avec le point 1, le point $n+2$ avec le point 2, le point $n+3$ avec le point 3 et ainsi de suite ; ce système est rentrant, et le polygone qui résultera de la réunion des points par des droites, sera fermé et de n côtés. Afin de reconnaitre la forme du polygone, fesons tourner une droite à partir des x positives vers les y, en lui donnant successivement des positions parallèles aux côtés du polygone ; cette droite qui indiquera la direction de ces côtés, sera appelée *indicatrice*.

Pour fixer les idées, considérons l'hexagone fig. 1 et suivons la marche de l'indicatrice. Partant de l'axe des X, elle prend la position am_1 dans laquelle elle indique la position du côté 1—2 ; de là elle passe à la position am_2 parallèle au côté 2—3 ; puis elle vient en am_3 parallèle au troisième côté, en am_4 parallèle au quatrième, am_5 parallèle au cinquième et am_6 parallèle au sixième.

De la position am_6, pour indiquer le côté 7—8, l'indicatrice prend la position am_7 qui se confond avec am_1. Cette coïncidence des deux positions am_1 et am_7 de l'indicatrice indique celle des côtés 7—8 et 1—2. Donc, en général, dans tout polygone de n côtés, le côté $(n+1)$ ième coïncidera avec le premier, lorsque la position am_{n+1} de l'indicatrice coïncidera avec la position am_1.

Nous aurons ainsi l'angle $\omega_{z+1} = \omega_1$, (dans l'hexagone $\omega_7 = \omega_1$) : Donc, dans un polygone convexe et fermé, il sera indifférent pour avoir la somme des angles $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots \omega_z$, de chercher celle des angles $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \ldots\ldots \omega_{z+1}$.

Valeur de la somme des angles d'un polygone. — Nous avons vu qu'en général,

$$\omega_z = \pi - \Delta\alpha_{z-1} = \pi - (\alpha_z - \alpha_{z-1}) :$$

donc,

$$\omega_2 = \pi - \alpha_2 + \alpha_1$$
$$\omega_3 = \pi - \alpha_3 + \alpha_2$$
$$\omega_4 = \pi - \alpha_4 + \alpha_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\omega_n = \pi - \alpha_n + \alpha_{n-1}$$
$$\omega_{n+1} = \pi - \alpha_{n+1} + \alpha_n$$

et $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \ldots\ldots + \omega_n + \omega_{n+1} = n\pi + \alpha_1 - \alpha_{n+1}$

ou $\omega_1 + \omega_2 + \ldots\ldots\ldots \omega_n = n\pi - (\alpha_{n+1} - \alpha_1)$

mais α_1 est l'espace angulaire parcouru par l'indicatrice depuis l'axe des x jusqu'à la position am_1, et α_{n+1} est l'espace angulaire parcouru depuis le même axe jusqu'à la position am_{n+1} qui coïncide avec a_1 : donc $\alpha_{n+1} - \alpha_1$ est l'espace parcouru par l'indicatrice depuis la position am_1 jusqu'à son retour à cette position pour indiquer le côté $(n+1)$ ième.

Donc la somme des angles saillants, d'un polygone fermé et convexe de n côtés, vaut autant de fois deux droits qu'il y a de côtés, moins le nombre de droits que l'indicatrice a parcouru, en partant de la position parallèle au 1er côté, jusqu'à son retour à cette même position, pour indiquer le côté $n+1$ coïncidant avec le premier.

Classification des polygones convexes et fermés. — En partant de la position am_1 pour arriver à celle am_{n+1} coïncidant avec la première, l'indicatrice peut avoir fait un seul tour complet, ou une révolution autour de A, ou deux ou trois ou un certain nombre de révolutions.

Nous aurons donc diverses espèces de polygones convexes et fermés d'un même nombre de côtés que Poinsot a classés de la manière suivante.

Si l'indicatrice, de la position parallèle au premier côté jusqu'à son retour, pour indiquer la position du côté $n+1$ parallèle au premier, a fait une seule révolution autour de A, le polygone est du premier ordre. Il sera du deuxième ordre, si l'indicatrice a fait deux révolutions, du troisième ordre, si elle en fait trois, et enfin du n ième ordre pour n révolutions.

Dans un polygone de n côtés et du premier ordre, l'indicatrice fait une révolution entière ou de 4 droits, et la somme des angles est

$$n\pi - 2\pi = \pi(n-2),$$

C'est-à-dire autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux.

Pour un polygone du deuxième ordre, l'indicatrice parcourt huit angles droits, et la somme des angles est

$$n\pi - 4\pi) = \pi(n-4);$$

Enfin pour un polygone du m ième ordre, l'indicatrice fait m tours, et la somme des angles sera

$$n\pi - 2m\pi) = \pi(n-2m).$$

Etant donné le nombre de côtés d'un polygone, il est facile de voir quels sont les ordres que ce nombre peut admettre. Comme la somme des angles doit être nécessairement positive, nous aurons en général $n > 2m$ et

$$m < \frac{n}{2} :$$

C'est-à-dire que l'ordre du polygone est toujours inférieur au nombre des côtés divisé par 2.

VI.

Equations des polygones convexes, équilatéraux et équiangles. — Les équations générales des polygones étant

$$x_z = \Sigma l_z \cos(\pi z - \Sigma\omega_{z+1} + C) + D$$
$$y_z = \Sigma l_z \sin(\pi z - \Sigma\omega_{z+1} + C) + D',$$

Supposons le cas des polygones équiangles et équilatéraux dont les côtés seraient $= a$ et les angles $= A$. Il viendra

$$x_z = \Sigma a \cos(\pi z - Az + C) + D$$
$$y_z = \Sigma a \sin(\pi z - Az + C) + D'.$$

et en intégrant

$$x_z = \frac{a}{2\sin\frac{\pi - A}{2}} \sin\left(\frac{(\pi - A)(2z-1) + 2C}{2}\right) + D \qquad (1)$$

$$y_z = -\frac{a}{2\sin\frac{\pi-A}{2}}\cos\left(\frac{(\pi-A)(2z-1)+2C}{2}\right)+D' \qquad (2)$$

Si nous fesons $(\pi-A)(2z-1)+2C=u$ nous aurons

$$(x_z-D)^2=\frac{a^2}{4\cos^2\frac{A^2}{2}}\sin^2 u$$

$$(y_z-D')^2=\frac{a^2}{4\cos^2\frac{A}{2}}\cos^2 u$$

et en ajoutant ces deux dernières équations

$$(x_z-D)^2+(y_z-D')^2=\frac{a^2}{4\cos^2\frac{A}{2}}$$

équation du cercle dont les coordonnées du centre sont D et D' et le rayon $\frac{a}{2\cos\frac{1}{2}A}$. Les polygones dont il s'agit peuvent donc toujours être inscrits dans un cercle.

VII.

Polygones réguliers. — Les polygones réguliers sont équiangles et équilatéraux, *convexes et fermés.*

Nous avons vu que dans un polygone fermé de n côtés la position $(z+n)$ de l'indicatrice devait coïncider avec la position (z), ou que

$$x_{z+n}=x_z \text{ et } y_{z+n}=y_z.$$

Il faut donc qu'en substituant $z+n$ à z, dans les équations (1) et (2) du n° VI, les valeurs de z et de y ne changent pas. Comme ces valeurs ne peuvent varier qu'avec les sinus et cosinus de

$$\frac{(\pi-A)(2z-1)+2C}{2},$$

il faudra que cette expression de l'arc soit de telle forme qu'en changeant z en $z+n$, les lignes trigonométriques restent constantes, ou que les deux valeurs diffèrent d'une quantité $2m\pi$, m étant

un nombre entier quelconque. Nous satisferons à cette condition, en posant

$$\frac{(\pi-A)(2z-1)+2C}{2}=\frac{2m\pi z}{n}+h,$$

vu que $\frac{2m\pi(z+n)}{n}+h-\left(\frac{2m\pi z}{n}+h\right)=2m\pi$:

nous en déduisons

$$n.\frac{\pi-A}{2}=\frac{2m\pi z+hn-nC}{2z-1}=m\pi+\frac{hn-Cn+m\pi}{2z-1}.$$

or, comme pour une valeur déterminée et constante de A, le premier membre de cette équation est constant, il faudra qu'on ait

$$\frac{hn-Cn+m\pi}{2z-1}=0$$

d'où

$$h=C-\frac{m\pi}{n}.$$

Pour cette valeur de l'angle arbitraire h,

$$A=\pi-\frac{2m\pi}{n}.$$

Remarquons qu'il faut toujours que $2m$ soit $<n$, et qu'on a la somme des angles $nA=n\pi-2m\pi=\pi(n-2m)$.

Comme nous avons pris n quelconque, nous voyons que sous le rapport du nombre de côtés il n'y a pas de limite supérieure pour les polygones, mais qu'il existe une limite inférieure $n=3$, car en fesant $m=1$ il vient $nA=\pi$.

Les équations aux différences des polygones réguliers seront donc

$$\Delta x_z=a\cos\left(C+\frac{2m\pi}{n}.z\right)$$

$$\Delta y_z=a\sin\left(C+\frac{2m\pi}{n}.z\right)$$

dont l'intégration donnera

$$x_z=\frac{a}{2\sin\frac{m\pi}{n}}\sin\left\{C+\frac{m\pi}{n}(2z-1)\right\}+D$$

$$y_z = -\frac{a}{2\sin\frac{m\pi}{n}}\cos\left\{C+\frac{m\pi}{n}(2z-1)\right\}+D'.$$

VIII.

Polygones réguliers semblables. — Les polygones réguliers semblables ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

Appelons a_z le côté du premier polygone ;

α_z l'angle qu'il fait avec l'axe des x ;

x_z, y_z } ses coordonnées ;

a'_z, α'_z, x'_z, y'_z } les quantités analogues dans le polygone semblable.

La similitude donne

$$\frac{a'_z}{a_z}=\rho \qquad A_z=A'_z$$

de la seconde équation on déduit

$$\Delta\alpha_z=\Delta\alpha'_z \text{ ou } \alpha'_z=\alpha_z+b,$$

b étant une constante.

Mais $\Delta x'_z=a'_z\cos\alpha'_z=\rho a_z\cos(\alpha_z+b)$

$\Delta y'_z=a'_z\sin\alpha'_z=\rho a_z\sin(\alpha_z+b)$

ou $\Delta x'_z=\rho a_z\cos\alpha_z\cos b-\rho a_z\sin\alpha_z\sin b$

$\Delta y'_z=\rho a_z\sin\alpha_z\cos b+\rho a_z\sin b\cos\alpha_z$

donc $\Delta x'_z=\rho\cos b.\Delta x_z-\rho\sin b.\Delta y_z$

$\Delta y'_z=\rho\cos b.\Delta y_z+\rho\sin b.\Delta x_z$

et par l'intégration

$$x'_z=\rho\cos b.x_z-\rho\sin b.y_z+h$$
$$y'_z=\rho\cos b.y_z+\rho\sin b.x_z+k. \qquad (1)$$

Les équations (1) donnent les coordonnées de tous les polygones semblables qui peuvent être placés dans le même plan que le proposé.

La constante b sera déterminée d'après les inclinaisons sur l'axe

des x du côté principal du polygone donné et du polygone semblable, qu'on choisira de manière à satisfaire à l'équation

$$\alpha_z' = \alpha_z + b.$$

Les deux autres constantes h et k dépendront de la position qu'on voudra donner au sommet principal du polygone semblable. Par la présence de ces trois constantes et du rapport indéterminé ρ, les deux équations (1) donnent tous les polygones semblables au proposé qui peuvent être tracés dans le même plan, dans une position quelconque et d'une grandeur quelconque relativement à ce proposé.

Si les côtés du polygone semblable doivent être perpendiculaires aux côtés du proposé, la relation entre les angles α_z et α_z' deviendra

$$\alpha'_z = \alpha_z - \frac{\pi}{2}$$

et par suite, $$b = -\frac{\pi}{2}.$$

Les équations du polygone semblable se réduiront à

$$x'_z = h + \rho y_z,$$
$$y'_z = k - \rho x_z.$$

La présence des constantes arbitraires h et k démontre qu'on peut donner un nombre infini de positions différentes au polygone cherché.

Si les polygones avaient leurs côtés homologues parallèles et dirigés dans le même sens, il viendrait $\alpha_z = \alpha_z'$ et $b = 0$, d'où

$$x'_z = \rho x_z + h,$$
$$y'_z = \rho y_z + k.$$

Enfin, si tous les côtés homologues étaient aussi également distants entre eux, appelant d cette distance, nous aurions

$$(y_z' - y_z)\frac{\Delta x_z}{l_z} + (x_z - x_z')\frac{\Delta y_z}{l_z} = d,$$

$$\left(y_z - \frac{k}{1-\rho}\right)\frac{\Delta x_z}{l_z} - \left(x_z - \frac{h}{1-\rho}\right)\frac{\Delta y_z}{l_z} = \frac{d}{\rho - 1}$$

Mais le premier membre de cette équation représente la longueur de la perpendiculaire abaissée du point dont les coordonnées sont $\frac{k}{1-\rho}$ et $\frac{h}{1-\rho}$, sur le côté l_z. Comme cette longueur est constante pour tous les côtés, il est évident qu'ils seront tous tangents à un même cercle. Donc lorsqu'un polygone a tous ses côtés parallèles et

équidistants des côtés homologues d'un polygone semblable, il peut être circonscrit à un cercle.

Lorsque les coordonnées x_z et x'_z, y_z et y'_z sont dans un rapport constant pour un même indice quelconque z, les deux polygones sont semblables, c'est-à-dire les angles marqués du même indice sont égaux et les côtés homologues sont proportionnels.

Nous avons $x_z : x'_z = y_z : y'_z = 1 : m$ ou

$$x'_z = mx_z\,,\quad y'_z = my_z.$$
$$\Delta x'_z = m\Delta x_z\,,\quad \Delta y'_z = m\Delta y_z.$$

Mais les côtés $l_z = \Delta y_z \sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta x_z}{\Delta y_z}\right)^2\right\}}$

$$l'_z = \Delta y'_z \sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta x'_z}{\Delta y'_z}\right)^2\right\}} = m\Delta y_z \sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y_z}{\Delta x_z}\right)^2\right\}}$$

d'où $\qquad l_z : l'_z = 1 : m.$

Appelant ω_z, ω'_z les angles correspondants dans les deux polygones, et α_z, α_z' les angles que les deux côtés l_z, l_z' font avec l'axe des x, nous avons

$$\omega_z = \pi - \Delta\alpha_{z-1}$$
$$\omega'_z = \pi - \Delta\alpha_{z-1}$$

$$\text{Tang}\,\omega_z = -\text{Tang}\,\Delta\alpha_{z-1} = -\text{Tang}(\alpha_z - \alpha_{z-1}) = \frac{\text{Tang}\,\alpha_{z-1} - \text{Tang}\,\alpha_z}{1+\text{Tang}_{z-1}\text{Tang}\,\alpha_z}.$$

$$\text{Tang}\,\omega'_z = \frac{\text{Tang}\,\alpha'_{z-1} - \text{Tang}\,\alpha'_z}{1+\text{Tang}\,\alpha'_{z-1}\text{Tang}\,\alpha_z}$$

Mais puisque $\text{Tang}\,\alpha_z = \frac{\Delta y_z}{\Delta x_z}$, $\text{Tang}\,\alpha' = \frac{\Delta y'_z}{\Delta x'_z} = \frac{\Delta y_z}{\Delta x_z}$;

nous aurons

$$\text{Tang}\,\omega_z = \text{Tang}\,\omega'_z$$
et $\qquad \omega_z = \omega'_z. \qquad (2)$

Or, les deux conditions (1) et (2) déterminent la similitude des polygones.

IX.

Position relative des côtés d'un polygone régulier. — Si nous voulons appliquer l'équation générale des côtés d'un polygone

$$y' = y_z + (x' - x_z)\frac{\Delta y_z}{\Delta x_z},$$

aux polygones réguliers, nous avons

$$\Delta x_z = a\cos\left(C + \frac{2m\pi z}{n}\right)$$

$$\Delta y_z = a\sin\left(C + \frac{2m\pi z}{n}\right)$$

$$\frac{\Delta y_z}{\Delta x_z} = \mathrm{Tang}\left(C + \frac{2m\pi z}{n}\right).$$

Rapportant le polygone régulier au centre du cercle circonscrit de rayon

$$r = \frac{a}{2\sin\dfrac{m\pi}{n}},$$

il viendra

$$x_z = r\sin\left\{C + \frac{m\pi}{n}(2z-1)\right\}$$

$$y_z = -r\cos\left\{C + \frac{m\pi}{n}(2z-1)\right\}$$

et par suite

$$y' = x'\mathrm{Tang}\left(C + \frac{2m\pi}{n}z\right) - \frac{r\cos\dfrac{m\pi}{n}}{\cos\left(C + 2\dfrac{m\pi}{n}z\right)}.$$

Pour qu'un côté (u) soit parallèle à ce côté (z), il faudra que

$$\mathrm{Tang}\left(C + \frac{2m\pi}{n}u\right) = \mathrm{Tang}\left(C + \frac{2m\pi}{n}z\right)$$

ou que

$$C + \frac{2m\pi}{n}u = C + \frac{2m\pi}{n}z + \mu\pi$$

μ étant un nombre entier.

Nous en déduisons $2mu = 2mz + \mu n$.

Or, comme les valeurs des indéterminées u et z doivent être nécessairement entières, il faut que μ soit un multiple de m ou que $\mu = \mu' m$, ce qui donne

$$u-z=\frac{\mu' n}{2}.$$

Pour n impair, ou pour $\mu'=2\theta$, nous aurons

$$u=z+\theta n.$$

Mais le polygone étant de n côtés, on voit que le côté ayant le rang u ou $z+\theta n$ coïncide avec le côté z, et qu'un polygone régulier d'un nombre impair des côtés, n'a pas de côtés parallèles.

Si n est pair, nous pourrons faire $\mu'=1$ et le rang du côté parallèle sera donné par

$$z+\frac{n}{2}.$$

X.

Intersection de deux côtés d'un polygone régulier comprenant entre eux ω sommets. — Ces deux côtés sont le z ième et le $(z+\omega)$ ième, dont nous connaissons les équations

$$y'=x' \operatorname{Tang}\left(C+\frac{2m\pi z}{n}\right)-\frac{r\cos\frac{m\pi}{n}}{\cos\left(C+\frac{2m\pi}{n}z\right)}$$

$$y''=x'' \operatorname{Tang}\left(C+\frac{2m\pi z}{n}+\frac{2m\pi\omega}{n}\right)-\frac{z\cos\frac{m\pi}{n}}{\cos\left(C+\frac{2m\pi}{n}z+\frac{2m\pi\omega}{n}\right)}$$

fesons $$C+\frac{2m\pi z}{z}=z'$$

$$\frac{2m\pi\omega}{n}=b$$

nous aurons pour l'intersection des deux côtés

$$x'\left\{\operatorname{Tang}(z'+b)-\operatorname{Tang}z'\right\}=-r\cos\frac{m}{n}\pi\left\{\frac{1}{\cos z'}\frac{1}{\cos(z'+b)}\right\}$$

et par suite, en remarquant qu'en général

$$\text{Tang } a - \text{Tang } b = \text{Tang } (a-b)\frac{\cos(a-b)}{\cos a \cos b},$$

$$(1)\quad x' = \frac{z\cos\frac{m\pi}{n}\omega}{\cos\frac{m\pi}{n}}\sin\left(z' + \frac{m\pi}{n}\omega\right)$$

$$(2)\quad y' = \frac{z\cos\frac{m\pi}{n}}{\cos\frac{m\pi}{n}\omega}\cos\left(z' + \frac{m\pi}{n}\omega\right)$$

Mais $$z' = C + \frac{2m\pi}{n}z$$

$$z' + \frac{m\pi}{n}\omega = C + \frac{2m\pi}{n}z + \frac{zm\pi}{n}\omega$$

$$= C + \frac{m\pi}{n}\omega + \frac{m\pi}{n} - \frac{m\pi}{n} - \frac{2m\pi}{n}z$$

$$= C' + \frac{m\pi}{n}(2z-1)$$

et les équations (1) et (2) des points d'intersection deviendront

$$(3)\quad x'_z = \frac{z\cos\frac{m\pi}{n}}{\cos\frac{m\pi}{n}\omega}\sin\left\{C' + \frac{m\pi}{n}(2z-1)\right\}$$

$$(4)\quad y'_z = -\frac{z\cos\frac{m\pi}{n}}{\cos\frac{m\pi}{n}\omega}\cos\left\{C' + \frac{m\pi}{n}(2z-1)\right\}$$

Ces équations (3) et (4) sont celles des sommets d'un nouveau polygone de n côtés et de l'ordre m, ayant son centre à l'origine des coordonnées.

Donc le nouveau polygone qu'on obtient en joignant tous les points d'intersection $(x'y')$ est de la même nature que le polygone primitif et lui est concentrique.

Note. Cette introduction devait être suivie de la démonstration de quelques théorèmes remarquables de Cardan, Maupertuis, Viviani, etc. ; mais il a paru préférable de faire rentrer ces applications dans le cadre de celles qui appartiendront aux polygones gauches dont la théorie fondamentale fera l'objet d'un prochain article.

XI. — *Essai sur la théorie mathématique de la machine à vapeur.*

PAR

M. STEICHEN,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE MILITAIRE, A BRUXELLES.

Des géomètres éminents, Prony, Coriolis et M. Poncelet se sont successivement occupés du système articulé de la machine à vapeur. — Le travail de Coriolis se rapporte particulièrement à l'influence du moment d'inertie du balancier et de sa vitesse moyenne sur la régularité du mouvement général; et le lecteur curieux de cette matière pourra consulter le journal de l'École polytechnique, tome 13, p. 228–267. —Prony qui a traité le même sujet dans son architecture hydraulique, n'a pour ainsi dire qu'effleuré la partie mécanique de la question; mais il est entré dans plus de développements sur la partie géométrique; et les considérations qu'il expose à cet égard ne laissent pas que d'offrir de l'intérêt. — Plus récemment dans son cours de machines, professé à l'école de Metz, M. Poncelet a traité la question de la machine à vapeur dans un sens plus étendu, et il a pris pour base de ses recherches, le théorème de MM. Chasles et Bobillier, dont il a fait à cette occasion une application très-remarquable. Toutefois on ne doit pas ignorer que la construction géométrique à laquelle ce théorème conduit, d'une manière si directe et si naturelle, a été déjà indiquée par Coriolis comme simplification synthétique de quelques–unes de ses formules fondamentales.

La recherche des figures ou des positions d'équilibre dynamique de la machine, recherche qui nous paraît devoir former un complément essentiel à la théorie des manivelles établie par Navier et M. Poncelet, reste encore à faire; et elle sera principalement l'objet de la présente dissertation. En outre tout en profitant des idées de M. Poncelet, nous nous efforcerons de présenter, par une méthode claire et systématique, les conditions d'équilibre du système articulé dont il s'agit, tant pour faire ressortir les difficultés d'une solution analytique sa-

tisfaisante de notre question principale, que pour en déduire ensuite la solution graphique déjà indiquée par l'auteur cité.

M. Dubois notre collègue, qui a bien voulu se charger du tracé des figures, est parvenu à simplifier encore cette solution, et les résultats de ses constructions s'accordent suffisamment avec ceux du calcul : c'est en lisant attentivement quelques passages de l'architecture hydraulique que nous avons conçu l'idée de la solution analytique indiquée plus bas, et que l'on pourrait sans doute rendre encore un peu plus approchée. A cet objet principal de recherches nous rattacherons en même temps quelques considérations géométriques, tant curieuses qu'utiles, qui rouleront particulièrement sur de certaines courbes algébriques de degrés supérieurs.

§ 1). On sait que les machines à vapeur fixes sont particulièrement de deux espèces, la machine à balancier et à parallélogramme articulé de Watt, la plus généralement usitée ; et la machine à guides parallèles de Maudsly. Dans cette dernière, qui est sans balancier, l'extrémité de la tige du piston se trouve attachée au point milieu d'une traverse horizontale munie, à ses extrémités, de roulettes qui sont creusées en gorge et qui peuvent rouler sur deux guides cylindriques fixes ; ainsi le mouvement de l'extrémité de la tige du piston peut se faire exactement en ligne droite. La bielle qui doit transformer le mouvement rectiligne alternatif en un mouvement circulaire continu est articulée par une extrémité sur le sommet de la tige, et par l'autre à un bras de manivelle à laquelle elle communique la rotation : en dépouillant donc la machine de ses accessoires et réduisant ses principales pièces à leurs axes, on voit qu'elle se compose (fig. I) d'une bielle, assujettie à décrire par le point C une droite centrale CA, et par l'autre extrémité B une circonférence de rayon AB. La force motrice est donc dans le même cas que si elle agissait immédiatement sur le point C de la pièce CB suivant la ligne CA, et la résistance totale pourra être considérée comme si elle agissait au point B, tangentiellement au cercle décrit et en sens contraire de ce mouvement, suivant la ligne BH par exemple, si la rotation se fait dans le sens de la flèche *f*.

Si l'on prolonge le rayon AB et qu'on élève en C une normale indéfinie CI sur CA, on sait par le théorème de M. Chasles que le déplacement virtuel de la pièce CB n'est autre chose qu'une rotation de tous ses points autour du point d'intersection I des deux normales ainsi menées ; et pour que la puissance F appliquée à l'extrémité C de la bielle CB, fasse équilibre à la résistance X, appliquée à l'ex-

trémité B, il est *nécessaire* et *suffisant* que les moments de rotation de ces deux forces, qui d'elles-mêmes tendent à produire ce déplacement défini, soient égaux et contraires par rapport au centre I; ainsi l'on aura :

$$F.CI=X.BI. \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Or si l'on pose l'angle variable $BAD=\delta$, $AB=r$, $BC=l$, et que l'on dénote par $d\lambda$ la rotation élémentaire de la bielle autour du centre I, pendant que le point B décrit sur la circonférence de la manivelle un chemin $rd\delta$, puis par df le chemin contemporain décrit par l'extrémité C de l, on aura d'abord évidemment :

$$df=CI.d\lambda, \text{ et } r.d\delta=BI.d\lambda :$$

Ainsi en multipliant les deux membres de l'équation (I) par $d\lambda$, et remplacent ensuite $BI.d\lambda$, $CI.d\lambda$, par leurs valeurs, on obtient immédiatement :

$$F.df=X.r.d\delta \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ce qui démontre d'abord le principe des vitesses virtuelles pour le cas particulier qui nous occupe.

Remarquons d'après M. Poncelet que l'équation (I) est susceptible d'une forme plus simple encore, à laquelle on parvient en prolongeant CB jusqu'à sa rencontre en O avec une droite en A parallèle à CI : car on obtient évidemment par là ;

$$CI : BI=AO : AB=u : r ;$$

partant :

$$F.u=X.r. \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Equation qui ne renferme plus qu'une seule variable linéaire, et qui est éminemment propre à donner, par une construction graphique, les positions d'équilibre de la machine.

En effet en nommant $AO_1=u_1$ la valeur de AO pour laquelle cet équilibre a lieu entre une puissance donnée et une résistance, on aura d'après (3) :

$$F.AO_1=X.r. \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Mais pour que le mouvement du système soit périodique et règlé, il est nécessaire que la quantité d'effet utile moteur par tour soit égale à la quantité d'effet utile absorbé dans le même intervalle; donc en supposant la machine à double effet, on aura :

$$4\,F.r.=2\pi rX, \text{ ou } F=\tfrac{\pi}{2}.X.$$

Substituant dans la dernière équation (3) cette valeur de F, on a :

$$AO_1 = \frac{2r}{\pi} = \frac{7}{11} r \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Divisant donc le rayon horizontal en onze parties égales, et en prenant 7, à partir du centre, on aura la quantité AO_1 : de chaque point O_1 ainsi déterminé on tirera une ligne droite telle que sa partie interceptée entre la verticale du centre A et la circonférence donnée soit égale à la longueur de la bielle : on aura ainsi les quatre positions d'équilibre de la machine. Le poids du volant, propre à régulariser le mouvement à un degré donné, s'obtiendra ensuite facilement, en égalant la moitié de l'accroissement de force vive, gagnée dans l'intervalle de deux positions d'équilibre consécutives à l'excès du travail moteur sur le travail résistant, dépensé dans ce même intervalle. La figure 2 offre un exemple de cette solution graphique, pour le cas où la bielle est censée six fois plus longue que le rayon de la manivelle.

§ 2). Si l'on demandait une solution analytique, on pourrait procéder de la manière suivante : soit f le chemin variable parcouru par le sommet C de la bielle depuis sa position la plus élevée jusqu'à sa position actuelle : on aura donc :

$$f = l + r - CD - DA = l + r - r\cos\delta - \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\delta}$$

partant : $$df = \left(r\sin\delta \pm \frac{r^2 \sin\delta\cos\delta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\delta}} \right) d\delta.$$

Donc puisque pour la position d'équilibre l'égalité (2) doit subsister, elle donnera par substitution :

$$\frac{X}{F} = \sin\delta \left(1 \pm \frac{r\cos\delta}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\delta}} \right)$$

et en tenant compte de l'équation de condition réquise par la nature du mouvement périodique règlé, on en tirera facilement l'équation suivante :

$$\frac{\sin^2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\delta} \pm \cos\delta . \sin\delta . r}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\delta}} = \frac{2}{\pi} = 0,\ 636\ldots \quad (5).$$

laquelle servira à calculer les positions d'équilibre dynamiques instantanées du système : elle sera du 3^{me} degré par rapport à l'incon-

nue $\sin\delta$; et ses racines seront différentes selon la valeur du rapport $\frac{r}{l}$: mais, comme dans le cas de la machine à balancier, on effectuera quelques calculs numériques relatifs aux positions d'équilibre, nous croyons inutile de nous arrêter à des exemples numériques du cas actuel.

Mais la solution graphique de tâtonnement montre déjà que quand la bielle (fig. 2) a une longueur six fois aussi grande que le rayon de la manivelle, celle-ci fait avec la verticale supérieure un angle de 34° environ dans la position de la force vive minimum, et un angle de 47° environ avec la verticale inférieure dans la position de la force vive maximum : ces deux positions étant prises indifféremment dans un même demi-tour, *ascendant* ou *descendant*.

Remarque I. L'application précédente du beau théorème de MM. Chasles et Bobillier a été indiquée pour la première fois par M. Poncelet, dans son cours de Metz, où il établit aussi déjà l'équation (3), en partant toutefois de l'équation (2) comme d'un cas particulier du principe général des vitesses virtuelles bien démontré. Conformément à ce qui a été dit, le théorème de M. Chasles démontre ici le principe des moments virtuels effectifs, et l'égalité qui s'en déduit exprime l'unique condition d'équilibre *nécessaire* et *suffisante*. Les lecteurs qui seraient curieux de bien saisir nos idées à cet égard, pourront consulter la théorie de l'équilibre de la vis à filet triangulaire, que nous avons publiée assez récemment.

Remarque II. Cette remarque (fig. 2) est dûe à M. Dubois qui s'exprime de la manière suivante : pour éviter les calculs précédents et pour obtenir plus facilement les résultats, sans perdre de vue le mouvement de la machine, dans toutes ses positions successives, on doit remplacer la géométrie analytique par la *géométrie comparée*, particulièrement applicable aux faits mécaniques. On voit d'abord qu'en construisant $AO=u$ dans ses véritables positions pour toutes les valeurs de l'arc δ depuis $\delta=0$ jusqu'à $\delta=2\pi$, l'extrémité O de AO parcourt la droite SK en partant de A vers S pour revenir en A, passer en B, et revenir encore en A à la fin d'une révolution complète du point B de la manivelle. On remarquera ensuite qu'en portant les valeurs successives du rayon vecteur u de la courbe polaire :

$$u=r\cdot\frac{X}{F}=r.\sin\varepsilon\left(1\pm\frac{r\cos\delta}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\delta}}\right)$$

et correspondantes aux valeurs successives de l'arc δ, on obtient la ligne $An_1Sn_2An_3Kn_4$ qui a deux points de rebroussement en A, et qui se trouve coupée, par le cercle de rayon $\frac{2}{\pi}r=\frac{7}{11}r$, en quatre points $n_1n_2n_3n_4$ qui donnent en AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 les quatre positions d'équilibre dynamique de la manivelle; elles font des angles de 34° et 47° avec la ligne centrale AC, par rapport à laquelle la figure est symétrique.

La facilité avec laquelle on obtient ainsi la solution graphique de la question, montre que la *géométrie comparée* est susceptible d'applications utiles en mécanique. Cette géométrie est la source de plusieurs découvertes anciennes et modernes; elle fournit la description mécanique de la droite, du cercle, des coniques, de la cycloïde, des spirales, etc.; elle fut peu cultivée jusqu'à l'époque de Monge qui eut l'idée heureuse d'employer le mouvement des éléments de l'étendue, comme un moyen d'exécution pratique indispensable dans la description des lignes et dans la génération des surfaces, en soumettant ainsi toutes leurs parties à la loi de continuité.

Remarque III. Le calcul et la détermination des quatre figures d'équilibre du système devient indispensable, dès qu'on veut calculer le poids du volant, propre à régulariser le mouvement de la machine à un degré donné. Soit C'C'' l'espace décrit par l'extrémité C de la bielle CB, pendant que la manivelle passe de la position 34° avec la verticale supérieure à la position 47° avec la verticale inférieure : Q marquant la charge, pourvu d'un bras de levier r' autour de l'axe A, P le poids du volant qui doit être calculé de façon que l'excès des vitesses angulaires extrêmes soit $\frac{1}{n}$ de la vitesse moyenne, et K_1 indiquant le rayon moyen du volant, on trouvera par le principe des forces vives :

$$2PK_1^2\Omega_1^2=\left(2F.C'C''-2Qr'\cdot\frac{99}{180}\cdot\pi\right).n.g.$$

ou en observant l'équation de condition $4Fr=2\pi Qr'$, qui résulte du mouvement périodique réglé, et traduisant en nombres :

$$PK_1^2\Omega_1^2=1{,}1022.n.\pi.Q.r'.$$

Mais si on répète ce calcul pour l'intervalle angulaire compris

entre les positions d'équilibre inférieures distantes de la verticale, on trouve

$$P.\Omega_{II}{}^2K_1{}^2=2,4696.n.\pi.Q.r'.$$

De la 3^{me} à la 4^{me} position on obtient :

$$P\Omega_{III}{}^2K_1{}^2=2,1622.n.\pi.Q.r';$$

et de la 4^{me} à la première on trouvera :

$$P.\Omega_{IIII}{}^2.K_1{}^2=1,726.n.\pi.Q.r'.$$

On pourrait se borner à prendre la moyenne des quatre résultats ainsi obtenus : mais on aura plus d'exactitude encore par la formule suivante :

$$P.v_1{}^2K_1{}^2=\frac{1}{16}\left(2\sqrt{2,1022}+\sqrt{2,4696}+\sqrt{1,7326}\right)^2.n.\pi.Q.r.$$

$$=2,0952.n.\pi.Q.r',$$

dans laquelle v_1 exprime la vitesse angulaire moyenne générale de l'arbre tournant. Dans le cas d'une manivelle à double effet, sollicitée par une force verticale constante, on aurait 2,0647 au lieu de 2,0952 pour coefficient numérique de $n.\pi.Q.r'$; de sorte que sous le rapport de la régularité du mouvement, la machine à guides parallèles de Maudsly est un peu moins avantageuse que le cas purement fictif d'une telle manivelle ; mais elle l'est un peu plus que la machine à balancier de Watt pour laquelle nous trouverons le coefficient 2,1553.

Remarque IV. Dès qu'on veut une fois s'enquérir des efforts de pulsion, de traction et de flexion des pièces du système, il faudra recourir au principe de la décomposition effective des forces, dont l'emploi exigera toutefois quelque précaution, surtout quand on voudra avoir égard au frottement de l'arbre sur ses coussinets et de celui du point C : dèslors la question ne peut être resolue exactement selon nous que de la manière suivante.

Décomposons la force F en deux : l'une suivant la normale à la rainure centrale CA aura la valeur :

$$F \text{ tang } \varphi$$

et l'autre suivant l'axe CB de la bielle aura la valeur :

$$F : \cos \varphi$$

mais celle-ci pourrait à son tour être remplacée par ses deux composantes orthogonales l'une

$$\frac{F\cos\lambda}{\cos\varphi} \text{ suivant BA}$$

l'autre $\frac{F\sin\lambda}{\cos\varphi}$ suivant la tangente en B :

Dans ces formules φ dénote l'angle de CB avec la verticale, et λ l'angle de CB prolongé avec AB : pour l'équilibre rationnel il est nécessaire et suffisant d'avoir :

$$\frac{F\sin\lambda}{\cos\varphi} = X :$$

ce qui ramène à un résultat déjà exposé sous une autre forme.

Pour établir l'équation d'équilibre physique, nommons N la résultante des forces Q, $\frac{F}{\cos\varphi}$, et ε l'angle de sa ligne d'action avec la normale à l'élément de contact du tourillon avec les coussinets : il viendra, f', f étant les coefficients des frottements en C, A et ρ le rayon des tourillons :

$$(F - f'F\,\mathrm{tang}\,\varphi)df = Q.r.d\delta + f.N\cos\varepsilon.\rho.d\delta.$$

or η étant l'angle de la normale en question, avec la verticale de Q, nous aurons par des principes connus :

$$N\cos\varepsilon = Q.\cos\eta + \frac{F.\cos(\varphi+\eta)}{\cos\varphi} = Q+F, \text{ à peu près ;}$$

car l'angle η étant très-petit, on peut prendre par approximation $\eta = 0$: de là on conclut :

$$(uf'\,\mathrm{tang}\,\varphi - f.\rho).F = Q(r+f\rho).$$

Quant aux efforts de traction et de pulsion des pièces CB, CA ; ils sont également connus d'après la décomposition des forces que nous venons d'effectuer.

§ 3. *Nouveau compas à ellipse.* Avant que de passer au cas de la machine à balancier et à double effet, il sera bon de faire connaître une remarque de géométrie assez curieuse : concevons que l'on place en un point quelconque M (fig. 3bis) intérieur ou extérieur, une pointe à tracer et recherchons la courbe décrite par cette pointe, pendant le mouvement alternatif de la bielle sur la rainure centrale CA ; si l'on pose

CM = const. = k, AP = NM = x, PM = AN = y, on déduit des deux triangles semblables CDB, CNM :

$$\text{NM} : r\sin\delta = k : l, \text{ d'où } \text{NM} = \frac{kr\sin\delta}{l} = x;$$

$$\text{MP} = \text{MQ} + \text{AD} = \text{MQ} + r\cos\delta.$$

Mais $\text{MQ} : l - k = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\delta} : l$, ce qui donne :

$$\text{MQ} = \frac{l-k}{l}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\delta} \text{ et}$$

$$\text{MP} = r\cos\delta + \frac{l-k}{l}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\delta} = y.$$

Eliminant δ de ces valeurs de x, y, on obtient :

$$\sqrt{k^2r^2 - l^2x^2} + (l-k)\sqrt{k^2 - x^2} = k\cdot y.$$

Equation du 4$^{\text{me}}$ degré qu'on mettra sous la forme suivante :

$$k^2y^2 - (l-k)^2(k^2 - x^2) - k^2r^2 + l^2x^2 = 2(l-k)\sqrt{(k^2 - x^2)(k^2r^2 - l^2x^2)};$$

mais il est préférable de conserver ici la 1$^{\text{re}}$ forme laquelle montre immédiatement que pour le cas de $l = r$, on obtient :

$$(2l-k)\sqrt{k^2 - x^2} = k\cdot y,$$

ou $$k^2y^2 + (2l-k)^2.x^2 = k^2.(2l-k)^2.$$

Cette équation convient à une ellipse dont les axes principaux sont dirigés suivant l'horizontale et la verticale du point A et qui ont pour demi-longueur respectivement k et $2l-k$: or ce résultat fournit immédiatement l'idée *d'un nouveau compas à ellipse* propre à tracer des ellipses de toute grandeur : il suffit d'un système articulé ACB dans lequel on prend la longueur de la bielle, égale à celle du bras de levier AB, après avoir fixé celui-ci par une extrémité A sur une rainure centrale, dans laquelle on fera glisser l'extrémité C de la bielle CB : alors une pointe à tracer, implantée en un point quelconque de la bielle mobile CB et chargée d'un léger poids, laissera sur le papier la trace elliptique de son mouvement.

Supposons qu'avec un appareil de ce genre déjà construit, on doive tracer une ellipse dont on donne le centre et les deux demi-axes principaux : soit A le $\frac{1}{2}$ axe suivant l'horizontale et B celui suivant la verticale : on aura $A = k$, et $B = 2r - k$.

La 1$^{\text{re}}$ de ces égalités fait connaître k, et la seconde montre qu'on doit prendre $2r = B + k = B + A$: c'est-à-dire qu'on doit prendre pour rayon de la manivelle le $\frac{1}{4}$ de la somme des longueurs des axes

entiers. Ainsi dans l'appareil construit on doit pouvoir augmenter ou diminuer à volonté la longueur AB, ce qui suppose qu'on puisse fixer successivement au même point A de la rainure différents points du levier : ou bien laissant A fixé sur AB, attacher le point B de CB plus près ou plus loin du centre A, et prendre ensuite CB en conséquence. Si l'instrument ne devait décrire qu'une seule courbe donnée, on le construirait en conséquence, en prenant $k=A, r=\frac{A+B}{2}$. Observons que si la pointe à tracer était placée sur le prolongement de BC, fait de B vers C, les demi-axes principaux de l'ellipse décrite seraient $A=k$, et $B=2r+k$: on peut remarquer aussi que si l'on rapporte le centre instantané de rotation à un système de coordonnées rectangles AC, CI, qui varient avec sa position, il est facile d'établir l'équation de la courbe qu'il décrit, et l'on en conclura que quand la longueur de la bielle devient égale au rayon de la manivelle, cette courbe du point I devient une circonférence de cercle deux fois plus grande que celle du point B.

Observons ensuite que d'après le théorème de MM. Bobilier et Chasles la droite MI, tirée du centre I au point décrivant M, considéré dans une de ses positions, est une normale à la courbe en ce même point.

Ainsi sur le plan d'une ellipse donnée on peut toujours tracer une circonférence de cercle concentrique, de chaque point de la quelle on pourra tirer une normale à la courbe avec la règle et le compas seulement : cette propriété à la quelle on est conduit si aisément par le théorème cité, a été reconnue aussi par M. Rousseau, un de nos anciens élèves de l'école militaire. En général on voit par ce théorème, que l'on peut souvent mener une normale à une courbe en un point donné, sans avoir besoin de tracer cette courbe : car la position du point décrivant étant seulement connue, de même que celle du centre de rotation instantané I, la ligne droite que déterminent ces deux points est toujours la normale cherchée.

Remarque I. La propriété de la normale à l'ellipse dont il vient d'être question est, croyons-nous, encore fort peu connue ; nous l'avons déjà signalée en 1837 et à cette époque nous avons démontré, dans le précis lithographié de notre cours de mécanique appliquée, le théorème de M. Chasles sur le mouvement infiniment petit des figures planes dans leur plan et dont l'énoncé se réduit à ceci : tout déplacement très-petit d'une figure plane dans son plan n'est autre chose qu'un mouvement de rotation élémentaire autour d'un

seul et même centre de rotation I du plan : on peut s'en convaincre par la méthode des superpositions géométriques ; on peut y parvenir aussi par le principe de la composition des mouvements. Le centre I se construit d'ailleurs par la rencontre des normales aux éléments décrits par deux points quelconques de la figure déplacée. Nous avons également travaillé sur le théorème de M. Chasles dans les trois dimensions, et que nous avons introduit dans notre cours de mécanique rationnelle dont le précis est lithographié depuis 1839.

Le théorème d'Euler étant une fois établi soit par la géométrie soit par le calcul, on peut encore démontrer, par la composition des mouvements, que tout déplacement infiniment petit d'un corps solide se compose d'un mouvement de translation et de rotation autour d'nn axe parallèle à la direction de la translation ; cette belle et remarquable propriété, qui est dûe à M. Chasles avait échappé à toute la perspicacité analytique de Lagrange et d'Euler.

La lecture de notre travail a conduit Monsieur Dubois notre collègue à faire diverses observations que nous voulons également faire connaître en ses propres termes.

Observations de M. Dubois : « La grande conception de Monge, « désignée sous le nom de géométrie comparée, est devenue aujour- « d'hui l'auxiliaire nécessaire pour résoudre des problèmes très- « variés en mathématiques ; on vient déjà d'en donner un exemple « en mécanique ; mais elle conduit aussi en analyse à la décompo- « sition, pour de certains paramètres, des polynomes à deux in- « connues x, y, en facteurs rationnels ; décomposition qui sem- « blait offrir de si nombreuses difficultés, qu'aucun analyste ne s'en « était encore occupé jusqu'à ce jour : pour donner une idée de « cette décomposition soit ce polynome :

$$« \quad y^2 - x^2 + a^2 = 0 \ldots \quad (I)$$

« Dans le cas du paramètre $a = 0$, on a ;

$$« \quad y^2 - x_2 = (y+x)(y-x) = 0.$$

« Ainsi l'équation $y^2 - x^2 = 0$ représente deux lignes droites qui « passent par l'origine et qui font un angle de 45° avec les axes « coordonnés. Mais le polynome (I) donne :

$$« \quad (y + \sqrt{x^2 - a^2})(y - \sqrt{x^2 - a^2}) = 0.$$

« Ici les deux facteurs sont irrationnels : ils représentent quatre « branches d'une même hyperbole qui viennent se raccorder sur « l'axe des x. Mais il peut arriver que dans un semblable raccor-

« dement les branches données par des facteurs irrationnels corres-
« pondent à des courbes différentes, comme on va le voir par un
« exemple, savoir l'équation :

$$\sqrt{k^2r^2-l^2x^2}+(l-k)\sqrt{k^2-x^2}=k.y.$$

« A cause des deux radicaux du second degré, elle devient du 4^me^
« degré par rapport aux coordonnées x, y ; en sorte qu'elle est le
« produit de quatre facteurs irrationnels :

« 1^er^ Ovale. $ky-(l-k)\sqrt{k^2-x^2}-\sqrt{k^2r^2-l^2x^2}$
« 2^me^ Ovale. $ky+(l-k)\sqrt{k^2-x^2}+\sqrt{k^2r^2-l^2x^2}$
« 3^me^ Ovale. $ky+(l-k)\sqrt{k^2-x^2}-\sqrt{k^2r^2-l^2x^2}$
« 4^me^ Ovale. $ky-(l-k)\sqrt{k^2-x^2}+\sqrt{k^2r^2-l^2x^2}$

« dont le 1^er^ exprime le premier ovale de la figure ; le second ca-
« ractérise l'ovale pointillé ; le 3^me^ exprime la même courbe, et le
« 4^me^ exprime l'ovale du 1^er^ facteur : pour $l=r$ le produit de ces
« quatre facteurs qui doit être nul, devient :

$$\left.\begin{array}{l}[ky-(2r-k)\sqrt{k^2-x^2}][ky+(2r-k^2)\sqrt{k^2-x^2}]\\ [k(y-\sqrt{k^2-x^2})][k.(y+\sqrt{k^2-x^2})]\end{array}\right\}=0.$$

« Et les facteurs irrationnels du second degré en y se reduisent
« par conséquent aux deux facteurs rationnels

« $k^2y^2-(2r-k)^2.(k^2x^2)$
« $k^2(y^2-k^2+x^2)$

« ce qui permet de poser :

« $k^2y^2-(2r-k)^2.(k^2x^2)=0$,
« et $y^2+x^2-k^2=0$.

« C'est-à-dire que pour cette valeur particulière du paramètre la
« courbe du quatrième degré (fig. 3) représentée par l'équation
« primitive, se change en deux courbes du second degré, une
« ellipse et un cercle. Or la géométrie comparée qui ne considère
« que les courbes susceptibles d'être décrites mécaniquement, telle
« que celles en question, aurait fait connaître sans calcul la possi-
« bilité de la décomposition du polynome considéré, en facteurs
« rationnels du second degré en y, pour le paramètre donné. En
« effet la courbe décrite par le point M de la bielle BC est un ovale
« fermé MEmF donné par le produit du premier et du 4^me^ des fac-
« teurs irrationnels énumérés plus haut ; et il faut le point M' d'une

« seconde bielle B'C' pour décrire l'ovale pointillé, tout-à-fait « égal au premier, et qui se trouve représenté par le produit des « 2me et 3me facteurs irrationnels du même polynome; ces deux « ovales placés symétriquement par rapport à l'axe YY' se coupent « en S et S' sur l'axe XX'; mais lorsque $l=r$, les deux ovales sont « formés chacun d'une demi-ellipse, et d'un demi-cercle (fig. 3bis), « et ces ovales au lieu de se couper sur l'axe des x viennent s'y rac- « corder, en sorte que les doubles raccordements ou osculations « donnent d'une part une ellipse entière et de l'autre un cercle, « c'est-à-dire deux courbes qui peuvent être représentées par les « facteurs devenus rationnels du second degré, d'irrationnels qu'ils « étaient avant la supposition de $l=r$.

« *Nota.* Les figures 5 et 3bis supposent $k<r$ et $<l$: les paramè- « tres r et l étant d'ailleurs des données quelconques :

Si nous avons bien saisi l'idée de M. Dubois nous ne sommes pas d'accord avec lui pour l'interprétation géométrique des résultats fournis par la supposition de $l=r$: voici notre manière de voir : tant qu'on a $l<r$, le point C de la bielle ne saurait jamais arriver dans son mouvement alternatif jusqu'au centre A : mais dès que $l=r$, il peut descendre jusqu'au centre et même plus bas, au moins idéalement, de sorte que dans son mouvement alternatif la bielle CB peut prendre toutes les positions inférieures et supérieures à la fois, ce qui donne l'ellipse entière par un seul mouvement géométrique. Quant au cercle $y^2+x^2-k^2=0$, de rayon k, il est fourni par l'analyse comme une solution possible d'après le mode de description, car en supposant que la bielle CB=AB soit d'abord couchée sur la manivelle, et faisant mouvoir ce double bras de levier, sans détacher l'une des pièces de l'autre, le point M décrira évidemment la circonférence de cercle dont il s'agit.

Examen du cas de la machine à balancier § 4). On sait généralement de quelle manière se fait la transformation du mouvement dans la machine ordinaire, à l'aide d'un parallélogramme articulé d'un balancier, d'une bielle et d'une manivelle ; de qu'elle manière on empêche la tige du piston de dévier sensiblement de la verticale, à l'aide d'une bride ou d'un contre-balancier, articulé à l'un des sommets du parallélogramme, et tournant par son autre extrémité autour d'un centre de rotation fixe d'un mouvement alternatif. — Examinons jusqu'à quel point la théorie peut nous éclairer sur les dimensions comparatives à donner aux différentes pièces principales

de la machine. Mais dès lors nous avons à résoudre la question suivante :

Déterminer dans la machine à balancier de Watt le rapport qui doit exister entre la puissance motrice de la vapeur et la résistance totale pour qu'il y ait équilibre dynamique dans le système.

Concevons que toutes les pièces de la machine soient réduites à leurs axes de symétrie, et formons le tracé géométrique de ces axes, pris dans une position quelconque GFEDCBA (fig. 4) pour laquelle le piston est poussé de bas en haut par le fluide moteur du cylindre. Si l'on prolonge FE jusqu'à sa rencontre O′ avec l'horizontale *Dm* du centre D, et l'axe CB de la bielle jusqu'au point de rencontre O de BC avec une droite AO parallèle au balancier CB, qu'en F on élève sur GF une perpendiculaire qui va couper DE en I′, et qu'enfin on prolonge AB, DC jusqu'à leur rencontre en I, on aura la construction indiquée pour la première fois par M. Poncelet, et à l'aide de la quelle on pourra résoudre tout ce qui se rapporte à la présente question, sans admettre avec l'auteur cité le principe des vitesses virtuelles. En effet soit fait;

$$AO=u,\ DO'=u',\ HAB=\delta,\ AB=r,\ CD=ED=B,$$

$MDC=LDE=\alpha$, MDL étant une position limite du balancier : si l'on nomme encore U la quantité de pression transmise par le piston moteur à l'extrémité E, suivant la tangente ou l'élément circulaire en ce point, il faudra que cette force étant prise en sens contraire fasse équilibre à la force F, et l'on aura par conséquent, df, et bd : marquant les chemins virtuels effectifs et contemporains des extrémités (F, E) du levier FE :

$$F.FI'=U.EI'.$$

Mais d'après le théorème de M. Chasles le déplacement instantané correspondant de FE n'étant qu'une rotation élémentaire $d\lambda$ de tous ses points autour du point I′, on aura en vertu de l'équation précédente :

$$F.FI'd\lambda=U.EI'.d\lambda.$$

Donc puisqu'on a évidemment $FI'.d\lambda=df$, et $EI'.d\lambda=Bd\alpha$, il viendra l'équation des moments virtuels :

$$F.df=U.B.d\alpha.$$

Si l'on considère ensuite que les deux figures semblables DO′E, EFI′ donnent FI′ : EI′ = u' : B, l'égalité des moments devient :

$$F.u'=U.B. \ . \ . \quad (1)$$

On voit donc que la quantité de force transmise au balancier est en raison directe de la distance $u'=DO'$, et inverse de la longueur B du bras de balancier; et comme la variation du mouvement est d'autant plus faible que les limites de cette pression transmise sont moins étendues, il s'ensuit qu'il faut éviter autant que possible les variations trop considérables de la longueur DO' : ainsi il faudra rendre l'excès du bras B sur la distance D*m* très-petit (Watt le réduit à une quantité $<0{,}0412.r$) et prendre EF suffisamment long, pour que la plus grande valeur de l'angle EF*m* reste très-petite. De cette manière les valeurs extrêmes de la quantité DO' n'auront entr'elles qu'une faible différence, et la force transmise au balancier restera à très-peu près constante.

Comme les bras CD, ED du balancier sont toujours égaux dans la pratique, il s'ensuit que l'extrémité C est aussi comme poussée constamment par une force tangentielle U ; ainsi en nommant X la résistance fictive, ramenée en B au bras de levier AB, et capable d'équilibrer la force U en C, il faut et il suffit pour l'équilibre que le moment de rotation de X autour de I soit égal et contraire à celui de U autour du même point : on aura donc

$$U.CI=X.B \ .$$

Si donc on nomme $d\gamma$ la rotation élémentaire de la bielle BC autour de I, correspondante à son déplacement instantané effectif, on aura aussi :

$$U.CI.d\gamma=X.BId\gamma.$$

Ou en observant que $CI.d\gamma=Bd\alpha$, et que $BId\gamma=rd\delta$, il viendra :

$$U.Bd\alpha=X.rd\delta.$$

D'où l'on conclut l'équation des moments virtuels effectifs des forces, savoir :

$$X.r.d\delta=F.df.$$

En outre si l'on remarque que le rapport $CI:BI=AO:r$, on obtient pour l'égalité des moments de rotation :

$$U.u=X.r. \ . \ . \quad (2) :$$

et en multipliant les équations (1, 2) membre à membre :

$$F.u.u' = X.B.r. \quad . \quad . \quad (3).$$

Ainsi pour la possibilité de l'équilibre dynamique permanent de la puissance et des résistances, il faudrait que la résistance totale, constamment réduite au bras de levier AB=r, pût varier en raison composée des deux longueurs u,u'; ce qui est impossible; puisque le plus souvent la puissance et la résistance ont des valeurs à-peu-près constantes: et même dans le cas contraire elles ne sauraient varier d'après la loi géométrique, exprimée par l'équation (3); donc l'équilibre dynamique dont il s'agit est impossible, et il s'ensuit que dans la machine à vapeur le mouvement uniforme et permanent est de lui-même impossible aussi.

Néanmoins pour se rapprocher encore en quelque sorte de cet état idéal, il faut resserrer, autant que faire se peut, les valeurs extrêmes du produit $u.u'$. Mais cette condition elle-même ne saurait être remplie d'une manière absolue, à moins que de faire ensorte que la plus grande valeur de u reste très-petite, puisque sa valeur minimum est u=o; donc il faut faire à la fois la bielle CB très-longue et le rayon r très-petit: mais dès lors la résistance X qu'il faut vaincre reste elle-même très-petite, ce qui offre un nouvel inconvénient qu'on pourra toutefois éviter en grande partie, en rendant la force motrice F plus considérable, afin de regagner par la grandeur de ce facteur ce que l'on perd par la petitesse de l'autre facteur $u.u'$: et afin d'atteindre à ce but, on devra tâcher de rendre le diamètre du piston, moteur le plus fort que possible: puisque toute autre chose égale, la pression F croit comme le carré du rayon du piston. La considération d'une déviation peu sensible de l'extrémité de la tige du piston en dehors de la verticale exige d'ailleurs que le bras du balancier soit fort long, afin que de lui-même le sommet F ne s'écarte pas beaucoup d'une même verticale, ce qui exige en même temps que les excursions du balancier par rapport à l'horizontale du centre D ne soient pas trop prononcées.

Si l'on compare ces résultats généraux avec ce qui se pratique en réalité depuis l'invention admirable de Watt, on peut se convaincre que cet homme extraordinaire a réalisé toutes les conditions essentielles que la théorie fait connaître, et l'on doit se plaire à signaler cet accord entre des recherches en apparence fort distinctes. En effet selon Watt la longueur du balancier étant 3,0825 fois la course du piston, et la distance horizontale entre le centre A et l'axe de la tige de piston étant 3 fois le diamètre de la manivelle, ou 3 fois la

course du piston. En outre la fraction 0,0825 étant d'après la juste remarque de M. Dubois plus petite que la flèche de l'arc total décrit par l'extrémité du balancier, la construction indiquée par de certains auteurs, qui prétendent placer le centre de l'arbre tournant sur la verticale de la corde de l'arc total du balancier devient impossible : à partir du centre D du balancier portons sur l'horizontale de ce centre et de chaque côté une longueur égale à trois rayons de manivelle, et par les deux points ainsi obtenus tirons deux verticales ; l'une marquera l'axe de la tige ou du cylindre moteur, et l'autre renfermera le centre A de l'arbre tournant. Ces deux verticales devront partager à peu de chose près en deux également les flèches des arcs entiers décrits par les extrémités du balancier : et telle doit être à très-peu près la construction même de Watt ; il en résulte que la distance DO′ diffèrera le moins possible de la demi-longueur ou du bras du balancier, et l'on conserve en même temps au côté du parallélogramme l'inclinaison nécessaire pour décider son mouvement d'articulation ; en outre la bielle ne fait franchir à la la manivelle son point zéro que quand son extrémité C′ est déjà revenue du point le plus haut ou le plus bas de l'arc alternatif du balancier : l'on réussit ainsi, ce qui est fort important, à empêcher la bielle et la manivelle de se trouver jamais en ligne droite quand la manivelle est verticale ; et le mouvement revolutif s'entretiendra ainsi avec plus de douceur et de facilité.

Quant à la manière de trouver le centre de rotation du contre-balancier et sa longueur, la construction indiquée par M. Poncelet est sans doute ici la plus avantageuse : on formera le parallélogramme articulé dans ses deux positions extrêmes et dans sa position moyenne : puis considérant le sommet M opposé à E dans chacune de ces trois positions, on fera passer une circonférence de cercle par les trois points ainsi obtenus : le rayon de cette circonférence sera la longueur de la bride, et son centre en sera le point d'attache. Watt construit et place cette pièce d'une manière différente.

En nommant α_1 le plus grand écart du balancier au-dessus de l'horizontale, on trouvera aisément la valeur approchée :

$$\sin \alpha_1 = \frac{r}{B} = \frac{2r}{2B} = \frac{1}{3,0825} :$$

Ce qui donne, d'après les proportions admises :

$$\alpha_1 = 18°.55'.$$

§ 4. (*bis*). Pour compléter la solution fournie par le théorème de Chasles, il reste à évaluer les efforts de *traction*, de *pulsion* et de *flexion* des pièces, et les pressions normales des surfaces d'appui; et pour cet effet il faut recourir au principe de la décomposition des forces: cette décomposition est ici possible de deux manières, soit en commençant par la résistance réduite au point B, soit en partant du sommet de la tige et de la force F; mais comme la première méthode altère la pression sur l'axe A, en grandeur et en direction la seconde méthode peut seule donner des résultats exacts lorsqu'on veut tenir compte des frottements; il faut donc l'employer à l'exclusion de l'autre: or en nommant O′ l'angle aigu en (O′), et E l'angle DEO′, on décomposera F suivant les deux lignes FE, FI′; l'effort suivant FI′ aura la valeur : $F\left(\frac{\cos O'}{\sin O'}\right)$:

l'effort suivant FE sera : $\frac{F}{\sin O'}$:

de là on déduit pour les forces suivant ED, et suivant la tangente en E :

$$\frac{F.\cos E}{\sin O'} \text{ suivant le bras ED :}$$

$$\frac{F.\sin E}{\sin O'} \text{ suivant la tangente } = \frac{Fu'}{B} = U.$$

Il y aura donc à l'extrémité C un effort tangentiel descendant $U = \frac{Fu'}{B}$, produisant suivant DC prolongé une force de traction $U.\left(\frac{\cos O}{\sin O}\right)$, et suivant la bielle une force de pulsion $\frac{U}{\sin O}$, O marquant l'angle aigu en (O) dans ABO. La force U : sin O, suivant CBO, produit suivant BA un effort de compression $\frac{U.\cos B}{\sin O}$, B étant l'angle CBA; et suivant la tangente une force $\frac{U.\sin B}{\sin O}$: on voit clairement par ce mode de décomposition que la pression des tourillons de l'arbre tournant contre les coussinets doit être la résultante N des forces $\frac{U}{\sin O}$, et Q qui se font équilibre autour de l'axe A de l'arbre tournant : Q désigne ici non pas la résistance reduite en B, mais la résistance véritable pourvue, par exemple, d'un rayon ou d'un

bras de levier r' par rapport au centre A. Or en désignant encore par ε l'angle de N avec la normale à l'élément de contact des tourillons sur les coussinets, la pression normale sera : N cos ε, le frottement sera f.N.cosε, f marquant un nombre connu, et le moment de rotation résistant aura la valeur : f.N.cosε.ρ. L'équation des effets virtuels aura la forme :

$$F \cdot \frac{u.u'}{B} \cdot d\alpha = Q.r'.d\alpha + f.N.\cos\varepsilon.\rho.d\alpha$$

On ne tient compte que du frottement de l'arbre tournant : en considérant également celui du bras du balancier, on ne rendrait pas la question plus difficile. En opérant par approximation, on déduira de cette équation :

$$F = Q \cdot \frac{B}{u'}\left(\frac{r'+f\rho}{u-f\rho}\right).$$

§ 5). Pour déterminer la moyenne totale des résistances ramenées au bras de levier de la manivelle, qu'il faut appliquer à la machine, afin que son mouvement soit au moins périodique et reglé, on doit exprimer l'égalité des quantités de travail de la puissance élastique de la vapeur, et de celle des résistances ainsi réduites : ainsi en nommant X_1 cette résistance réduite, on fera d'abord :

$$2\pi.r.X_1 = 4F.r \text{ et } X_1 = \frac{2}{\pi} \cdot F = 0{,}64.F \text{ environ.}$$

Réciproquement la valeur moyenne réduite des résistances étant donnée, on calculera la force F, par l'équation :

$$F = \frac{1}{2}\pi.X_1 = 1{,}5708.X_1.$$

Nommant donc γ la force élastique de la vapeur évaluée en kilogrammes et par centimètre quarré de surface, et K le rayon du cylindre ou piston moteur, exprimé en centimètres, ou aura : $F = \gamma.\pi K^2$: partant :

$$K = \frac{\sqrt{X_1}}{\sqrt{2\gamma}},$$

pour la valeur du rayon du cylindre : ce ne sera là qu'une 1re valeur approchée, si l'on entend simplement par X_1 la résistance

utile réduite ; mais un plus haut degré d'exactitude ne sera pas plus difficile à obtenir dans chaque cas donné

Calculons encore l'excès du travail moteur sur le travail résistant dans un intervalle donné : on voit clairement que quand le piston décrit le chemin f, cet excès se réduit à l'expression :

$$\varepsilon = \mathrm{F}.f - \frac{2}{\pi}.\,\mathrm{F}.r.\vartheta = \mathrm{F}.\left(f - \frac{2}{\pi}.r.\vartheta\right)$$

et toute la difficulté consistera à obtenir les deux chemins contemporains f et ϑ l'un en fonction de l'autre. En observant qu'à cause de l'équation (3) et de celle des moments virtuels on a :

$$df = \frac{u.u'.d\vartheta}{\mathrm{B}}$$

L'on peut faire aussi :

$$\varepsilon = \mathrm{F}.\int \frac{u.u'}{\mathrm{B}}\,d\vartheta - \frac{2\vartheta}{\pi}.r.\mathrm{F}$$

et pour évaluer l'intégrale définie du second membre, il faudrait connaître la forme analytique rigoureuse des variables u, u' en fonction de ϑ ; ce qui constitue une difficulté sans doute insurmontable, quant à l'évaluation régoureuse de l'intégrale. Une recherche non moins importante et encore fort difficultueuse, c'est celle des positions d'équilibre dynamique instantanées du système ; elles auront évidemment lieu quand les quantités d'action instantanées de la puissance et des résistances sont égales entr'elles : elles sont donc données par l'équation de condition :

$$\frac{u.u'}{\mathrm{B}} - \frac{2r}{\pi} = 0.$$

Or en supposant que u,u' soient exprimées en fonction de la variable ϑ, on les substituera dans cette équation la quelle fera connaître par suite les valeurs de ϑ, correspondantes aux figures d'équilibre de la machine. Ainsi abstraction faite des difficultés analytiques que l'on attaquera plus bas sous le point de vue des approximations, la question proposée se trouve complètement résolue.

§ 6). Le procédé graphique supplée ici d'une manière remarquable aux inconvénients du procédé analytique, et en supposant toutes les constructions bien exécutées, on pourra obtenir une solution pratique suffisamment approchée. En effet construisons les figures

du système dans différentes positions, convenablement rapprochées, et embrassant cependant les positions limites. A l'aide de ces figures traçons une courbe (C) qui ait les différentes valeurs de u pour abscisses et pour ordonnées les valeurs correspondantes de $\frac{u.u'}{B}$: on n'aura plus qu'à trouver sur cette courbe avec le compas, une ordonnée $\frac{2}{\pi}.r$, mesurer l'abcisse correspondante, et construire la figure du système qui réponde à ces valeurs de $\left(\frac{uu'}{B}, u\right)$ ou de u,u': ce sera la position d'équilibre demandée: cette même courbe fera connaître par sa plus grande ordonnée la figure de la machine dans laquelle l'énergie de rotation de la force motrice F. $\left(\frac{u.u'}{B}\right)$ est un maximum.

Après avoir construit différentes positions du système, et mesuré ensuite les valeurs correspondantes de u,u', on pourrait aussi calculer les autres par voie d'interpolation.

Pour mieux compléter la solution graphique de la question, il faut aussi tracer la courbe (C') décrite par le point de rencontre (O) de la bielle prolongée avec une droite AO parallèle au balancier : cette courbe aura à-peu-près la forme d'un *huit* (∞) horizontal. On mesure sur la courbe (C) l'ordonnée $\frac{2r}{\quad}$, puis l'abscisse correspondante u : on décrit ensuite du point A et avec un rayon u une circonférence qui coupe la courbe (C') en quatre points, qu'on peut nommer P_1,P_2,P_3,P_4 : les quatre rayons AP_1,AP_2,AP_3,AP_4 feront connaître les quatre positions d'équilibre dynamique de la machine. En effet concevons qu'on tire par le centre de rotation D du balancier des parallèles à ces quatre rayons AP_1,AP_2.... la première parallèle à AP_1 par exemple coupera l'arc alternatif du balancier en un point C_1, je suppose ; de ce point comme centre avec un rayon égal à la bielle, on décrit un arc qui coupera la circonférence de la manivelle en un point β_1 : on tirera la droite $C_1\beta_1$ et le rayon $A\beta_1$: la figure $A\beta_1C_1DE_1$ marquera une des quatre positions d'équilibre demandées. Si le tracé a été bien exécuté, il faudra que les trois points $C_1\beta_1P_1$ soient sur une même droite, ou que $C_1\beta_1$ prolongé vienne passer par le point P_1 : on tracera de même les autres figures d'équilibre de la machine. M. Dubois simplifie encore cette construc-

tion de la manière suivante : on prend $v=\frac{u.u'}{B}$ pour rayon vecteur d'une courbe polaire, ayant son pôle en A (fig. 4) et pour variable angulaire l'angle ou l'arc BAH$=\delta$. D'abord on voit qu'en construisant AO$=u$ dans sa vraie position pour toutes les valeurs δ entre O et 2π, l'extrémité (O) de AO décrit la courbe en forme de huit OSKA ; dans la première machine cette courbe est la ligne droite SK (fig. 2). La courbe OSKA sert ensuite à construire la courbe polaire de rayon vecteur v. A cet effet décrivons du centre A avec un rayon DE$=$B un cercle L'E'M'C' ; et sur son diamètre horizontal M'L' prenons la droite AO'$_1$=DO'$=u'$; portons-la ensuite par un arc de cercle AO'$_1$ sur le prolongement de la manivelle AB, c'est-à-dire suivant Am=AO'$_1$; prolongeons AO$=u$ en E', et joignons ce point E' à celui m ; par le point O on tire On parallèle à E'm ; le point n ainsi obtenu appartient à la courbe polaire cherchée, puisqu'on a :

$$An : AO = Am : AE', \text{ ou } An = \frac{u.u'}{B} = v.$$

On passe par le moyen d'une construction semblable de tous les points de la courbe en *huit horizontal*, aux points correspondants de la courbe polaire qui a un point de rebroussement en A.

Si du centre A avec un rayon égal $\frac{2}{\pi}r=\frac{7}{11}r$ on décrit un cercle, il coupera la courbe polaire (v,δ) ainsi construite en quatre points n_1, n_2, n_3, n_4, qui donnent en AB$_1$, AB$_2$, AB$_3$, AB$_4$ les quatre positions d'équilibre dynamique instantanées de la machine : ces positions font avec la verticale AH les angles respectifs HAB$_1$= 33° 40', H'AB$_2$=45° 40', H'AB$_3$=47° 30'', HAB=34° 15'.

§ 7). Essayons présentement de trouver, par un calcul au moins approché, les principales conditions auxquelles il faut soumettre le tracé géométrique de la machine. A cet effet nous commencerons par le simple cas d'un système articulé, formé par un balancier et par une bride dont les deux extrémités mobiles se trouvent liées à charnières aux extrémités d'une barre rigide à laquelle on attache quelque part la tige du piston ; ensuite nous passerons au cas plus ordinaire et plus avantageux du balancier à parallélogramme articulé, ce qui conduit au cas même de la machine de Watt. Nous aurons à achever ainsi ce que Prony a déjà exposé sur le même sujet dans son architecture hydraulique.

§ 8) Soient donc (fig. 5) DE, FK deux leviers assujettis à tourner autour des points d'attache D, K, et liés entr'eux par un 3^{me} levier rigide EF; faisons la longuenr du balancier DE$=d$, la longueur de la bride ou du contre-balancier KF$=b$, la longueur du levier intermédiaire ou EF$=c$, la distance entre les centres D, K ou DK$=a$, la projection horizontale de cette distance ou DK'$=a'$, la projection verticale ou KK'$=a''$: en considérant le système articulé des trois leviers dans l'une quelconque de ces positions pour laquelle l'inclinaison de DE sur l'horizontale soit β, on désignera par δ et γ les inclinaisons respectives des côtés KF, EF sur la même horizontale, et il faudra pouvoir calculer δ, γ en valeur des constantes et de la variable indépendante β. Nous admettrons que les angles β, δ, γ soient positifs pour une position quelconque du système, inférieure à l'horizontale du point D, et que le sommet F soit inférieur à cette même horizontale ; que les angles aigus β, γ qui ont leurs sommets en D, K soient tournés dans le même sens, et que l'angle δ exprime l'angle aigu formé en K, partant qu'il soit tourné en sens contraire. En remarquant avec Prony que la longueur a' exprime la somme des projections horizontales des trois lignes b,c,d, tandis que a'' est la somme des projections verticales, on obtient par l'inspection de la figure (5) :

$$\left.\begin{aligned} a' &= b\cos\delta + c\cos\gamma + d\cos\beta. \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\ a'' &= d\sin\beta + c\sin\gamma - b\sin\delta. \quad . \quad . \quad . \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

Eliminant γ de ces deux équations, on en déduit :

$$\frac{c^2-a^2-b^2-d^2}{2bd} = \cos\delta\cos\beta - \sin\delta\sin\beta - \frac{a'}{b}\cos\beta - \frac{a'}{d}\cos\delta$$
$$- \frac{a''}{b}\sin\beta + \frac{a''}{d}\sin\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Eliminant δ des mêmes équations, on trouve :

$$b^2 = (a'-d\cos\beta - c\cos\gamma)^2 + (a''-d\sin\beta - c\sin\gamma)^2 \ldots \quad (4)$$

ou :

$$b^2-a^2-d^2-c^2 = -2a'd\cos\beta - 2a'.c.\cos\gamma + 2cd\sin\beta\sin\gamma$$
$$-2.c.d.\cos\beta\cos\gamma - 2a''.d.\sin\beta + 2c.d.\sin\beta\sin\gamma.$$

L'équation (3) fera connaître δ en valeur de la variable β, e l'égalité (4) donnera γ en fonction de cette même variable.

§ 8bis). Considérons maintenant un point quelconque intermé-

diaire M du levier rigide EF, et supposons qu'on y suspende en ce point la tige d'un piston auquel est censée appliquée la force motrice du fluide de la vapeur, contenue d'ailleurs dans un cylindre vertical bien alezé, placé par son axe dans la ligne verticale du mouvement. En nommant x, y l'abscisse horizontale et l'ordonnée verticale du point M par rapport au point D, centre de rotation du balancier DE, et faisant $EM=n.EF=n.\ c$, puis observant que : $x=DE'+E'P'$ et que d'un autre côté : $x=DK'-K'F'-P'F$, on obtiendra les équations :

$$\left.\begin{array}{ll} & x=\delta\cos\beta+n.c.\cos\gamma. \\ \text{et} & x=a'-b.\cos\delta-(1-n)\cos\gamma. \end{array}\right\}\ldots\ (5)\ (6)\ .$$

lesquelles fournissent par l'élimination de γ :

$$x=(1-n)d.\cos\beta+n(a'-b\cos\delta)\ldots\ (7).$$

Pour trouver l'ordonnée y, on observera encore avec Prony qu'on a simultanément :

$$P'M=EE'+MP, \text{ et } P'M=F'K+KF-FQ\ ;$$

ce qui donnera :

$$y=d\sin\beta+n.c.\sin\gamma.\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$
$$y=(1-n)d.\sin\beta+n(a''+b\sin\delta).\ .\ (9)$$

En substituant dans les équations (7 et 9) la valeur de δ exprimée en β, et déduite de l'égalité.. (3), on n'aura plus qu'à éliminer β entre les deux nouvelles équations qu'on en déduirait, pour obtenir l'équation de la courbe décrite par le point M, et exprimée en cordonnées rectangles x, y. — Mais avant tout il importe de s'attacher à l'objet principal que l'on a ici en vue.

Pour déduire les cordonnées X, Y, du sommet E de celles du point M, il suffit évidemment de prendre $n=1$, dans les égalités (5, 6, 7, 8, 9) : on obtient ainsi :

$$X=d\cos\beta+c.\cos\gamma.\ .\ .\ .\ (10).$$
$$X=a'-b.\cos\delta.\ .\ .\ .\ .\ .\ (11).$$
$$Y=d\sin\beta+c.\sin\gamma.\ .\ .\ .\ .\ (12).$$
$$Y=a''+b\sin\delta\ .\ .\ .\ .\ .\ (13).$$

Nommons $\beta_1\ \gamma_1\ \delta_1$, $\beta_{11}\ \gamma_{11}\ \delta_{11}$ les valeurs extrêmes des variables, les premières correspondant à la position la plus profonde, et les secondes à la position la plus élevée du système ; désignons aussi par δ_0, γ_0 les valeurs de δ, γ répondant à $\beta=0$: en adoptant une nota-

tion semblable pour les coordonnées rectangles de M, considéré dans ces positions particulières, on trouvera, d'abord pour la longueur de la course :

$$y_{\text{I}} - y_{\text{II}} = (1-n)d.(\sin\beta_{\text{I}} + \sin\beta_{\text{II}}) + nb(\sin\delta_{\text{I}} + \sin\delta_{\text{II}}) = \text{etc.}$$

et pour la déviation du point M de part et d'autre de la verticale :

$$x_0 - x_{\text{I}} = d(1-\cos\beta_{\text{I}}) + n.c.(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_{\text{I}}),$$
$$x_0 - x_{\text{II}} = d(1-\cos\beta_{\text{II}}) + n.c.(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_{\text{II}}).$$

Or il importe évidemment d'avoir une déviation insensible pour chacune des positions extrêmes à la fois : ainsi il faudrait pouvoir poser à la fois :

$$d(1-\cos\beta_{\text{I}}) + n.c.(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_{\text{I}}) = 0,$$
$$d(1-\cos\beta_{\text{II}}) + n.c.(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_{\text{II}}) = 0.$$

Et il suffira de remplir une seule de ces conditions, dès qu'on pourra arranger les choses de façon à obtenir $\beta_{\text{II}} = \beta_{\text{I}}$, et $\gamma_{\text{II}} = \gamma_{\text{I}}$: nous voyons donc par là *qu'il faut rendre égales entr'elles les excurtions extrêmes du balancier de part et d'autre de l'horizontale de son point fixe* : la valeur de x montre aussi que les angles β et δ doivent rester au dessous d'un petit nombre de degrés, et que si l'on prend l'angle γ_0 très-proche de 90°, l'angle γ doit aussi rester très-proche de sa valeur initiale ; ces restrictions admises, on voit qu'on peut disposer de la quantité arbitraire n, en la choisissant de telle façon que les déviations du point M, considéré dans les positions extrêmes, soient rigoureusement nulles ; car on aura à faire pour cela

$$\beta_{\text{II}} = \beta_{\text{I}} ;\ \gamma_{\text{II}} = \gamma_{\text{I}} \text{ et } n = d.\left(\frac{1-\cos\beta_{\text{I}}}{\cos\gamma_{\text{I}} - \cos\gamma_0}\right).$$

Mais comme l'angle γ dépend de β, rien ne prouve qu'on puisse disposer de cet angle par la condition de $\gamma_{\text{II}} = \gamma_{\text{I}}$: reste donc à savoir si cette condition peut être remplie d'une manière rigoureuse, ou au moins approchée : à cet effet nous remplacerons dans l'équation (3) $\cos\gamma$ par 0, et dès lors celle-ci donnera :

$$c\sin\gamma = a'' - d\sin\beta \mp \sqrt{b^2 - (a' - d\cos\beta)^2}.$$

Donc puisque $\sin\gamma$ ne doit pas s'écarter sensiblement de l'unité, il faudra que les constantes c, a'', d, b, β satisfassent à-peu-près à la condition :

$$(c + d\sin\beta_{\text{I}} - a'')^2 = b^2 - (a' - d\cos\beta_{\text{I}})^2 ;$$

ou en prenant $\cos\beta_{\text{I}} = 1$, et $\sin\beta_{\text{I}} = \beta_{\text{I}}$:

$$(c+d\beta_1-a'')=\sqrt{b^2-(a'-d)^2}.$$

Donc il faudra prendre les arbitraires c, b, d, a', a'' telles que cette équation donne pour β_1 une valeur peu considérable. Si l'on choisit ensuite la valeur de x exprimée en δ, β, on trouvera aisément :

$$x_0-x_1=(1-n)d+n(a'-b\cos\delta_0)-(1-n)d\cos\beta_1-n(a'-b\cos\delta_1)$$
$$=(1-n)d(1-\cos\beta_1)-nb(\cos\delta_0-\cos\delta_1).$$

En cherchant de même la valeur de x_0-x_{11}, et mettant la condition que les déviations extrêmes par rapport à la verticale de la position intermédiaire soient nulles à la fois, on trouve de nouveau que les excursions β_1 β_{11} doivent être nulles, et que l'on doit choisir l'indéterminée n d'après la condition :

$$n=\frac{d(1-\cos\beta_1)}{d(1-\cos\beta_1)+b(\cos\delta_0-\cos\delta_1)} \text{ et}$$
$$n=\frac{d.(1-\cos\beta_{11})}{d(1-\cos\beta_{11})+b(\cos\delta_0-\cos\delta_{11})}$$

et pour que ces deux valeurs de n s'accordent ensemble, il faut avoir à la fois $\beta_{11}=\beta_1$, et $\delta_{11}=\delta_1$: or l'angle δ_1 est donné par l'équation même qui fait connaître δ_1 en changeant $+\beta_1$ en $-\beta_{11}$ ou en $-\beta_1$, et $+\delta_1$ en $-\delta_{11}$; mais l'équation (3) devient, quand on pose pour abréger :

$$\frac{c^2-a^2-b^2-d^2}{2.b.d}=f :$$

$$f=\cos\beta_1\cos\delta_1-\sin\beta_1\sin\delta_1-\frac{a'}{b}\cos\beta_1-\frac{a'}{d}\cos\delta_1-\frac{a''}{b}\sin\beta_1$$
$$+\frac{a''}{d}\sin\delta_1$$

partant

$$f=\cos\beta_1\cos\delta_{11}-\sin\delta_{11}\sin\beta_1-\frac{a'}{b}\cos\beta_1-\frac{a'}{d}\cos\delta_{11}+\frac{a''}{b}\sin\beta_1$$
$$-\frac{a''}{d}\sin\delta_{11}$$

et par approximation :

$$f=1-\frac{a'}{b}-\frac{a'}{d}-\frac{a''}{b}\beta_1+\frac{a''}{d}\delta_{11},$$

$$f=1-\frac{a'}{b}-\frac{a'}{d}+\frac{a''}{b}\beta_1-\frac{a''}{d}.\delta_{11}.$$

Ces deux équations de condition seront seulement compatibles entr'elles dans le cas de $\delta_{11}=\delta_1$, si l'on prend :

$$b\delta_1-d.\beta_1=0;$$

et elles deviendront toutes deux dans ce cas :

$$f=1-\frac{a'}{b}-\frac{a'}{d}.$$

Si donc on établit entre les constantes a, b, c, d, a' cette dernière condition, et que l'on fasse égales entr'elles les deux excursions du balancier, l'excursion du contre balancier sera à celle de la première pièce, dans la raison réciproque de leurs longueurs; et les déviations extrêmes du point M du levier CD seront nulles, si l'on choisit le point M d'après la condition ;

$$n=\frac{1}{1+\frac{b}{d}\left(\frac{1-\cos\delta_1}{1-\cos\beta_1}\right)}=\frac{1}{1+\frac{b}{d}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{d\beta_1}{b}\right)}{1-\cos\beta_1}\right)}$$

Il est bien entendu de soi-même que les résultats ainsi obtenus ne sont que des approximations qui toutes fois suffisent pour montrer que les constantes sont loin d'être arbitraires, puisqu'il est avantageux de les soumettre aux équations de condition qu'on vient de reconnaître. Ainsi par exemple les quantités n et δ_1 sont entièrement déterminées dès qu'on se donne β_1 et le rapport de b à d.

On a supposé $\cos\delta_0=1$ dans la valeur de n, et cette même supposition étant appliquée aux équations (1, 2), fournit les résultats;

$$a'=b+c.\cos\gamma_0+d=b+d$$
$$a''=d\beta_1-b.\delta_1+c\sin\gamma_0=c\sin\gamma_0=c.$$

Or ces deux dernières, considérées comme rigoureuses ou approchées, selon qu'on aura à la fois exactement ou à peu près : $\beta=0$, $\gamma=90°$, comprennent l'équation de condition qui donne f, laquelle devient par conséquent inutile dès qu'on tient compte des valeurs $a''=c$ et $a'=b+d$;

Exemple. Dans le cas de $b=d$, on obtient $n=0,5$; de sorte que ce sera le point milieu de EF qui donnera les moindres déviations extrêmes.

Dans le cas de $b=\frac{3}{2}d$ et de $\beta_1=18°$, on trouve $n=0{,}6112$:

Tredgold qui adopte l'hypothèse différente de $\beta=\beta_1$ et de $\gamma=90°$ à la fois comme plus avantageuse, trouve par un règle différente $n=0{,}602$: mais sa règle nous paraît moins sûre que la nôtre.

§ 9). Considérons à la fin le cas du parallélogramme articulé, dans la machine à balancier ordinaire. Prolongeons (fig. 6) l'axe du balancier primitif DN d'une quantité arbitraire EN et sur les droites EN, NM formons un parallélogramme articulé ENMF dont le sommet F soit le point de suppension de la tige du piston : la nouvelle équation à résoudre d'abord se réduit à déterminer les dimensions du système, de façon que les déviations du sommet F de part et d'autre de la verticale ou de l'axe du cylindre moteur soient insensibles, l'effort qui sollicite la tige du piston à la déviation restant très-petit ; de sorte que le cylindre ne cesse pas d'être bien alezé, et que la tige reste à très-peu près rectiligne. Or on se convaincra d'abord facilement que cet effort restera assez faible, même dans ses valeurs extrêmes, si les côtés EF, NM, constamment parallèles entr'eux, ne peuvent prendre qu'une très faible inclinaison sur la verticale dans l'un et dans l'autre sens.

En outre la quantité de pression transmise à chaque instant au balancier variera ainsi entre des limites plus resserrées et il résultera de là une moindre irrégularité de mouvement ; ainsi dans les équations de condition que nous aurons à établir, nous pourrons faire constamment $\cos\gamma=0$, $\sin\gamma=1$; car nous ne voulons ici que des approximations.

Cela posé, admettons les notations déjà posées (dans le premier exemple) ; et faisons $EN=c'$, de sorte que le rayon du balancier total soit maintenant $d+c'$: que l'on tire du sommet la verticale $FP=z$, et qu'on fasse l'abscisse horizontale $DP=u$: si l'on observe après cela que le côté MF, projeté horizontalement, a la valeur $c'\cos\beta$, et que suivant la verticale sa projection vaut $c'\sin\beta$, on n'aura plus qu'à augmenter les coordonnées du sommet M de ces projections pour obtenir celles du sommet F ou de l'extrémité de la tige : ainsi l'on obtiendra à l'aide des équations (10, 11, 12, 13) :

$$\left.\begin{aligned} u&=d\cos\beta+c\cos\gamma+c'\cos\beta\\ &=a'-b\cos\delta+c'\cos\beta, \end{aligned}\right\}\ \ldots\ (a).$$

$$\left.\begin{aligned} z&=d\sin\beta+c\sin\gamma+c'\sin\beta\\ &=a''+b\sin\delta+c'\sin\beta. \end{aligned}\right\}\ \ldots\ (b).$$

On calculera d'ailleurs γ en β et δ en β à l'aide des équations (3) et (4) qui subsistent par le cas actuel comme pour celui du problème précédent. Remarquons encore que si l'on pose : $d+c'=d'$ on obtient :

$$\left.\begin{aligned} u &= d'\cos\beta + c\cos\gamma \\ z &= d'\sin\beta + c\sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (c).$$

Or il est aisé de reconnaître par ces dernières que la grandeur de la course du piston est $d'(\beta_I+\beta_{II})$, tandis que dans le système du premier cas elle vaut seulement $d\cdot(\beta_I+\beta_{II})$; de sorte que quand il faut obtenir une longueur de course donnée, le parallélogramme articulé est préférable à ce premier moyen de transformation, en ce qu'il exige un emplacement moins considérable.

La première formule (c) montre aussi que la valeur des déviations extrêmes étant à-peu-près :

$$d'(1-\cos\beta_I) \text{ et } d'(1-\cos\beta_{II}),$$

il importe de rendre égales entr'elles les excursions du balancier, afin d'avoir au moins des déviations de même valeur ; car en admettant par exemple que le jeu des pièces puisse permettre l'une de ces déviations, et à plus forte raison les déviations intermédiaires, il s'en suivra que l'autre déviation avec ses intermédiaires sera également possible et s'effectuera d'elle-meme sans flexion sensible de la tige. La même formule montre encore, à cause de la valeur insensible de $\cos\gamma$, que l'on doit rendre l'excursion du balancier la plus faible possible ; ce qui ne pourra se faire, la course du piston étant donnée à l'avance, qu'à la condition que la longueur du bras d' du balancier soit aussi grande que possible, selon le lieu de l'emplacement et les conditions de stabilité et de rigidité du système.

Examinons présentement de plus près les deux dernières équations des systèmes (a) et (b) : elles sont :

$$\left.\begin{aligned} u &= a' - b\cos\delta + c'\cos\beta \\ z &= a'' + b\sin\delta + c'\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (d).$$

Il est entendu que dans cette valeur de z, $\sin\delta$ et $\sin\beta$ doivent être changés en $-\sin\delta$, $-\sin\beta$, quand les deux bras DN, KM, se trouvent à la fois au-dessus des horizontales, passant par leurs centres de rotation. Mais maintenant on trouve l'étendue de la course égale à $b(\delta_I+\delta_{II})+c'(\beta_I+\beta_{II})$, tandis que l'équation (c) avait donné $d'(\beta_I+\beta_{II})$: de cette double valeur de la course on conclut la relation :

$$b(\delta_1+\delta_{11})=d(\beta_1+\beta_{11}).$$

Or on démontrerait aisément, à cause qu'il doit y avoir égalité au moins entre les déviations extrêmes, que l'on doit avoir : $\delta_{11}=\delta_1$, dès qu'on a $\beta_{11}=\beta_1$: cette relation donnera donc :

$$b.\delta_1=d.\beta_1.$$

Cette équation fera connaître la longueur de la bride c', dès que β_1 et δ_1 seront donnés ; on aura ensuite les déviations extrêmes par la première équation (d), savoir :

$$u_0-u_1=c'(1-\cos\beta_1)-b(\cos\delta_0-\delta_1),$$
$$u_0-u_{11}=c'(1-\cos\beta_{11})-b(\cos\delta_0-\cos\delta_{11}).$$

δ_0 marquant la valeur de δ qui répond à $\beta=0$: on voit qu'elles deviennent égales, si l'on prend $\beta_{11}=\beta_1$ et $\delta_{11}=\delta_1$, et que leur commune valeur est d'autant moindre que la différence entre b, c' et que celle de β_1,δ_1 est moindre ; donc il sera avantageux de prendre les constantes b c' d à-peu-près égales entr'elles, ce qui rendra en effet les quantités δ_1 β_1 très-peu différentes, et en même temps l'écart u_0-u_1 en sera très-petit. On ne saurait d'ailleurs jamais avoir $u=$constante, puisque cette condition donnerait ; $c'\cos\beta-b\cos\delta=$ constante $=a'$: donc en substituant dans (3) cette valeur nouvelle de δ en β, on en tirerait pour β une valeur constante, ce qui est absurde, ou ce qui supposerait du moins la machine au repos.

§ 10. Mais en admettant approximativement avec Prony que $u=$ constante, ce qui donne $du=0$, on obtient :

$$b.d\delta=-\frac{c'\sin\beta}{\sin\delta}d\beta.$$

Substituant cette valeur de $b.d\delta$ dans l'équation :

$$dz=b\cos\delta.d\delta+c'\cos\beta.\,d\beta,$$

on obtient : $\dfrac{dz}{d\beta}=\dfrac{c'.\sin\beta}{\operatorname{tang}\delta}+c'.\cos\beta.$

Donc puisque le rayon total du balancier est $d+c'$, et que le principe des moments virtuels se trouve déjà démontré pour le cas actuel, on aura, en nommant K la résistance de la machine, ramenée au bras du balancier :

$$\frac{K}{P}=\frac{dz}{(d+c')d\beta}=\frac{c'}{d+c'}\left(\cos\beta+\frac{\sin\beta}{\operatorname{tang}\delta}\right)$$

Et si l'on veut avoir le rapport $\frac{K}{P}$ en fonction de la seule variable β, on calculera au préalable la quantité δ à l'aide de l'équation (3).

§ 11). Le calcul du N° précédent auquel Prony s'est arrêté, ne donne qu'une partie de la solution de la question que nous voulons traiter ; car en définitive, il faut trouver le rapport d'équilibre des puissance et résistance, celle-ci étant ramenée au bras de levier de la manivelle. Soit donc (fig. 9) A le centre de rotation et N'AN une position quelconque du balancier ; N'D' la bielle qui transmet le mouvement à la manivelle D'B' dont le centre est en B' : soit AK' l'horizontale indéfinie du centre A : B_1B_{11} étant les points extrémes de l'arc total du balancier ; nommons Q le point de rencontre de AK' avec la corde B_1B_{11} qui est exactement ou à très-peu près verticale, et H' le point d'intersection de la bielle avec la ligne AK' : soit encore B'L' l'horizontale du point B', et faisons maintenant,

$$N'AK'=\beta, N'H'A=\eta, D'B'L'=\delta, B'D'=r.$$

Si l'on admet, ce qui est vrai par approximation, que la corde prolongée B_1B_{11} passe par le centre B' de l'arbre tournant, et que du centre A on abaisse une perpendiculaire AP sur l'horizontale du centre B', on aura :

1° AP=projection verticale B'D'+ projection verticale de D'N' — projection verticale de AN' :

2° AQ+ projection horizontale de B'D'= projection horizontale AN'+projection N'D' :

Si donc on remarque que la ligne AP est à très-peu près égale à $l+r-B_1Q=l+r-r=l$, on aura :

$$r\sin\delta+l.\sin\eta-d'.\sin\beta=l$$
$$d'\cos\beta_1+r\cos\delta=d'.\cos\beta+l\cos\eta.$$

et par l'élimination de la quantité η on en déduit ;

$$l^2=[d'(\cos\beta_1-\cos\beta)+r\cos\delta]^2+(l+d'\sin\beta-r\sin\delta)^2\ldots \quad (f).$$

Nommons X la résistance tangentielle, appliquée à l'extrémité de la manivelle et capable d'équilibrer la force motrice du piston pour la figure actuelle du système articulé : on aura donc :

$$X:K=d'.d\beta:rd\delta$$

et l'on ne devra plus chercher que le chemin virtuel $rd\delta$ en fonction

de $d'.d_\beta$, β, δ, ou de β et $d'd\beta$ seulement. A cet effet il faudrait résoudre l'équation (f) par rapport à sin δ, ou cos δ, la différencier ensuite, ce qui donnerait je suppose :

$$d\delta = \varphi(l,r,\beta,d') \cdot \frac{d_\beta}{\cos\delta} = \psi(l,r,\beta,d') \frac{d_\beta}{\sin\delta}$$

les caractéristiques φ et ψ marquant des fonctions connues ; et il resterait à substituer dans la dernière la valeur de sin δ ou cos δ en β, déduite de (f), ce qui donnerait ;

$$rd\delta = \mathrm{F}(l,r,d',\beta).d\beta$$

la lettre F marquant encore une forme de fonction connue. De là on déduirait enfin la valeur du rapport X : K. Mais les suppositions de cos $\beta_1 = 1$, cos $\beta = 1$, sin $\beta = \beta$ donneront une approximation sans doute suffisante ; et si on les introduit dans l'équation (f), on obtient l'égalité ;

$$(l+d'\beta)^2 - 2r(l+d'\beta)\sin\delta = l^2 - r^2. \quad . \quad (g).$$

partant : $\mathrm{X}:\mathrm{K} = d'd_\beta : rd\delta = (l+d'\beta)\cos\delta : (l+d'\beta - r\sin\delta)$. . (h)

Si l'on élimine K de cette dernière et de celle qui fournit le rapport K : P, on obtient :

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}} = \frac{(l+d'\beta)\cos\delta}{l+d'\beta - r\sin\delta} \cdot \frac{c'}{d+c'}\left(\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\operatorname{tang}\delta}\right). \quad . \quad (k).$$

Cette formule peut encore se simplifier, puisqu'on a déjà vu que les constantes doivent être choisies de façon que les variables δ, β ne se surpassent jamais d'une quantité bien sensible ; ainsi l'on y prendra tang δ = tang β, ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}} = \cos\beta \cdot \frac{(l+d'\beta)\cos\delta}{l+d'\beta - r\sin\delta} = \frac{(l+d'\beta)\cos\delta}{l+d'\beta - r\sin\delta}. \qquad (l)$$

Mais quelqu'approchée que soit la valeur de $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}$ qu'on adopte, il est manifeste que les forces P, X ne sauraient jamais varier d'après la loi géométrique du second membre de ces équations, puisqu'ordinairement la résistance totale ramenée au bras de levier B'D' est une quantité à-peu-près constante, et que de son côté la force P est soumise à une loi de variation dépendante de la température de la vapeur et de la vitesse du piston. Ainsi donc l'équilibre dynamique permanent est impossible, et le mouvement ne saurait de lui-même

être uniforme; il faut parconséquent le régulariser par la force d'inertie d'une masse étrangère qu'on nomme le *volant*.

§ 12). Mais à défaut d'un mouvement uniforme de l'arbre tournant, on peut se procurer un mouvement périodique reglé, pourvu qu'on donne au fluide moteur une température telle que la quantité de travail fournie par tour soit égale à la quantité d'action absorbée dans cet intervalle par la résistance totale; c'est ce qui donne l'équation de condition :

$$2\pi.r.\mathrm{X}=\mathrm{P}.2d'\beta_1+\mathrm{P}.2d'.\beta_1.$$

ou en observant que $r=d'.\beta$; $\dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}=\dfrac{2}{\pi}$. . . . (m).

ce qui suppose toutefois que la machine soit à double effet; car pour le simple effet on trouverait la moitié seulement de cette valeur de $\dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}$: mais si l'équation (g) ne subsiste pas d'une manière générale, elle est au moins vraie pour de certaines figures de la machine qui sont celles de son équilibre; ainsi nous aurons ces figures en remplaçant $\dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}$ du 1$^{\mathrm{er}}$ membre par sa valeur $\dfrac{2}{\pi}$ dans l'équation (g), qui donnera par là :

$$\frac{r\sin\delta\pm\sqrt{l^2-r^2\cos^2\delta}}{\pm\sqrt{l^2-r^2\cos^2\delta}}\cdot\cos\delta=\frac{2}{\pi}=0{,}6366\ldots\quad(n).$$

Nommons δ', δ'', δ''', $\delta^{(\mathrm{IV})}$... les valeurs approchées de δ, calculées successivement par cette équation : on aura d'abord :

$$\cos\delta'=0{,}63661980,\ \sin\delta'=0{,}7712\ \text{et}\ \delta'=50^\circ28'.$$

de là on déduit, en ne prenant que le signe $(+)$:

$$\left(1+\frac{\sin\delta'}{6}\right)\cos\delta''=0{,}63661980.$$

partant : $\cos\delta''=\dfrac{0{,}63661980}{1{,}1285}=0{,}5641.$

$$\text{et}\ \sin\delta''=0{,}82577:\frac{1}{6}\ \sin\delta''=0{,}1376.$$

$$\cos\delta'''=0{,}5596,\frac{1}{6}\ \sin\delta'''=0{,}1381.$$

$$\cos\delta^{(v)} = \frac{0\,6366\ldots}{1,1381} = 0,5596.$$

ce qui donne d'une manière approchée :

$$\delta = 55^\circ\ 58',\ \text{et complément}\ \delta = 34^\circ\ 2'.$$

En prenant le signe (—), on trouve par un calcul semblable :

$$\delta^{(vi)} = 43^\circ\ 57'\ ;\ \text{et complément}\ \delta^{(iv)} = 46^\circ\ 3'.$$

Ainsi la machine est dans une position d'équilibre quand la manivelle fait avec l'horizontale un angle de 55° 58′ ; et un autre angle de 43° 57′ avec cette même horizontale. Or d'après les équations établies, on a :

$$l + d' \sin\beta \text{ ou } l + d'\beta = r \sin\delta + l \sin\gamma = r \sin\delta \pm \sqrt{l^2 - r^2\cos^2\delta}$$

selon que l'angle γ est positif ou négatif, ou selon que la bielle N′D′ comptée de N′ vers D′ fera avec l'horizontale un angle aigu ou obtus : ainsi en supposant que le mouvement ait lieu dans le sens de la flèche, il faudra admettre le signe positif dans la demi-circonférence descendante de la manivelle, et le signe négatif dans son demi-tour ascendant. Mais le premier angle 55° 58′ ayant été calculé par le moyen d'un cosinus peut-être indifféremment positif ou négatif, de sorte qu'il semblerait qu'un écart de 55°. 58′ au-dessus et au-dessous de l'horizontale marquât une position d'équilibre ; mais il n'en est pas ainsi ; car si l'équation (*n*) renfermant au numérateur le terme $r \sin\delta$, se trouve satisfaite par la valeur $\delta = 55^\circ\ 58'$, elle ne saurait plus l'être par cette valeur prise en signe contraire : ainsi le calcul précédent donne dans le demi-tour descendant une position d'équilibre $\delta = +55^\circ\ 58'$, et une autre position $\delta = -43^\circ\ 57'$; reste à trouver encore ce qui a lieu dans le demi-tour ascendant : quand dans celui-ci le bras de manivelle fera avec l'horizontale de ce demi-tour un angle inférieur de 43° 57′, et un angle supérieur de 55° 58′, elle sera dans une position d'équilibre : il y a donc quatre positions d'équilibre dans un tour entier ; dans le sens du mouvement, le système en passant par la première, sera animé d'une force vive *minima*, dans la seconde d'une force vive *maxima*, et dans la troisième position la force vive sera de nouveau un *minimum*, pour redevenir un *maximum* dans la quatrième position.

§ 13). D'après ce qui précède nous pouvons calculer directement le poids du volant, propre à régulariser le mouvement de l'arbre tournant, entre telles limites qu'on voudra ; et à cet effet nous aurons

à suivre la méthode que Navier a employée dans le cas de la manivelle à simple ou à double effet, et sollicitée par une force constante de grandeur et de direction. Seulement comme pour ce dernier cas les deux positions d'équilibre successives sont écartées d'un angle de 39° 32′ environ de la verticale *supérieure* et *inférieure*, nous voyons déjà que les résultats obtenus par Navier dans ce cas plus simple, ne doivent plus donner une approximation suffisante, quand on les applique à la machine à vapeur, et qu'il doit valoir la peine de reprendre ces calculs et de les exécuter d'après les valeurs angulaires différents 34° 2′ avec la verticale supérieure, et 46° 3′ avec la verticale inférieure. Comme l'intervalle de ces positions forme un angle de 55° 58′+43° 57′=99°, 9333, ou un arc en fraction du rayon, égal à 0,55518.$\pi.r$, la double quantité d'action de la résistance correspondante sera: $2\pi.r.X.0,5550$; la double quantité d'action de la puissance dans le même intervalle sera à très-peu près : $P.d'.(\beta'+\beta'')$, β',β'' dénotant les arcs décrits par le balancier au-dessus et au-dessous de l'horizontale de son centre de rotation. Nous aurons donc, en nommant encore δ', δ'' les valeurs de δ, contemporaines à β', β'' :

$$l+d'\beta'=r\sin\delta'+\sqrt{l^2-r^2\cos^2\delta'}$$
$$l-d'\beta''=-r\sin\delta''+\sqrt{l^2-r^2\cos^2\delta''}$$

la dernière se déduit de la première, en observant que β'', δ'' sont à la fois négatifs, et revient à cette autre :

$$d'\beta''-l=r\sin\delta''-\sqrt{(l^2-r^2\cos^2\delta'')}.$$

Ces équations donneront approximativement :

$$d'\beta'=r.\left(\sin\delta'-\frac{\cos^2\delta'}{12}\right)$$
$$d'\beta''=r\left(\sin\delta''+\frac{\cos^2\delta''}{12}\right)$$

D'où $P\left(d'\beta'+d'\beta''\right)=r.\left(\sin\delta'+\sin\delta''-\frac{\cos^2\delta'-\cos^2\delta''}{12}\right)$.

Mais on a :

$\sin\delta'=0,8287$, $\sin\delta''=0,6940$, $\cos^2\delta'=0,3107$, $\cos^2\delta''=0,5184$.

Ce qui donnera en nombres :

$$Pd'(\beta'')=0,7700.P.2.r=0,7700.\pi.r.X.$$

Ainsi conformément à ce qu'on avait admis d'avance, l'excès du

travail moteur sur le travail résistant est positif dans l'intervalle dont il s'agit, et il vaut :

$$(0,7700-0,5552)\pi.r.X=0,2148.\pi.r.X.$$

l'accroissement de force vive, gagné par la machine de l'une à l'autre de ces positions, doit équivaloir au double de cet excès : mais en négligeant d'abord l'influence de la force d'inertie des pièces oscillantes et tenant simplement compte de la masse régularisante du volant, nommons p son poids, r_1 son rayon moyen, ω' la vitesse angulaire *minima* de l'arbre tournant, ω'' sa vitesse *maxima*, ω_1 la moyenne vitesse, censée donnée, et mettons la condition que l'excès $\omega''-\omega'$ soit $\frac{1}{n}$ de ω_1 : nous trouverons pour l'accroissement de force vive :

$$\frac{2p.r_1^2\omega_1^2}{n.g}=0,2148.2.\pi.r.X. \quad . \quad . \quad (1, 2).$$

En adoptant des notations analogues dans les trois autres intervalles, on obtiendra de même;

$$\frac{2p.r_1^2\omega_{11}^2}{n.g}=0,2416.2\pi.r.X. \quad . \quad . \quad (2, 3)$$

$$\frac{2p.r_1^2\omega_{111}^2}{n.g}=0,2148.2\pi.r.X. \quad . \quad . \quad (3, 4).$$

$$\frac{2p.r_1^2\omega_{1111}^2}{n.g}=0,2105.2\pi.r.X. \quad . \quad . \quad (4,1).$$

Mais en nommant Ω_1 la vitesse angulaire moyenne générale de l'arbre et du volant, nous aurons :

$$\Omega_1=\frac{1}{4}.(\omega_1+\omega_{11}+\omega_{111}+\omega_{1111});$$

partant par substitution :

$$\frac{2p.r_1^2\Omega_1^2}{n.g}=\frac{2r.X}{16.}\,(2\sqrt{0,2148}+\sqrt{0,2416}+\sqrt{0,2105})^2$$

ou $p.r_1^2\Omega_1^2=2,15526.n.\pi.r.X. \quad . \quad . \quad (p).$

Pour la manivelle à double effet sollicitée par une force constante, on trouve 2,06475 pour coëfficient, au lieu de 2,15526 ; ce qui fait dans le cas actuel un surcroit de $0,09.\pi.r.4.X$, lequel peut devenir

assez sensible quand n' est considérable et que la machine doit marcher avec une grande régularité.— Voyons maintenant comment on tiendra compte de la masse du balancier.

§ 14). Comme l'équation (g) donne, en ne prenant que le signe positif :

$$r+d'\beta=r\sin\delta+\sqrt{l^2-r^2\cos^2\delta},$$

on obtient approximativement :

$$d'\beta=r\sin\delta-\frac{r^2}{2l}\cdot\cos^2\delta. \quad . \quad . \quad . \quad (q).$$

De là on conclut, en supposent toujours $l=6r$, que quand le balancier est horizontal, la manivelle est encore à 4° 45′ au-dessus de l'horizontale, et que quand celle-ci est devenue horizontale, le balancier fait un angle inférieur de 1° 36′ environ avec l'horizontale ; ainsi l'angle β est négatif quand δ l'est ; mais il le devient avant δ. Ainsi pour le second quart de manivelle, la formule (q) subsiste comme pour le premier ; et elle donne par la différenciation :

$$d'.\left(\frac{d\beta}{dt}\right)=r\cos\delta.\frac{d\delta}{dt}+\frac{r^2}{l}\cdot\sin\delta.\cos\delta.\frac{d\delta}{dt}.$$

Donc en représentant par $\int\rho^2 du$ le moment d'inertie du balancier par rapport à son axe de rotation, sa force vive sera pour la première position d'équilibre qu'on désignera par d', β' :

$$\frac{d\beta'^2}{dt^2}\int\rho^2 d\mu=\left(r\cos\delta'.\frac{d\delta'}{d'dt}+\frac{r^2}{ld'}\sin\delta'\cos\delta'.\frac{d\delta'}{dt}\right)^2\int\rho r d\mu$$

$$=\frac{r^2}{d'^2}\cos^2\delta'.\left(\frac{d\delta'}{dt}\right)^2\cdot\int\rho^2 d\mu, \text{ à peu près},$$

et pour la seconde position (δ'', β'') qui suit la première, on aura de même pour la force vive du balancier :

$$\left(\frac{d\beta''}{dt}\right)^2\cdot\int\rho^2 d\mu=\frac{r^2}{d'^2}\cdot\left(\frac{d\delta''}{dt}\right)^2\cdot\cos^2\delta''.\int\rho^2 d\mu$$

$$=\frac{r^2}{d'^2}\cdot\omega''^2.\cos^2\delta''.\int\rho^2 d\mu.$$

Ainsi en passant de la première à la seconde position, le balancier reçoit l'accroissement de force vive :

$$\frac{r^2}{d^2}(\omega''^2\cos^2\delta''-\omega'^2\cos^2\delta')\int\rho^2 d\mu\,;$$

et comme $\omega''=2\omega_1+\frac{1}{n}\omega_1$, $\omega'=2\omega_1-\frac{1}{n}\omega_1$, cet accroissement se réduit à :

$$\frac{r^2}{d^2}\cdot\int\rho^2.\mu.\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\cos^2\delta''-\left(2-\frac{1}{n}\right)^2\cdot\cos^2\delta'\right)\omega_1^2$$

$$=\frac{r.^2\omega_1^2}{d^2}\int^{\lambda}\rho^2 d\mu.(4\cos^2\delta''-4\cos^2\delta'),\text{ à-peu-près :}$$

ou en observant que $\delta'=3r$ environ, il vient :

$$0{,}0923.\omega_1^2.\int\rho^2 d\mu.$$

Pendant cet intervalle le balancier doit donc réagir par sa force d'inertie et concourir à régulariser le mouvement de la machine ; on aura donc :

$$(\text{I})\ldots\frac{2pr_1^2\omega_1^2}{n.g}+0{,}0923\omega_1^2\int.\rho^2 d\mu=0{,}2148.2\pi r.\text{X}.$$

Or il est facile de se convaincre que dans l'intervalle des positions (2, 3) la modification de force vive du balancier doit être nulle, du moins à-peu-près ; que dans l'intervalle des positions (3, 4) cette modification positive a de nouveau la valeur $0{,}0923\ \omega_{III}^2\ \int\rho^2 d\mu$; qu'enfin dans l'intervalle (4, 1) elle est encore une fois nulle : ainsi l'on doit joindre à (I) les trois égalités :

$$\frac{2p.r_1^2\omega_{II}^2}{n.g}=0{,}2416.2\pi.r\text{X}\ldots\quad(\text{II}).$$

$$0{,}0923\,\omega_{III}^2.\int\rho^2 d\mu+\frac{2p.r_1^2\omega_{III}^2}{n.g}=0{,}2148.\ 2\pi.r\text{X}\ldots\qquad(\text{III}).$$

$$\frac{2p.r_1^2\omega_{IIII}^2}{n.g}=0{,}21_05.\ 2\pi.r\text{X}\ldots\quad(\text{IV}).$$

Supposons que le coefficient n soit le même dans les trois équations (I, II, III) et que dans l'équation (IV) il soit les $\frac{2416}{2105}$ de sa valeur dans les autres égalités : on aura donc alors $\omega_{II}=\omega_1$, $\omega_{IIII}=\omega_{I_1}$, et il suffira d'avoir égard aux égalités (I, II) pour ce calcul du poids

p : or en les retranchant membre à membre, on obtient pour $\int \rho^2 d\mu = \mathrm{K}$:

$$\frac{2p.r r^2}{n.\mu\, g} \cdot (\omega_{II}{}^2 - \omega_I{}^2) - 0{,}0923.\mathrm{K}\omega_I{}^2 = 0{,}0268.\, 2\pi r.\mathrm{X}.$$

Mais en nommant Ω_I la moyenne vitesse par tour, on a encore $\omega_{II} + \omega_I = 2\Omega_I$, et l'on pourra encore mettre la condition que l'excès de ω_{II} sur ω_I soit le $\frac{\mathrm{I}}{\mu}$ de Ω_I, ce qui donnera aussi :

$$\omega_{II} - \omega_I = \frac{\mathrm{I}}{\mu}.\Omega_I \text{ , d'où : } \omega_{II}{}^2 - \omega_I{}^2 = \frac{2\Omega_I{}^2}{\mu}, \text{ et } \omega_I = \Omega_I - \frac{\Omega_I}{2\mu}$$

et par substitution on obtiendra :

$$\frac{4pr_I{}^2\Omega_I{}^2}{n.g.\mu} = 0{,}0923.\mathrm{K}\left(\Omega_I - \frac{\Omega_I}{2\mu}\right)^2 + 0{,}0268.\, 2\pi r.\mathrm{X}.$$

$$= 0{,}0923.\mathrm{K}.\Omega_I{}^2 + 0{,}0268.\, 2\pi r.\mathrm{X}.$$

Dans le cas de $\mu = n$ cette formule donne :

$$4p.r_I{}^2.\Omega^2 = 0{,}90526.n^2\, \mathrm{K}_I{}^2 + 0{,}26291.n^2.2\pi r.\mathrm{X}.,$$

$$\text{ou } p = 0{,}2263.n^2.\frac{\mathrm{K}}{r_I{}^2} + 0{,}06573.n^2.\frac{2\pi.r.\mathrm{X}.}{r_I{}^2\Omega_I{}^2}.$$

Pour avoir la quantité K, moment d'inertie du balancier, on pourra se contenter d'un calcul approché dans chaque cas donné : pour avoir la quantité X, il faudra réduire au bras de levier de la manivelle, non seulement la résistance utile, mais encore les frottements dûs à cette dernière résistance et aux forces sollicitantes : le problème peut encore se résoudre par approximation à l'aide des principes d'équilibre connus. Les quantités n et Ω_I se trouvent déterminées par la nature de l'ouvrage que la machine doit confectionner.

§ 15). *Proposons-nous de trouver la courbe décrite par l'extrémité de la tige du piston :* il serait fort long de résoudre cette question, par le système de variables angulaires, adopté par Prony : le procédé que nous allons donner est encore assez embarrassant ; mais il est fort général, et il nous conduira d'ailleurs à quelques propriétés particulières, encore peu connues, l'une seulement a été indiquée déjà par un géomètre allemand, dans les annales mathématiques de M. Grunert :

La question se réduit donc à trouver la courbe décrite par un

point quelconque M intérieur d'une bielle rigide CD, (fig. 8) articulée par ses extrémités sur celles de deux leviers AC, BD, mobiles autour des centres fixes A et B ; or posons :

$$AC=d,\ BD=b,\ CD=c,\ MC=n.c,$$

n marquant un nombre donné entre o et I. En nommant m la tangente trigonométrique de l'angle de CD avec l'axe des abscises, que l'on dirige suivant la droite AB, l'axe des y étant suivant une normale en A à AB, on aura :

$$x^2+y^2=d^2.\ (1);\ (x'-a)^2+y'^2=b^2\ldots\ (2);$$
$$y-y'=m(x-x')\ldots\ (3).$$

x', y' dénotant les coordonnées courantes de la circonférence b. Donc en nommant X, Y les coordonnées du point générateur M, on aura aussi :

$$y-Y=m(x-X)\ldots.(4)\ ;\ y'-Y=m(x'-X)\ldots\ (5).$$
$$(x'-X)^2+(y-Y)^2=n^2c^2\ \ldots\ (6).$$
$$(x'-X)^2+(n'-Y)^2=(1-n)^2.c^2\ldots\ (7).$$

Les équations (4) et (6) donneront ;

$$x=X\pm\frac{n.c}{\sqrt{1+m^2}},\ y=Y\pm\frac{m.n.c}{\sqrt{1+m^2}},$$

Les équations (5 et 7) donneront :

$$x'=X\pm\frac{(1-n)c}{\sqrt{1+m^2}},\ y'=Y\pm\frac{m(1-n)c}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Substituant ces valeurs de x, y, x', y' dans les égalités (1, 2) on en déduit les deux suivantes ;

$$\left(X\pm\frac{n.c}{\sqrt{1+m}}\right)^2+\left(Y\pm\frac{n.c.m}{\sqrt{1+m^2}}\right)=d^2,$$

$$\left(X-a\pm\frac{(1-n)c}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2+\left(Y\pm\frac{(1-n)c.m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2=b^2.$$

Equations entre lesquelles il restera à éliminer le paramètre variable m.

Mais en supposant que le point M tombe entre C et D, on aura constamment : $x<X$, et $x'>X$:

Donc dans les valeurs de (x, y) il faudra prendre la quantité radi-

cale avec le signe négatif, et dans celles de $(x'y')$ il faudra la prendre avec le signe positif : ainsi nous aurons pour ce cas :

$$\left.\begin{aligned}&\left(X-\frac{n.c}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2+\left(Y-\frac{n.c.m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2=d^2.\\&\left(X-a+\frac{(1-n)c}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2+\left(Y+\frac{(1-n)c.m}{\sqrt{1+m}}\right)^2=b^2.\end{aligned}\right\}.$$

Si l'on pose pour abréger $X^2+Y^2=\rho^2$, et que l'on tire de chaque équation la valeur de $\frac{X+mY}{\sqrt{1+m^2}}$, on trouvera en égalant cette double valeur :

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\rho^2+(1-n)(nc^2-d^2)+n(a^2-2aX-b^2)}{2.n.(1-n).a.c}=\frac{N_1}{2.n(1-n)ac}.\quad(8)$$

Mais la première de nos équations posées ci-dessus donnera :

$$X+mY=\frac{\rho^2+n^2c^2-d^2}{2.n.c}.\sqrt{1+m^2};$$

substituant dans celle-ci la valeur de $\sqrt{1+m^2}$ déjà trouvée, et résolvant par rapport à m, on aura :

$$m=\frac{(\rho^2+n^2c^2-d^2)a(1-n)-N_1.X}{N_1.Y}\quad\ldots\quad(9).$$

Mais l'équation (8) donnera aussi pour m :

$$m=\frac{1}{N_1}.\sqrt{[4n^2(1-n)^2a^2c^2-N_1^2]}.\quad\ldots\quad(10).$$

Égalant cette double valeur de m des équations (9, 10), on obtient l'équation de la courbe :

$$a(1-n)(\rho^2+n^2c^2-d^2)-N_1.X=Y.\sqrt{4n^2(1-n)^2a^2c^2-N_1^2}..\quad(11).$$

Dans laquelle il n'y aura plus qu'à substituer à ρ^2 et à N_1 leurs valeurs :

$$\rho^2=X^2+Y^2 \text{ et } N_1=\rho^2+(1-n)(nc^2-d^2)+n(a^2-b^2-2aX).$$

Ainsi la question générale doit être considérée comme résolue.

Dans le cas de $n=\frac{1}{2}$, on obtient :

$$N_1=\rho^2+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}c^2-d^2)+\left(\frac{a^2-b^2}{2}-aX\right),$$

Transportant l'origine des coordonnées au milieu de la droite $AB=a$ et faisant $b=d$, $c=a$, et $a^2=2d^2$, on trouvera pour $Y=y'$, et $X=x'+\frac{a}{2}$:

$$\rho'^2=x'^2+y'^2, \text{ et } N=\rho'^2;$$

et l'équation (11) deviendra après quelques réductions :

$$\left(\frac{a^2}{2}-\rho'^2\right)x'=y'\cdot\sqrt{\frac{a^2c^2}{4}-\rho'^4}=y'\sqrt{\frac{a^4}{4}-\rho'^4} \quad \ldots (11')$$

de laquelle on conclut :

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}-\rho'^2\right)}\cdot x'=y'\cdot\sqrt{\frac{a^2}{2}+\rho'^2}.$$

ou en faisant $x'=\rho'\cos\Phi'$, $y'=\rho'\sin\Phi'$:

$$\cos\Phi'\sqrt{\frac{a^2}{2}-\rho'^2}=\sin\Phi'\cdot\sqrt{\frac{a^2}{2}+\rho'^2}.$$

Si l'on élève au quarré et qu'on remplace de nouveau $\cos\Phi'$, $\sin\Phi'$ par leurs valeurs $\frac{x'}{\rho'}$, $\frac{y'}{\rho'}$, on obtient :

$$\left(x'^2+y'^2\right)^2=\frac{a^2}{2}\left(x'^2-y'^2\right);$$

ce qui est la lemniscate ordinaire. Ainsi quand une droite constante de longueur est assujettie à se mouvoir par ses deux points extrêmes sur deux circonférences de cercle égales, dont la distance des centres a, égale à cette longueur, soit la diagonale du quarré construit sur le rayon comme côté, le milieu de la droite mobile décrit une lemniscate; de là on conclut donc le moyen de construire cette courbe par un mouvement continu.

Si dans l'équation (11) on suppose $n=0$, elle reproduit le cercle de rayon d, savoir $\rho^2-d^2=0$. Si l'on y suppose $n=1$, elle reproduit le cercle de rayon b, savoir $(X-a)^2+Y^2=b^2$, comme cela doit être pour la vérification de nos résultats.

Il est d'ailleurs facile de voir que la courbe générale de l'équation (11) est du 6$^{\text{me}}$ degré.

Mais remarquons avec M. Dubois que dans le cas de $n=\frac{1}{2}$: $b=d$, $c=a$, et $a^2=2b^2$, non-seulement l'équation générale (11) qui devient

alors (11') donne la lemniscate ordinaire ; mais qu'elle est satisfaite encore par l'égalité à zéro du facteur commun :

$\sqrt{\frac{a^2}{2}-\rho'^2}=0$: ce qui donne le cercle :

$$\rho'^2 \text{ ou } y'^2+x'^2=\frac{a^2}{2}:$$

ainsi dans ce cas particulier l'équation (11') représente en même temps un cercle et une lemniscate. Monsieur Dubois a remarqué que l'équation (11) peut se décomposer en deux facteurs, l'un du quatrième degré et l'autre du second, ce qui fait dégénérer la courbe du 6^{me} degré en deux autres, l'une du 4^{me} et l'autre du second, pour le cas de $n=\frac{1}{2}$ et de $b=d$, quel que soit d'ailleurs le rapport de a à c : car les figures (9, 10) prouvent qu'avec ces deux conditions ce point M' de la droite CD' décrira un cercle de rayon b, égal aux rayons des deux cercles directeurs. C'est ce qu'on peut en effet vérifier : car en faisant comme plus haut $X=x'+\frac{a}{2}$, $Y=y'$, et supposant $n=\frac{1}{2}, b=d, c=a$, dans la valeur de N_1, on trouve : $N_1=\rho'^2+\frac{a^2-2b^2}{2}$, et $\rho^2=\rho'^2+ax'+\frac{a^2}{4}$: et l'équation générale (11) deviendra par substitution :

$$\frac{a}{2}\left(\rho'^2+ax'+\frac{a^2-2b^2}{2}\right)-\left(\rho'^2+\frac{a^2-2b^2}{2}\right)\left(x'+\frac{a}{2}\right)=$$
$$y'\sqrt{\frac{1}{4}a^4-\left(\rho'^2+\frac{a^2-2b^2}{2}\right)^2}.$$

Réduisant le premier membre à sa plus simple expression et décomposant le second en ses deux facteurs, on obtient, en passant tous les termes dans un membre :

$$\left(\frac{a^2}{2}-\left(\rho'^2+\frac{a^2-2b^2}{2}\right)\right)x'-\sqrt{\frac{a^2}{2}+\left(\rho'^2+\frac{a^2-2b^2}{2}\right)}$$
$$\sqrt{\frac{a^2}{2}-\left(\rho'^2+\frac{a^2-2b^2}{2}\right)}\cdot y'=0.$$

Celle-ci est d'abord satisfaite par le facteur radical commun égalé à zéro, savoir : $\sqrt{\frac{a^2}{2}-\left(\rho'^2+\frac{a^2-2b^2}{2}\right)}=0$ qui donne la circon-

férence $\varepsilon'=b$, et ensuite l'autre terme donnera, par quelques réductions, la courbe du 4^{me} degré :

$$(y'^2+x'^2)^2-b^2(y'^2+x'^2)+a^2y'^2=0.$$

Cette équation qui renferme deux constantes a, b et qui devient seulement identique à celle de la lemniscate ordinaire pour le cas de $a^2=2b^2$, exprime donc la courbe engendrée par le milieu d'une droite constante a, assujettie à se mouvoir par les extrémités sur deux circonférences égales dont la distance des centres vaut la longueur mobile. On peut nommer cette courbe tant pour sa forme que pour la brièveté du langage la *lemniscate générale* : son équation en coordonnées polaires est :

$$\rho'^2=b^2(1-\varepsilon^2\sin^2\Phi') \text{ pour } a=\varepsilon.b :$$

et elle donne lieu à une remarque intéressante dans le calcul des fonctions elliptiques : en nommant s l'arc de la courbe compté du point E (fig. 9), et faisant :

$$\varepsilon^2(2-\varepsilon^2)=\varepsilon'^2 :$$

on obtient :

$$\frac{ds}{b}=\frac{\sqrt{1-\varepsilon'^2\sin^2\Phi'}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\Phi'}}\cdot d\Phi'.$$

Et en suivant des transformations connues, on prouverait aisément que l'intégration de cette expression se ramène aux fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèces : voilà donc une propriété générale dont la supposition de $\varepsilon^2=2$ n'est qu'un cas particulier déjà connu.

Remarquons avec M. Dubois que quand on fait $n=0$, l'équation (11) devient, eu égard à la valeur de N_1:

$$a(\rho^2-d^2)(\rho^2-d^2)(X+Y\sqrt{-1})=0 :$$

ce qui se décompose en deux facteurs l'un rationnel et l'autre imaginaire :

$$(\rho^2-d^2)(a-X-Y\sqrt{-1})=0.$$

Le premier donne évidemment la circonférence de rayon d, tandis que le second qui est irrationnel et imaginaire ne doit rien représenter, puisque l'on ne conçoit pas que l'extrémité de la droite mobile sur le cercle d puisse donner le point $X=a$; $Y=0$: c'est-à-

dire le centre du second cercle. La valeur de $n=1$ offre un second exemple de la décomposition de l'équation (11) en deux facteurs, l'un rationnel et l'autre imaginaire ; et ce dernier, égalé à zéro, donnerait maintenant le point A centre du premier cercle.

§ 16). Reprenons les formules (*d*) du § 9 , savoir :

$$u=a'-b\cos\delta+c'\cos\beta.$$
$$z=a''+b\sin\delta+c'\sin\beta,$$

qui donnent l'abscisse horizontale et l'ordonnée verticale du sommet F du parallélogramme NMFE (fig. 6 et 7) pendant la mouvement du système articulé DNEFMK (fig. 7) ; le point F décrira une certaine courbe ; il s'agit de connaître s'il est possible de construire un système articulé simple DED'K'' tel que pendant son mouvement le point F décrive encore la même courbe : posons donc les inconnues :

$$DK'''=A',\ K'''K''=A'',\ DE=D=d+c'=d'$$
$$ED'=C,\ D'K''=B,\ EF=c=N.C.$$

N désignant un nombre inconnu, pris entre O et A. En dénotant par x,y les coordonnées courantes de la courbe décrite par le point F, dans le système DED'K'' ; nous aurons par les équations (7) et (9) :

$$x=(1-N)D\cos\beta+N.(A'-B\cos\delta),$$
$$y=(1-N)D\sin\beta+N(A''+B\sin\delta);$$

donc puisque l'on doit avoir identiquement : $x=u$, $y=z$, il viendra :

$$N.A'=a',\ N.B=b,\ (1-N)D=c',\ N.A''=a'' :$$

équations de condition auxquelles il faut joindre les égalités manifestes :

$$N.C=c,\ \text{et}\ D=d'=d+c' :$$

de là on déduit :

$$1-N=\frac{c'}{d+c'},\ N=-\frac{d}{d+c'},\ A'=a\cdot\frac{d+c'}{d},\ A''=a''\cdot\frac{d+c'}{d}$$
$$B=b\frac{d+c'}{d},\ C=c\cdot\frac{d+c'}{d},\ FD'=\frac{c.c'}{d} :$$

et ces équations étant à la fois suffisantes et nécessaires, pour déterminer les constantes A', A'', B , C , et FD', la question est possible et se trouve résolue.

Pour construire ensuite le système DEFD'K'', tirez la droite DM et prolongez la jusqu'à sa rencontre avec EF en D'. Par D' ainsi obtenu tirez une parallèle à MK : elle coupera la droite DK en un point K''. En ce point fixez une bride K''D', et vous aurez le système demandé. En effet cette construction nous donne :

$$FD' : ED' = c' : c'+d, \quad FD' = \frac{cc'}{c'+d}$$

ce qui est précisément la valeur de FD' trouvée par la solution analytique on a ensuite :

$$K''D' : KM = DD' : DM = DE : DN = c'+d : d,$$

Ce qui donne : $K''D' = b\left(\frac{c'+d}{d}\right)$;

c'est encore la valeur trouvée par le calcul. Ainsi donc la courbe décrite par l'extrémité de la tige s'obtiendra, si l'on construit le système DED'K''. En remplaçant dans l'équation (11) les quantités a, c, b, d, n par C, B, D, A, N, on obtiendra :

$$(c)\ldots\ A(1-N)(\rho^2+N^2C^2-D^2)-N_1.X=Y\sqrt{4N^2(1-N)^2A^2.C^2-N_1^2}$$

la quantité abréviative N_1 ayant maintenant la valeur :

$$N_1=\rho^2+(1-N)(NC^2-D^2)+N.(A^2-B^2-2AX).$$

Remplaçant enfin dans ces deux dernières égalités les constantes A, B, C, par leurs valeurs en a, b, c, on obtient :

$$N_1=\rho^2+\frac{c'.c^2}{d}-c'(d+c')+\frac{c'+d}{d}(a^2-b^2)-2aX :$$

$$\frac{ac'}{d}\ [\rho^2+c^2-(d+c')^2]-N_1.X=Y.\sqrt{\frac{4a^2c'c'^2}{d^2}-N_1^2}.$$

Il faut observer que X,Y ne sont pas des coordonnées horizontales et verticales, mais que l'axe des abscisses est dirigé suivant la ligne DK des centres du balancier et de la bride, et que l'axe des Y est une normale en D à la ligne DK (fig. 7). — Pour le cas de $N=\frac{1}{2}$, A=C, B=D, la courbe (c) descend au quatrième degré ; et en posant :

$Y=Y', X=X'+\frac{A}{2}$, elle devient :

$$(Y'^2+X'^2)^2-B^2(Y'^2+X'^2)+A^2Y'^2=0.$$

Mais les conditions de $N=\frac{1}{2}$, $A=C$, $B=D$ étant introduites dans les équations qui fournissent A, B, C, D, en valeurs de a, b, c, d, c' donneront : $c'=d$, $B=2b$, $C=2c$, $D=2d$: $A=2a$; partant, $a=c$, et $b=d$: ainsi l'équation de la lemniscate générale décrite par le sommet F (fig. 7) sera :

$$(Y'^2+X'^2)^2-4b^2(Y'^2+X'^2)+4a^2Y'^2=0 ;$$

la courbe étant rapportée à la ligne des centres DK'' comme axe des abscisses, au milieu de cette ligne comme origine et à une normale en ce point comme axe des ordonnées.

Note sur une construction graphique du centre de gravité d'un polygone quelconque, en supposant connue la construction du centre de gravité du triangle; par J. B. Brasseur, Professeur à l'Université de Liége.

Quand on sait trouver le centre de gravité de tout triangle rectiligne, on a différents procédés pour en déduire le centre de gravité de tout polygone plan ; mais j'ignore si le suivant, qui est très-simple, a déjà été indiqué.

La construction du centre de gravité d'une figure plane quelconque revient à partager celle-ci, de deux manières différentes, en deux portions dont on sache construire les centres de gravité. La droite joignant les centres de gravité des deux premières portions coupera la droite joignant les centres de gravité des deux secondes portions en un point, qui sera le centre de gravité de la figure plane proposée. Appliquons ceci aux polygones.

Centre de gravité d'un quadrilatère.

On tracera les deux diagonales dont chacune divise le quadrilatère en deux triangles. La droite qui joint les centres de gravité des deux premiers triangles coupera la droite qui joint les centres de

gravité des deux seconds triangles, au centre de gravité du quadrilatère proposé.

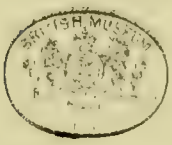
Centre de gravité d'un pentagone.

On mènera deux diagonales dont chacune divise le pentagone en un triangle et un quadrilatère. La droite qui joint les centres de gravité du premier triangle et du premier quadrilatère coupera la droite qui joint les centres de gravité du second triangle et du second quadrilatère, au centre de gravité du pentagone proposé.

Centre de gravité d'un hexagone.

On tracera deux diagonales dont chacune divise l'hexagone en deux quadrilatères. La droite qui joint les centres de gravité des deux premiers quadrilatères coupera la droite qui joint les centres de gravité des deux seconds quadrilatères, au centre de gravité de l'hexagone proposé ; et ainsi de suite pour des polygones d'un plus grand nombre de côtés.

Ce qui précède s'applique aux polygones convexes ; mais l'on trouvera facilement ce qu'il y a à faire lorsque les polygones sont concaves.



TABLE

DES MATIÈRES.

Pages.

MARTYNOWSKI. *De la construction des normales dans les courbes du second degré.* 1

DE SÉLYS-LONGCHAMPS. *Sur les Oiseaux américains inscrits dans la Faune européenne.* 35

NOEL. *Théorèmes et problèmes numériques.* 55

DE KONNINCK. *Monographie du genre* Productus. 71

COQUILHAT. *De la quantité de travail absorbée par les frottemens dans le forage des Bouches-à-feu à la Fonderie royale de canons de Liége.* 279

NOEL. *Exercices de Géométrie analytique.* 297

BOSQUET. *Description des Entomostracés fossiles de la craie de Maestricht.* 353

BRASSEUR. *Transformation du principe des moments en celui des vitesses virtuelles, et note sur une construction géométrique de la surface d'élasticité.* 379

DE CUYPER. *Principes de Polygonométrie analytique.* 387

STEICHEN. *Essai sur la théorie mathématique de la machine à vapeur.* 402

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. 1.

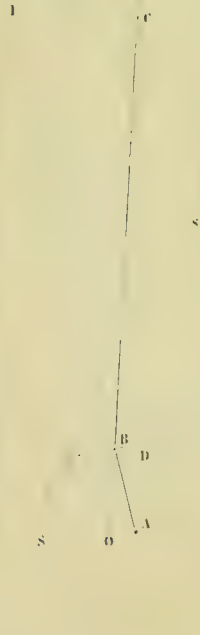


Fig. 2

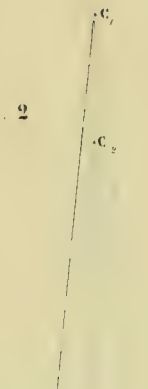


Fig. 3.

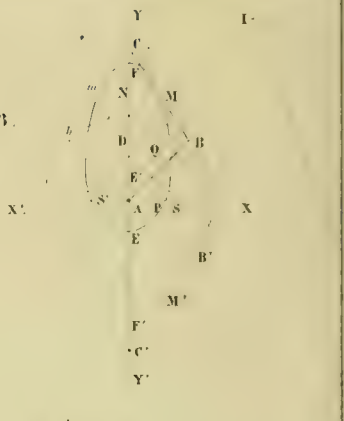


Fig. 3 bis

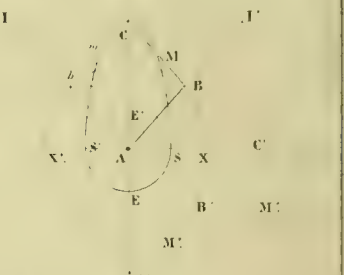


Fig. 10

Fig. 9.

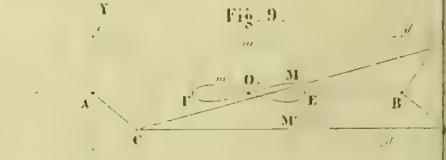
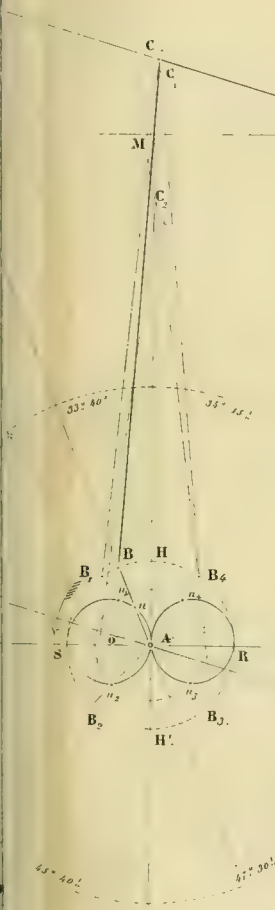


Fig. 4.



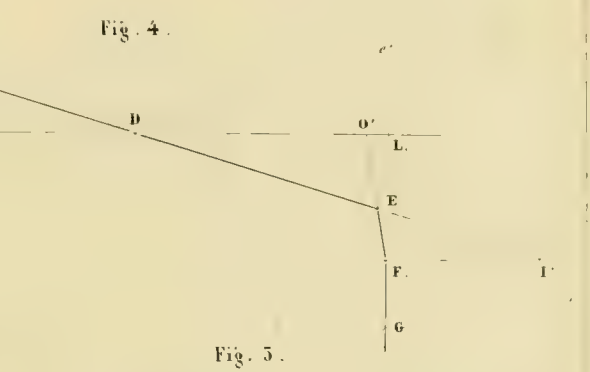


Fig. 5.

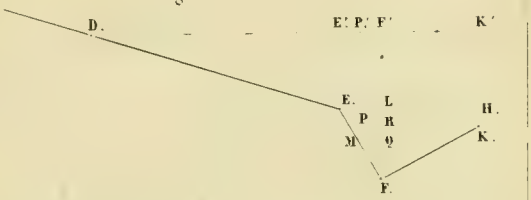


Fig. 6.

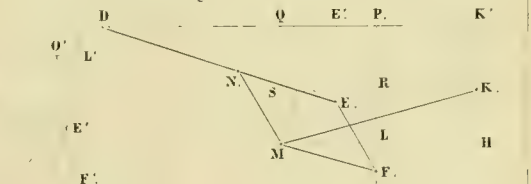
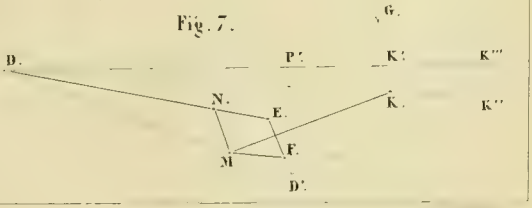
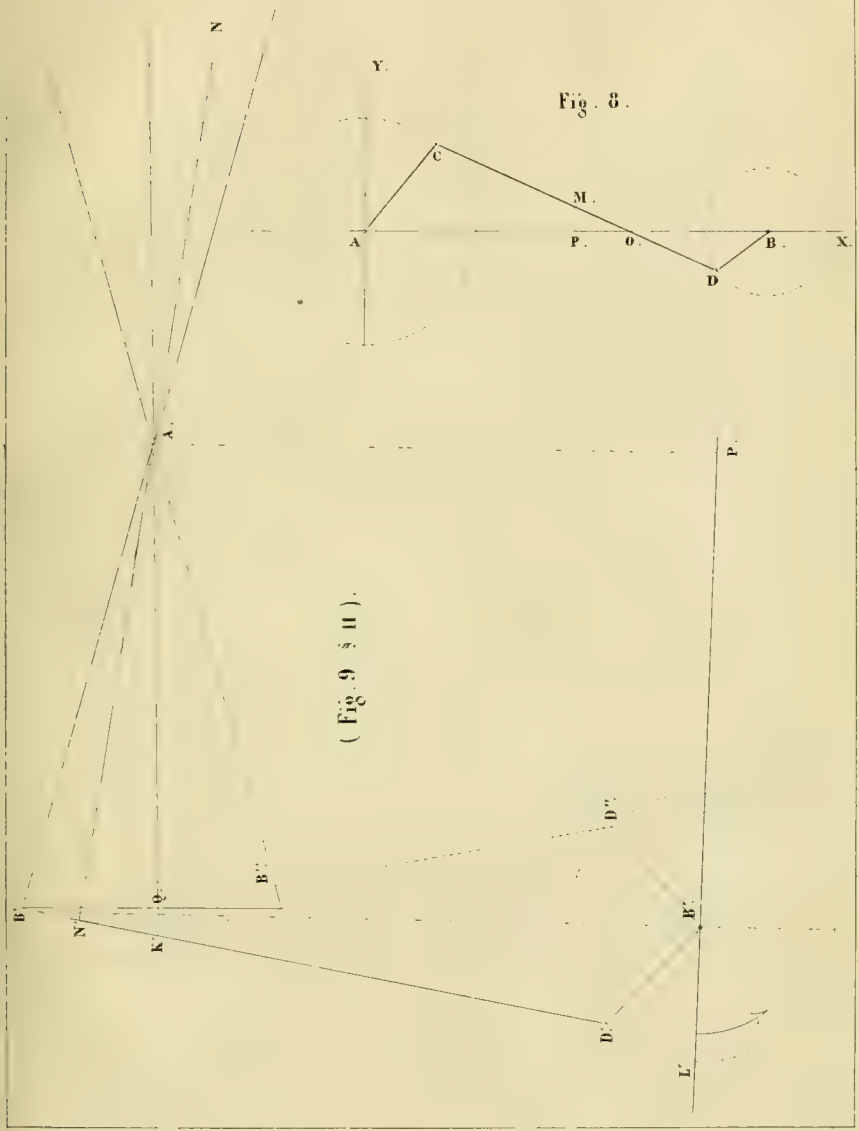


Fig. 7.





(Fig. 9 à 11) .

NATURAL HISTORY

Fig. I. Élévation longitudinale

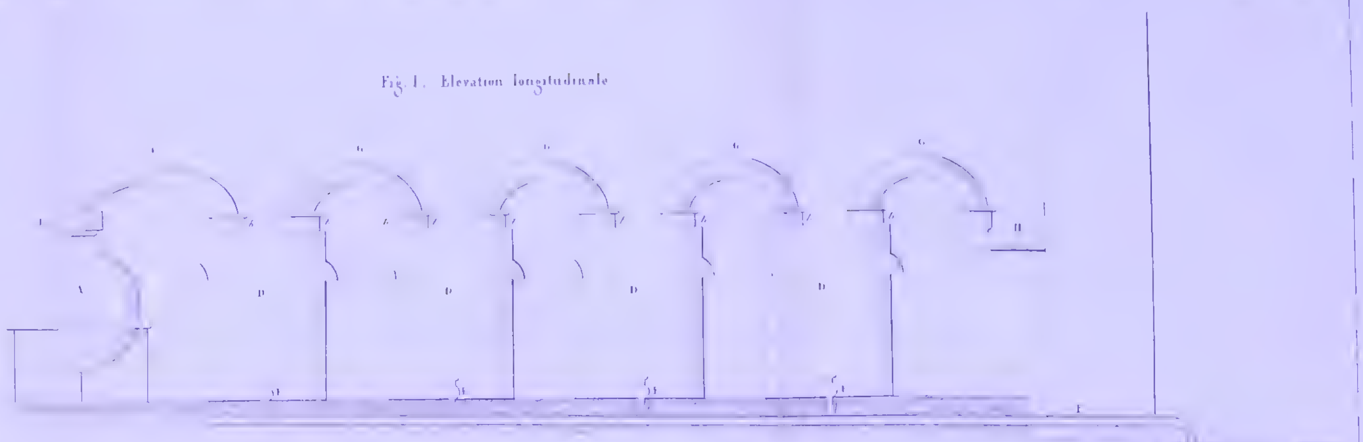


Fig. II. Projection horizontale.

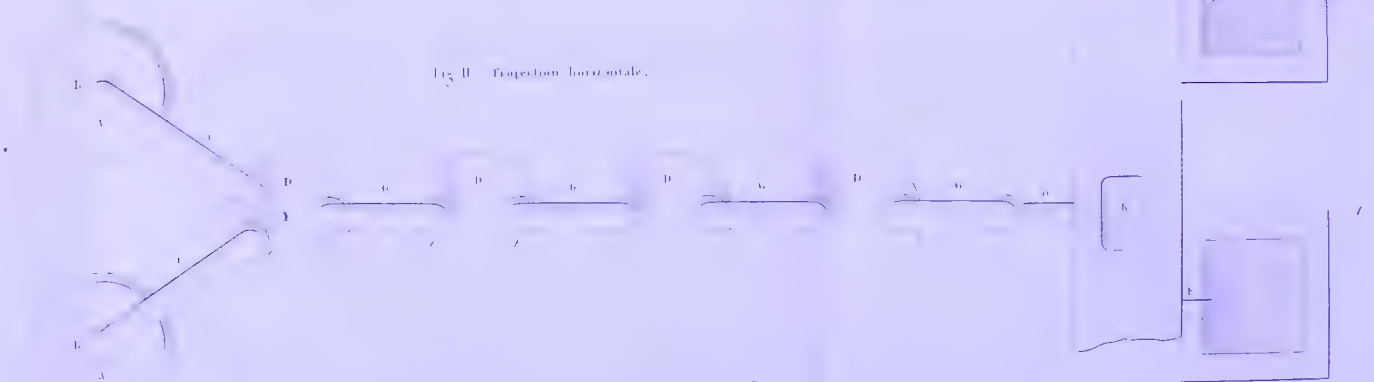
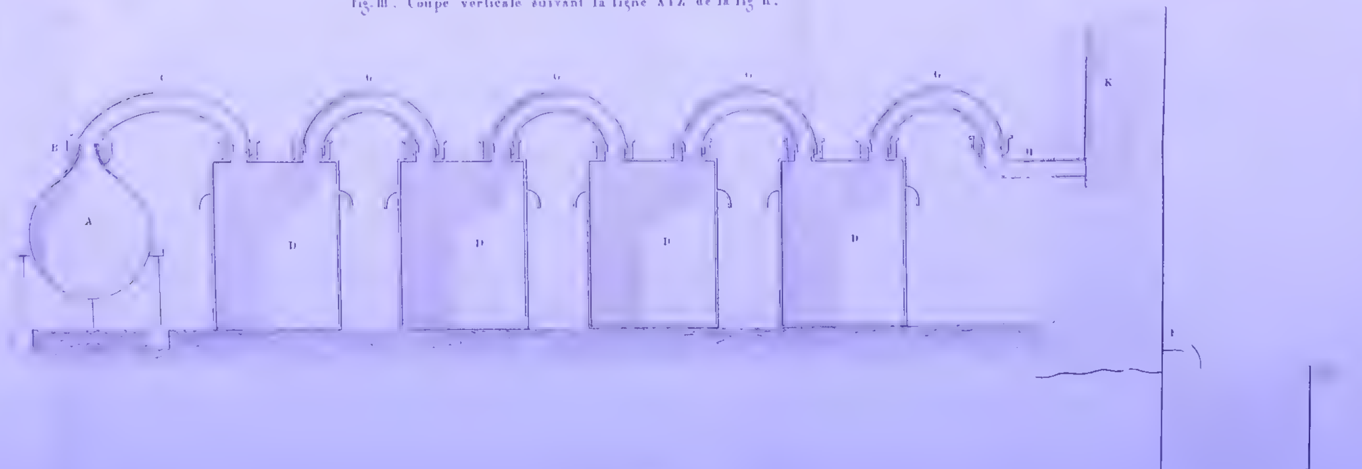


Fig. III. Coupe verticale suivant la ligne XYZ de la Fig. II.



Échelle [illegible]

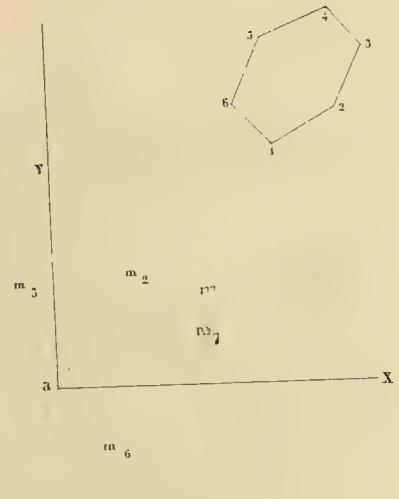


Fig. 1.

NATURAL